

УДК 539.3

В. В. ВАСИЛЬЕВ

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТВЕРДЫХ ТЕЛ И НЕКОТОРЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ

Обсуждается пространство, моделирующее сплошную среду и обладающее кривизной, порождаемой действующими в среде напряжениями. Установлены соотношения, связывающие компоненты тензоров напряжений и кривизны и переходящие в предельном случае евклидова пространства в соотношения, связывающие напряжения с тремя функциями напряжений классической теории упругости. Получены равенства, обобщающие формулы Максвелла для функций напряжений на случай ортогональных криволинейных координат. Предлагается физическая интерпретация модельного риманова пространства, существующего в реальном евклидовом пространстве. Рассмотрено два простейших примера, соответствующих полярно симметричному и одноосному напряженному состоянию. Предполагается использовать метрические свойства построенного риманова пространства для оптимизации формы и параметров материала упругих тел.

1. Рассмотрим некоторую однородную и сплошную среду, обладающую в исходном состоянии евклидовой метрикой, и предположим, что в результате внешнего силового воздействия в этой среде возникает система напряжений, удовлетворяющая уравнениям равновесия

$$(H_2 H_3 \sigma_1)_{,1} - H_3 H_{2,1} \sigma_2 - H_2 H_{3,1} \sigma_3 + (H_1 H_3 \tau_{21})_{,2} + H_3 H_{1,2} \tau_{12} + (H_1 H_2 \tau_{31})_{,3} + H_2 H_{1,3} \tau_{13} = 0 \quad (1, 2, 3) \quad (1.1)$$

где H_i — коэффициенты Ламе пространства, отнесенного к ортогональным криволинейным координатам x_i ($i=1, 2, 3$), нижний индекс после запятой означает дифференцирование по соответствующей координате, а символ $(1, 2, 3)$ — круговую перестановку индексов.

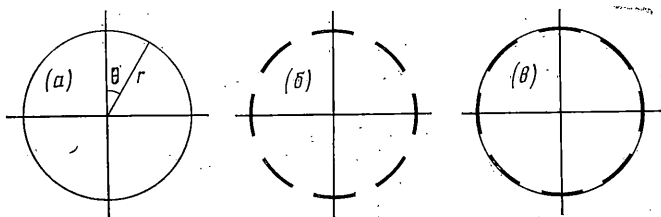
Предположим, что пространство, моделирующее среду, в которой действуют напряжения σ_i, τ_{ij} , уже не является евклидовым, т. е. что поле напряжений вызывает искривление пространства и в этом отношении его воздействие аналогично воздействию гравитационного поля в релятивистской теории гравитации [1]. Для того, чтобы получить соответствующие выражения для составляющих тензора кривизны такого пространства, достаточно воспользоваться математическим аппаратом общей теории относительности [2]. Как известно, компоненты тензора энергии — импульса T_{ij} , которые в рассматриваемой задаче совпадают с точностью до знака с напряжениями, связаны уравнениями закона сохранения, аналогичными уравнениям (1.1) [3]. Эти уравнения тождественно удовлетворяются линейной комбинацией метрического тензора g_{ij} и тензора Эйнштейна $G_{ij} = R_{ij} - g_{ij}R/2$ (R_{ij} — тензор Риччи, $R = g^{ij}R_{ij}$ — инвариант кривизны) в соответствии с формулой $\kappa T_{ij} = \lambda g_{ij} - G_{ij}$, включающей два постоянных коэффициента κ и λ .

Учитывая, что уравнения (1.1) содержат физические компоненты тензора напряжений, после некоторых преобразований получим (p и c — некоторые постоянные коэффициенты):

$$\sigma_1 = p - c H_1^{-2} (R_{11} - \frac{1}{2} R H_1^2) \quad (1, 2, 3) \quad (1.2)$$

$$\tau_{12} = -c (H_1 H_2)^{-1} R_{12} \quad (1, 2, 3)$$

$$R_{11} = H_1^{-1} (H_2^{-1} r_{12} + H_3^{-1} r_{13}) \quad (1, 2, 3) \quad (1.3)$$



