МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1989

УДК 539.3

С. В. КУЗНЕЦОВ

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ О ТРЕЩИНАХ В АНИЗОТРОПНЫХ УПРУГИХ СРЕДАХ

Получено псевдодифференциальное уравнение для решения задач о плоских трещинах произвольного разрыва в анизотропных упругих средах. Исследованы свойства матричного символа, отмечена связь с решением вариационной задачи для квадратичного коэрцитивного функционала.

1. Введение. Решение пространственных задач о плоских трещинах в анизотропных упругих средах методами интегральных уравнений сдерживалось до последнего времени отсутствием эффективных способов определения фундаментальных решений уравнений статики при произвольной анизотропии среды. В [1—5] получены интегро-дифференциальные уравнения для решения задач о плоских трещинах в анизотропных средах на основе применения преобразований Фурье и Радона. В этом подходе основная трудность состоит в необходимости решения ряда вспомогательных задач по определению корней эллиптических полиномов от трех переменных (при произвольной анизотропии эта задача может быть решена только численно) и вычислению интегралов по единичной окружности в связи с обращением преобразования Радона. Отмеченные обстоятельства, а также некоторые соображения принципиального характера, положенные в основу подхода [1—5] не позволили получить для трещин в анизотропных средах при произвольной анизотропии качественных и количественных результатов, аналогичных имеющимся в изотропном случае [6, 7].

В развиваемом ниже подходе для решения пространственных задач о плоских трещинах в анизотропных упругих средах получено псевдодифференциальное уравнение с матричным эллиптическим символом класса S^1. Свойства этого символа обеспечивают возможность применения вариационно-разностного метода [8, 9], а также получение некоторых качественных результатов, приводимых ниже.

2. Основные операторы и уравнения. Рассматривается анизотропная упругая среда, матричный дифференциальный оператор статики которой имеет вид

$$A(\mathbf{u}) \equiv -\operatorname{div} C[\nabla \mathbf{u}] = 0 \tag{2.1}$$

где $\mathbf{u}$ — вектор перемещений, C — четырехвалентный тензор упругости. Предполагается, что исследуемая анизотропная среда гиперупруга, а тензор C — эллиптичен, что обеспечивает эллиптичность оператора A. Подстановка в оператор A вместо u фундаментального решения E и последующее преобразование Фурье дают

$$A^{\vee} \cdot E^{\vee} = I \tag{2.2}$$

где I — единичная матрица, а «галочкой» обозначается преобразование Фурье

$$f^{\vee}(\boldsymbol{\xi}) = \int_{R^3} f(\mathbf{x}) \exp(-2\pi i \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x})\, dx \tag{2.3}$$

Формула (2.2) позволяет символ фундаментального решения E записать в виде

$$E^{\vee}(\boldsymbol{\xi}) = A_0^{\vee}(\boldsymbol{\xi}) / \det(A^{\vee}(\boldsymbol{\xi})) \tag{2.4}$$

где $A_0^{\vee}$ — матрица алгебраических дополнений символа $A^{\vee}$. Ввиду эллиптичности A, определитель в (2.4) отличен от нуля при $\xi\neq 0$. Кроме того, формулы (2.1), (2.4) показывают, что символ $E^{\vee}$ однороден по $|\xi|$ степени -2.

Для дальнейшего вводится прямоугольная декартова система координат $0X_1X_2X_3$, оси X_1, X_2 которой лежат в плоскости трещины π. Решение задачи о трещине осуществляется с использованием представления для перемещений в виде потенциала двойного слоя

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}', x_3)=\int_{\Omega}\mathbf{b}(\mathbf{y}')\cdot T_{\mathbf{v}_y}E(\mathbf{x}'-\mathbf{y}', x_3)\,dy', \qquad x'\in\Pi \tag{2.5}$$

где $\Omega\subset\pi$ — область, занятая трещиной; предполагается, что Ω собственно регулярна и ограничена в π; $\mathbf{b}$ — скачок смещений в зоне трещины $\mathbf{b}\in\in H_{1/2}(\Omega, R^3)$. В представлении (2.5) $T_{\mathbf{v}}$ — оператор напряжений, действующих на плоскости π:

$$T_{\mathbf{v}}(\mathbf{u})=\mathbf{v}\cdot C[\nabla\mathbf{u}] \tag{2.6}$$

$\mathbf{v}$ — вектор единичной нормали к π с координатами (0, 0, 1). Таким образом, оператор $T_{\mathbf{v}}$ определяет собой напряжения на плоскости π при подходе из «нижнего» полупространства R_-^3.