Фиг. 1

$$R_{12}=R_{21}=H_3^{-1}(H_{3,12}+H_1^{-1}H_{1,2}H_{3,1}-H_2^{-1}H_{2,1}H_{3,2}) \quad (1, 2, 3)$$

$$r_{12}=r_{21}=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{H_{2,1}}{H_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{H_{1,2}}{H_2}\right)+\frac{1}{H_3^2}H_{1,3}H_{2,3} \quad (1, 2, 3)$$

Инвариант кривизны $R=R_{11}/H_1^2+R_{22}/H_2^2+R_{33}/H_3^2$ может быть выражен с помощью равенств (1.2) через первый инвариант тензора напряжений: $cR=2(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3-3p)$. После соответствующей подстановки равенства (1.2) принимают вид

$$\sigma_1=p+\frac{cr_{23}}{H_2H_3}, \quad \tau_{12}=-\frac{cR_{12}}{H_1H_2} \quad (1, 2, 3) \quad (1.4)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что напряжения (1.4) тождественно удовлетворяют уравнениям равновесия (1.1).

Прежде чем перейти к анализу полученных результатов, остановимся на одной, существенной для дальнейшего, интерпретации риманова пространства, определяемого метрическими коэффициентами H_i . Как известно, риманово пространство может содержаться в евклидовом, если последнее имеет большее число измерений. В частности, для m -мерного риманова пространства размерность вмещающего его евклидова пространства в общем случае определяется равенством [4] $n=m(m+1)/2$, т. е. $n=3$ при $m=2$ и $n=6$ при $m=3$. В качестве иллюстрации рассмотрим двумерную метрическую форму в полярных координатах $ds^2=dr^2+k^2r^2d\theta^2$ (фиг. 1). Длина окружности радиуса r оказывается равной $2\pi kr$. При $k=1$ имеем евклидову плоскость, а случаи, соответствующие $k \neq 1$, могут быть, как известно, реализованы путем соответствующей деформации этой плоскости. В результате рассматриваемое двумерное многообразие оказывается поверхностью, содержащейся в трехмерном евклидовом пространстве. Применительно к трехмерному риманову пространству, моделирующему реальную среду, в которой действуют напряжения, такая интерпретация является, очевидно, неприемлемой, так как она требует введения шестимерного вмещающего евклидова пространства. Однако возможна и другая интерпретация, не требующая увеличения размерности пространства, но предполагающая, что оно утрачивает свойства однородности или сплошности. Действительно, предположим, что кривая, показанная на фиг. 1, а, является окружностью радиуса r и лежит в евклидовой плоскости. При этом эта кривая будет непрерывной только при $k=1$. При $k<1$ ее длина будет меньше $2\pi r$ и она будет состоять из отдельных участков (фиг. 1, б), а при $k>1$ эти участки будут накладываться друг на друга (фиг. 1, в). Существенно, что подобным формальным построениям можно поставить в соответствие синтез вполне реальных конструкций. Например, при $k<1$ (фиг. 1, б) рассматриваемая метрическая форма соответствует диску с радиальными разрезами, а при $k>1$ (фиг. 1, в) — диску с радиальными ребрами.

Таким образом, будем считать, что риманово пространство, кривизна которого определяется соотношениями (1.2) — (1.4), может быть материализовано в форме неоднородного или несплошного тела, содержащегося в трехмерном евклидовом пространстве.

2. Рассмотрим соотношения (1.4), связывающие напряжения с порождаемой ими кривизной. Пусть имеет место всестороннее растяжение или

сжатие среды, вызывающее ее равнонапряженное состояние $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=p$, $\tau_{12}=\tau_{13}=\tau_{23}=0$. В этом случае из равенств (1.4) следует, что $r_{12}=r_{13}=r_{23}=0$ и $R_{12}=R_{13}=R_{23}=0$ и согласно соотношениям (1.3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{H_{2,1}}{H_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{H_{1,2}}{H_2} \right) + \frac{1}{H_3^2} H_{1,3} H_{2,3} &= 0 \quad (1, 2, 3) \\ H_{3,12} + \frac{1}{H_1} H_{1,2} H_{3,1} - \frac{1}{H_2} H_{2,1} H_{3,2} &= 0 \quad (1, 2, 3) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Равенства (2.1) являются известными уравнениями Ламе, которым должны удовлетворять метрические коэффициенты евклидова пространства. Таким образом, равнонапряженное состояние среды не вызывает искривления моделирующего ее пространства.

В общем случае напряженного состояния может быть поставлена задача определения метрики риманова пространства, аналогичная основной задаче общей теории относительности, для которой известно решение в линейном приближении. В соответствии с этим решением предположим, что коэффициенты Ламе мало отличаются от соответствующих коэффициентов исходного евклидова пространства, т. е. $H_i = H_i^0 + \varepsilon F_i$, где H_i^0 удовлетворяют уравнениям (2.1), ε — малый диаметр, F_i — некоторые функции. Подставляя H_i в равенства (1.3) и далее в (1.4), осуществляя линеаризацию по параметру ε , учитывая соотношения (2.1) и отбрасывая постоянное слагаемое p , окончательно получим (верхний индекс у H_i^0 опущен)

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\varepsilon \varepsilon}{H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{F_{3,2}}{H_2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{H_{2,3} F_3}{H_3^2} \right) + \frac{H_{2,1}}{H_1^2} F_{3,1} + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{F_{2,3}}{H_3} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{H_{3,2} F_2}{H_2^2} \right) + \frac{H_{3,1}}{H_1^2} F_{2,1} - \frac{2F_1}{H_1^3} H_{2,1} H_{3,1} \right] \quad (1, 2, 3) \\ \tau_{12} &= \frac{\varepsilon \varepsilon}{H_1 H_2 H_3} \left(\frac{F_3}{H_3} H_{3,12} - F_{3,12} - \frac{H_{1,2}}{H_1} F_{3,1} + \frac{H_{2,1}}{H_2} F_{3,2} + \right. \\ &+ \left. \frac{F_1}{H_1^2} H_{1,2} H_{3,1} - \frac{H_{3,1}}{H_1} F_{3,1} - \frac{F_2}{H_2^2} H_{2,1} H_{3,2} + \frac{H_{3,2}}{H_2} F_{2,1} \right) \quad (1, 2, 3) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Напряжения (2.2) тождественно удовлетворяют уравнениям равновесия (1.1), записанным для евклидова пространства, т. е. функции F_i являются функциями напряжений классической теории упругости. В декартовых координатах, т. е. при $H_1=H_2=H_3=1$ из соотношений (2.2) следуют (с точностью до постоянного множителя ε) известные формулы Максвелла

$$\sigma_1 = \varepsilon \varepsilon (F_{3,22} + F_{2,33}), \quad \tau_{12} = -\varepsilon \varepsilon F_{3,12} \quad (1, 2, 3) \quad (2.3)$$

Равенства (2.3) были получены описанным выше способом в [3]. Соотношения (2.2) обобщают их на случай ортогональных криволинейных координат.

Рассмотрим множитель $\varepsilon \varepsilon$, входящий в соотношения (2.2). Эти соотношения были получены в результате линеаризации равенств (1.4) по параметру ε и, следовательно, строго справедливы лишь при $\varepsilon \rightarrow 0$. Поскольку как напряжения, так и функции напряжений, входящие в равенства (2.2), являются конечными, множитель $\varepsilon \varepsilon$ также должен быть конечным, т. е. $\varepsilon \rightarrow \infty$. Таким образом, равенства (1.4) соответствуют классической теории упругости при $\varepsilon \rightarrow \infty$. При этом они содержат неопределенность (так как при $\varepsilon \rightarrow \infty$, $r_{ij} \rightarrow 0$ и $R_{ij} \rightarrow 0$), раскрытие которой приводит к равенствам (2.2), т. е. к соотношениям классической теории упругости.