С учетом представления (2.5) напряжения, действующие на π при $x^3\to+0$ определяются как предел

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}')=\lim_{x_3\to+0}T_{-\mathbf{v}}\int_{\Omega}\mathbf{b}(\mathbf{y}')\cdot T_{\mathbf{v}}E(\mathbf{x}'-\mathbf{y}', x_3)\,dy' \tag{2.7}$$

существующий почти всюду на π в силу выполнения теорем типа Ляпунова — Таубера для упругих потенциалов [10, 11].

Далее используется формула Сомильяны для «верхнего» полупространства R_+^2:

$$\int_{\pi}\mathbf{t}(\mathbf{y}')\cdot E(\mathbf{x}'-\mathbf{y}', x_3)\,dy'-\int_{\pi}\mathbf{u}(\mathbf{y}')\cdot T_{-\mathbf{v}}E(\mathbf{x}'-\mathbf{y}', x_3)\,dy'=$$
$$=\begin{cases}\mathbf{u}(\mathbf{x}', x_3), & x_3>0\\ {}^1/_2\mathbf{u}(\mathbf{x}')\equiv{}^1/_2\mathbf{u}(\mathbf{x}', 0) & \\ 0, & x_3<0\end{cases} \tag{2.8}$$

причем при $x_3=0$ второй интеграл в левой части формулы (2.8) понимается в смысле главного значения.

Представление (2.5) обеспечивает выполнение следующих свойств для векторных плотностей $\mathbf{u}$, $\mathbf{t}$ сосредоточенных на π:

1. $\mathbf{u}, \mathbf{t}\in C(\pi\setminus\bar{\Omega}, R^3)$
2. $|u|=O(|x'|^{-2})$, $|t|=O(|x'|^{-3})$, $|x'|\to\infty$
3. $|u|=O(r^{1/2})$, $|t|=O(r^{-1/2})$, $r\to 0$, $r=\operatorname{dist}(\Omega, x')$

Нетрудно видеть, что свойства 1—3 приводят к корректному вычислению интегралов в формуле Сомильяны.

3. Оператор теории трещин. Преобразование Фурье (по $\mathbf{x}'$) выражений (2.5), (2.8) дает

$$\mathbf{t}^{\vee}(\xi')=G^{\vee}(\xi')\cdot\mathbf{b}^{\vee}(\xi')$$
$$\mathbf{G}^{\vee}(\xi')=\left(\int_{-\infty}^{\infty}E^{\vee}(\xi', \xi_3)\,d\xi_3\right)^{-1}\cdot({}^1/_4I-S^{\vee 2}(\xi')) \tag{3.1}$$

где символ $S^{\vee}$ представляет собой преобразование Фурье по ξ' сужения на π потенциала (2.5). С введением оператора p_{Ω} сужения на область трещины искомое псевдодифференциальное уравнение запишется в виде

$$\mathbf{t}_0(\mathbf{x}')=p_{\Omega}\int_{R^2}G^{\vee}(\xi')\cdot\mathbf{b}^{\vee}(\xi')\exp(2\pi i\mathbf{x}'\cdot\xi')\,d\xi' \tag{3.2}$$

здесь $\mathbf{t}_0$ — напряжения, действующие на берегах трещины. Эквивалентное уравнение в пространстве изображений имеет вид (φ — характеристическая функция области Ω):

$$\mathbf{t}_0^{\vee}(\xi')=\int_{\pi}\varphi^{\vee}(\xi'-\eta')G^{\vee}(\eta')\cdot\mathbf{b}^{\vee}(\eta')d\eta' \qquad (3.3)$$

Существенной особенностью уравнения в форме (3.3) является то обстоятельство, что для его получения нет необходимости определять собственно фундаментальное решение. Формула (3.1) показывает, что для определения символа $G^{\vee}$ требуется знание лишь символа $E^{\vee}$.

Предложение 1. Матричный символ $G^{\vee}$ а) симметричен; б) однороден по $|\xi'|$ степени 1; в) эллиптичен.

Доказательство первых двух пунктов вытекает из определения символа $G^{\vee}$. Эллиптичность $G^{\vee}$ следует из эллиптичности оператора A.

Следствие 1 (формула Бетти для напряжений и скачков смещений). Пусть $\mathbf{t}_0^{(i)}$, $i=1, 2$ — две системы нагрузок на соответствующем берегу трещины, а $\mathbf{b}^{(i)}$, $i=1, 2$ — соответствующие этим нагрузкам скачки смещений, тогда

$$\int_{\Omega}\mathbf{t}_0^{(1)}\cdot\mathbf{b}^{(2)}\,dx'=\int_{\Omega}\mathbf{t}_0^{(2)}\cdot\mathbf{b}^{(1)}\,dx' \qquad (3.4)$$

Доказательство. Используя равенство Парсеваля, достаточно установить

$$\int_{R^2}\mathbf{t}_0^{(1)\vee}\cdot\overline{\mathbf{b}^{(2)\vee}}\,d\xi'=\int_{R^2}\mathbf{t}_0^{(2)\vee}\cdot\overline{\mathbf{b}^{(1)\vee}}\,d\xi' \qquad (3.5)$$

причем обе части (3.5) действительны. В силу того, что $\operatorname{supp}\mathbf{b}^{(i)}\subset\overline{\Omega}$, $i=1, 2$ равенство (3.5) эквивалентно

$$\int_{R^2}\mathbf{t}^{(1)\vee}\cdot\overline{\mathbf{b}^{(2)\vee}}\,d\xi'=\int_{R^2}\mathbf{t}^{(2)\vee}\cdot\overline{\mathbf{b}^{(1)\vee}}\,d\xi' \qquad (3.6)$$

Подстановка в (3.6) выражения для $\mathbf{t}^{(i)\vee}$ по формуле (3.1) и переход к комплексно сопряженному в одной из частей (3.6) завершает доказательство.

Следствие 2 (теорема о положительности работы для напряжений на берегах трещины):

$$\int_{\Omega}\mathbf{t}_0\cdot\mathbf{b}\,dx'>0 \qquad (\mathbf{t}_0\neq0) \qquad (3.7)$$

Доказательство вытекает из равенства Парсеваля, примененного к левой части неравенства (3.7):

$$\int_{R^2}\mathbf{t}_0^{\vee}\cdot\overline{\mathbf{b}^{\vee}}\,d\xi'=\int_{R^2}\mathbf{t}^{\vee}\cdot\overline{\mathbf{b}^{\vee}}\,d\xi'=\int_{R^2}\mathbf{b}^{\vee}(\xi')\cdot G^{\vee}(\xi')\cdot\overline{\mathbf{b}^{\vee}(\xi')}\,d\xi' \qquad (3.8)$$

и эллиптичности символа $G^{\vee}$.

Следствие 3 (теорема о коэрцитивности). Квадратичный функционал

$$F(\mathbf{b})=\int_{R^2}\mathbf{b}^{\vee}(\xi')\cdot G^{\vee}(\xi')\cdot\overline{\mathbf{b}^{\vee}(\xi')}\,d\xi' \qquad (3.9)$$

коэрцитивен в $H_{1/2}(\Omega, R^3)$, где топология пространства $H_{1/2}$ определяется нормой

$$\|\varphi\|^2_{H_{1/2}}=\int_{R^2}(1+|\xi'|^2)^{1/2}|\varphi^{\vee}(\xi')|^2\,d\xi'$$

Доказательство неравенства коэрцитивности $F(\mathbf{b})\geqslant c\|b\|^2_{H_{1/2}}$ $(c>0)$ вытекает из неравенства Харди — Литтлвуда — Соболева в теореме о дробном дифференцировании [12], неравенства Гельдера и теоремы Планшереля, обеспечивающих выполнение следующей цепочки неравенств

$$
\begin{gathered}
\|b\|_{L^2}\left(\int|\xi'|\,|b^{\vee}(\xi')|^2\,d\xi'\right)^{1/2}\geqslant \operatorname{mes}(\Omega)^{1/2-1/p}\|b\|_{L^p}\times \\
\times\left(\int|\xi'|\,|b^{\vee}(\xi')|^2\,d\xi'\right)^{1/2}\geqslant A\|I_{1/2}(b)\|_{L^2}\left(\int|\xi'|\,|b^{\vee}(\xi')|^2\,d\xi'\right)^{1/2}= \\
=A\left(\int|\xi'|^{-1}|b^{\vee}(\xi')|^2\,d\xi'\right)^{1/2}\left(\int|\xi'|\,|b^{\vee}(\xi')|^2\,d\xi'\right)^{1/2}\geqslant A\|b\|_{L^2}^2
\end{gathered}
\tag{3.10}
$$

где показатель $p=4/3$, а через $I_{1/2}(b)$ обозначен соответствующий потенциал Рисса.