Рассмотрим теперь общую задачу восстановления метрики по напряжениям, т. е. предположим, что ε является конечной величиной. Сущест-

венной особенностью рассматриваемой задачи, отличающей ее, в частности, от основной задачи общей теории относительности, является то, что напряжения связаны с деформациями среды и должны удовлетворять условиям совместности деформаций. Однако непосредственно записать эти уравнения не представляется возможным. Как известно [5], они обеспечивают сохранение евклидовой метрики среды в процессе ее нагружения, а в рассматриваемой среде это условие не выполняется. Как уже отмечалось выше, интерпретация полученных результатов предполагает в конечном итоге переход к некоторому вмещающему евклидову пространству, в котором окажется возможным ввести вектор перемещения и записать соответствующие геометрические и физические соотношения. Однако для этого необходимо знать коэффициенты Ламе, т. е. те самые функции, которые и следует определить из уравнений (1.4). Таким образом, остается попытаться реализовать широко используемый в общей теории относительности обратный метод решения, предполагающий задание коэффициентов Ламе H_i и последующую физическую интерпретацию получаемого результата. Заметим, что в теории относительности такой интерпретации, как правило, препятствуют условия, накладываемые на знаки плотности среды и собственных значений тензора энергии — импульса T_{ij} . В рассматриваемом случае эти ограничения отсутствуют, но заменяются условиями совместности деформаций, которым должны удовлетворять напряжения.

3. В качестве примера рассмотрим среду, обладающую свойством сферической симметрии. Метрическая форма такой среды может быть записана в следующем общем виде [2]:

$$ds^2 = f^2(r) dr^2 + r^2 (d\varphi^2 + \cos^2 \varphi d\theta^2) \quad (3.1)$$

где r, φ, θ — сферические координаты. Таким образом, $H_1 = f(r)$, $H_2 = r$, $H_3 = r \cos \varphi$ и равенства (1.4) дают

$$\sigma_r = p + \frac{c}{r^2} \left(\frac{1}{f^2} - 1 \right), \quad \sigma_\varphi = \sigma_\theta = \frac{c}{rf} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{f} \right) \quad (3.2)$$

$$\tau_{r\varphi} = \tau_{r\theta} = \tau_{\varphi\theta} = 0$$

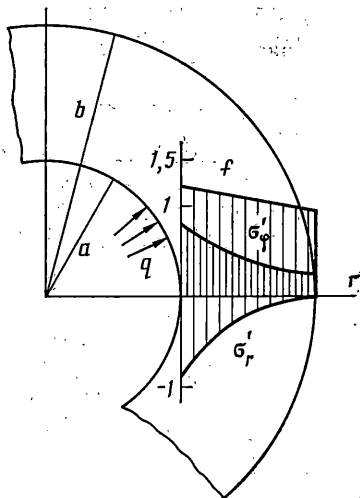
Для определенности рассмотрим полый шар, нагруженный внутренним давлением (фиг. 2). Заметим, что уравнение равновесия (1.1) имеет в этом случае традиционную форму $rd\sigma_r/dr + 2(\sigma_r - \sigma_\varphi) = 0$ и не содержит функции $f(r)$. В связи с этим зададим в (3.2) в качестве напряжений решение соответствующей задачи теории упругости, удовлетворяющее уравнениям равновесия и совместности деформаций

$$\sigma_r = -\frac{qa^3}{b^3 - a^3} \left(\frac{b^3}{r^3} - 1 \right), \quad \sigma_\varphi = \sigma_\theta = \frac{qa^3}{b^3 - a^3} \left(1 + \frac{b^3}{2r^3} \right) \quad (3.3)$$

Из равенств (3.2) при этом получим

$$f = \left(1 - \frac{e}{r} \right)^{-1/2}, \quad p = \frac{qa^3}{b^3 - a^3}, \quad e = \frac{qa^3 b^3}{c(b^3 - a^3)} \quad (3.4)$$

Отметим, что функция f совпадает с точностью до формы коэффициента e с решением Шварцшильда [2] для сферически симметричного поля тяготения. Равенства (3.1) и (3.4) позволяют заключить, что неевклидовость пространства, порождаемая напряжениями (3.3), выражается



Фиг. 2

в «уплотнении» среды в радиальном направлении. Из фиг. 2, на которой показаны зависимости для напряжений $\sigma_r' = \sigma_r/q$, $\sigma_\varphi' = \sigma_\varphi/q$ и функция $f(r)$ ($b/a=2$, $e=0,25a$) следует, что эта функция принимает максимальное значение на внутренней поверхности, где действуют максимальные напряжения.