В теории контактных задач для изотропного упругого полупространства формула, аналогичная (3.4) получена В. И. Моссаковским [13].

Из предложения 1 и его следствий вытекают следующие свойства решений:

1°. Допустим, что для трещины, занимающей область Ω известны решения $\mathbf{b}=\mathbf{B}_k(\mathbf{x}')$, $k=1, 2, \ldots$ при полиномиальных нагрузках $\mathbf{t}_0=\mathbf{T}_k(\mathbf{x}')$, $k=1, 2, \ldots$, где k — степень полинома $\mathbf{T}_k$. Формула (3.4) показывает, что решение исследуемой задачи при заданной на берегах трещины произвольной нагрузке $\mathbf{t}_0$ сводится к проблеме моментов для исследуемого скачка смещений.

2°. Неравенство (3.7) показывает, что нормальное давление $p>0$, $\mathbf{t}_0=(0, 0, p)$ при любой анизотропии упругой среды приводит к раскрытию трещины.

3°. Коэрцитивность функционала (3.9) обеспечивает существование и единственность решения вариационной задачи

$$
\inf(F(\mathbf{b})-2l(\mathbf{b})),\qquad \mathbf{b}\in H_{1/2}(\Omega,R^3),\qquad l(\mathbf{b})=\int_{\Omega}\mathbf{t}_0\cdot\mathbf{b}\,dx' \tag{3.11}
$$

Нетрудно видеть, что решение вариационной задачи (3.11) является полуслабым в $H_{1/2}(\Omega,\ R^3)$ решением псевдодифференциального уравнения (3.2).

Автор выражает благодарность Р. В. Гольдштейну за консультации и обсуждение результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Willis J. R.* Hertzian contact of anisotropic bodies // J. Mech. Phys. Solids. 1966. V. 14. N. 3. P. 163–176.
2. *Willis J. R.* Boussinesq problems for an anisotropic halfspace // J. Mech. Phys. Solids. 1967. V. 15. N. 5. P. 331–339.
3. *Willis J. R.* The stress field around an elliptic crack in an anisotropic elastic medium // Int. J. Eng. Sci. 1968. V. 6. N. 5. P. 253–263.
4. *Willis J. R.* Fracture mechanics of interfacial cracks // J. Mech. Phys. Solids. 1971. V. 19. N. 6. P. 353–368.
5. *Willis J. R.* A penny – shaped crack on an interface // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1972. V. 25. N. 3. P. 367–385.
6. *Андрейкив А. Е.* Пространственные задачи теории трещин. Киев: Наукова думка, 1982, 348 с.
7. *Гольдштейн Р. В., Ентов В. М.* Вариационные оценки для коэффициента интенсивности напряжений на контуре плоской трещины нормального разрыва // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 3. С. 59–64.
8. *Гольдштейн Р. В.* К вопросу о применении метода граничных интегральных уравнений для решения задач механики сплошных сред // В кн.: Метод граничных интегральных уравнений. Механика. Новое в зарубежной науке. Вып. 15. М.: Мир, 1978, с. 183–209.
9. *Гольдштейн Р. В., Ентов В. М., Зазовский А. Ф.* Решение смешанных краевых задач прямым вариационным методом // В сб.: Численные методы механики сплошной среды. 1976. Т. 7. № 5. С. 5–13.
10. *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа. М.: ИЛ, 1957, 256 с.
11. *Бурчуладзе Т. В., Гегелиа Т. Г.* Развитие метода потенциала в теории упругости // Тр. Тбил. матем. ин-та, 1985. Т. 79. С. 5–226.
12. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973, 342 с.
13. *Моссаковский В. И.* Применение теоремы взаимности к определению суммарных сил и моментов в пространственных контактных задачах // ПММ. 1953. Т. 17. Вып. 4. С. 477–482.

Москва

Поступила в редакцию
1.VIII.1988