В качестве второго примера рассмотрим однородное напряженное состояние $\sigma_i = \sigma_i^\circ$, $\tau_{ij} = \tau_{ij}^\circ$ среды, отнесенной в исходном состоянии к декартовым координатам $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$. Функции напряжений, определяемые формулами Максвелла (2.3), имеют вид

$$\begin{aligned} F_1 &= (4c\varepsilon)^{-1} (\sigma_y^\circ z^2 + \sigma_z^\circ y^2 - 4\tau_{yz}^\circ yz) \\ F_2 &= (4c\varepsilon)^{-1} (\sigma_x^\circ z^2 + \sigma_z^\circ x^2 - 4\tau_{xz}^\circ xz) \\ F_3 &= (4c\varepsilon)^{-1} (\sigma_x^\circ y^2 + \sigma_y^\circ x^2 - 4\tau_{xy}^\circ xy) \end{aligned} \quad (3.5)$$

и характеризуют в соответствии с равенством $H_i = 1 + \varepsilon F_i$ отклонение метрики пространства от евклидовой.

В общем случае одноосного растяжения, принимая $\sigma_x^\circ = \sigma = \text{const}$, $\sigma_y^\circ = \sigma_z^\circ = \tau_{xy}^\circ = \tau_{xz}^\circ = \tau_{yz}^\circ = 0$, зададим в соответствии с равенствами (3.5) следующие выражения для метрических коэффициентов соответствующего риманова пространства $H_1 = 1$, $H_2 = H_2(z)$, $H_3 = H_3(y)$. Тогда из формул (1.4) при $p=0$ получим

$$\sigma = -\frac{c}{H_2 H_3} \left(\frac{1}{H_2} \frac{d^2 H_3}{dy^2} + \frac{1}{H_3} \frac{d^2 H_2}{dz^2} \right) \quad (3.6)$$

Поскольку при растяжении в направлении оси x направления y и z также, как и все направления в плоскости $x = \text{const}$, являются равноправными, перейдем к радиальной координате $r^2 = x^2 + y^2$ и положим $H_2 = H_3 = H(r)$. Тогда равенство (3.6) позволяет записать следующее уравнение $cd^2 H/dr^2 = -\sigma H^3$. Решение этого уравнения $H = (2c/\sigma)^{1/2}/r$ обладает особенностью при $r=0$. Интерпретируя, как и ранее, $H(r)$ как некоторую условную плотность материала, можно заключить, что эта плотность стремится к бесконечности на линии параллельной направлению нагружения, т. е. в среде формируется нить или стержень. В случаях двухосного растяжения и чистого сдвига материал сосредотачивается вдоль взаимно ортогональных направлений, совпадающих с траекториями главных напряжений.

Итак, из изложенного выше следует, что напряженное состояние вызывает искривление пространства, моделирующего среду, в которой это состояние возникает при действии внешних нагрузок. Заметим, что этот результат можно рассматривать как чисто формальный, тем более что сами напряжения являются формальными объектами, вводимыми для феноменологического описания взаимодействия между частями твердого тела. Однако вне зависимости от интерпретации обсуждаемых геометрических эффектов они, как это следует из рассмотренных выше примеров, позволяют сформулировать нетрадиционную постановку задачи оптимального проектирования упругого тела как задачи синтеза пространства, соответствующего заданному напряженному состоянию. К сожалению, решение этой задачи связано с большими трудностями, порождаемыми необходимостью учитывать условия совместности упругих деформаций синтезированной среды.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Логунов А. А. Лекции по теории относительности и гравитации. Современный анализ проблемы. М.: Наука, 1987. 272 с.
2. Синг Д. Общая теория относительности. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 423 с.
3. Кильчевский Н. А. Основы тензорного исчисления с приложениями к механике. Киев: Наук. думка, 1972. 148 с.
4. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967. 664 с.
5. Власов В. З. Уравнения неразрывности деформаций в криволинейных координатах // Избр. тр. М.: 1962. Т. 1. 528 с.

Москва

Поступила в редакцию
28.XI.1988