МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 · 1989

УДК 531.76

А. И. ТКАЧЕНКО

ВЫЧИСЛЕНИЕ СКОРОСТИ ПО ИНЕРЦИАЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ В ФОРМЕ ПРИРАЩЕНИЙ КВАЗИКООРДИНАТ

Рассматривается задача вычисления скорости некоторой точки подвижного твердого тела путем интегрирования соответствующих уравнений движения с использованием информации в виде приращений квазикоординат – интегралов от составляющих ускорения упомянутой точки и угловой скорости тела, которому она принадлежит. Изложена методика вывода формул вычисления скорости с шагом, равным четному числу тактов съема первичной информации. Получены конкретные формулы различных порядков точности и указаны возможности их упрощения в зависимости от характера движения. Приведены результаты моделирования алгоритмов вычисления скорости в условиях многочастотного сферического движения твердого тела.

В [1–4] для нахождения скорости предложены формулы невысокого порядка, не удовлетворяющие жестким требованиям к точности в условиях сложных движений основания. Работы [5, 6] содержат методику вывода эффективных алгоритмов вычисления скорости, однако не раскрывают зависимость достижимой точности от структуры формул и объема используемой информации.

1. Постановка задач. На недеформируемом подвижном объекте установлена система инерциальных чувствительных элементов, предназначенная для измерения абсолютной угловой скорости объекта и ускорения некоторой его точки O в проекциях на оси связанного с объектом правого ортогонального трехгранника xyz. Получаемая первичная информация имеет вид приращений квазикоординат – интегралов от координат измеряемых векторов – на малом такте съема h=const. Необходимо, используя указанную первичную информацию, вычислять скорость точки O в проекциях на оси правого ортогонального инерциального трехгранника $\xi\eta\zeta$ путем интегрирования соответствующих уравнений движения при заданных начальных условиях.

Используем уравнения

$$\mathbf{V}(t)=C(t)\mathbf{v}(t),\quad \mathbf{V}^{\cdot}=C\mathbf{a} \tag{1.1}$$

где $\mathbf{V}$ – искомый вектор скорости точки O, заданный своими проекциями на оси ξ, η, ζ; $\mathbf{v}$ – отображение того же вектора на оси x, y, z; $\mathbf{a}(t)$ – вектор ускорения точки O, заданный в системе координат xyz; C – (3×3)-матрица направляющих косинусов, характеризующая ориентацию трехгранника xyz относительно $\xi\eta\zeta$ и удовлетворяющая уравнению

$$C^{\cdot}=C\Omega \tag{1.2}$$

Здесь Ω – кососимметрическая (3×3)-матрица, задающая в системе координат xyz векторное произведение $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{p}=\Omega\mathbf{p}$; $\boldsymbol{\omega}=[\omega_x\omega_y\omega_z]^T$ – вектор абсолютной угловой скорости трехгранника xyz в проекциях на его оси (индекс T означает транспонирование). Из (1.1), (1.2) следует

$$\mathbf{v}^{\cdot}=\mathbf{a}-\Omega\mathbf{v} \tag{1.3}$$

При выводе формул вычисления $\mathbf{V}$ с интервалом дискретности (шагом) H, кратным h, примем начало очередного шага за начальный момент t_0. Так как для преобразования координат не обязательно находить матрицу C (это преобразование может быть выполнено, например, по формуле Родрига [7] с использованием параметров Родрига – Гамильтона, вычисленных с высокой точностью независимо от нахождения $\mathbf{V}$ [8]), то в дальнейшем $C(t)$ рассматривается как символ преобразования координат с использованием значений параметров ориентации трехгранника xyz относительно $\xi\eta\zeta$ в момент t, которые предполагаются известными.

Представим решение уравнения (1.3) при $t=t_н=t_0+H$, найденное по формуле Коши, в первое равенство (1.1):

$$\mathbf{V}(t)=C(t_н)F(t_н,t_0)\left[\mathbf{v}(t_0)+\int_{t_0}^{t_н} F^T(t,t_0)\mathbf{a}\,dt\right] \tag{1.4}$$

$$F^{\cdot}(t,\ t_1)=-\Omega(t)F(t,\ t_1),\quad F(t_1,\ t_1)=E_3 \tag{1.5}$$

Здесь $F(t_2,\ t_1)$ — ортогональная (3×3)-матрица; E — единичная (3×3)-матрица. Примем $H=\tau_1+\tau_2$, $t_0+\tau_1=t_*$. Так как $F(t,\ t_1)=F(t,\ t_2)F(t_2,\ t_1)$, $C(t)=C(t_1)F^T(t,t_1)$, то из (1.1), (1.4) находим

$$\mathbf{V}(t_0+H)=\mathbf{V}(t_0)+C(t_*)\Delta\mathbf{V}$$

$$\Delta\mathbf{V}=F(t_*,t_*-\tau_1)\int_{t_*-\tau_1}^{t_*} F^T(t,t_*-\tau_1)\mathbf{a}\,dt+\int_{t_*}^{t_*+\tau_2} F^T(t,t_*)\mathbf{a}\,dt \tag{1.6}$$

Формула (1.6) может служить основанием для вывода алгоритмов вычисления V, например, при $t_*=t_0$ или $t_*=t_н$. Не останавливаясь на этих алгоритмах, положим в (1.6) $\tau_1=\tau_2=\tau=sh$ $(s=1,\ 2,\ldots)$, $t_*=t_0+H/2$ и получим соответствующие формулы вычисления $\mathbf{V}$.

2. Структура алгоритмов. Отсчитывая такты съема в обоих направлениях от t_*, представим первичную информацию в виде векторов

$$\mathbf{b}_{n+1}=\int_{t_*+nh}^{t_*+(n+1)h}\mathbf{a}\,dt,\qquad \boldsymbol{\theta}_{i+1}=\int_{t_*+ih}^{t_*+(i+1)h}\boldsymbol{\omega}\,dt \tag{2.1}$$

Аппроксимацию выражения (1.6) для $\Delta\mathbf{V}$ с использованием информации (2.1), поступившей на очередном шаге $[t_0,\ t_0+H]$, ищем в виде

$$\Delta\mathbf{V}=\Delta\mathbf{V}_1+\Delta\mathbf{V}_2+\Delta\mathbf{V}_2+\Delta\mathbf{V}_4+\ldots$$

$$\Delta\mathbf{V}_1=\sum_{n=-s}^{s-1}\beta_n\mathbf{b}_n,\qquad \Delta\mathbf{V}_2=\sum_{i,n=-s}^{s-1}\beta_{in}\Theta_{i+1}\mathbf{b}_{n+1}$$

$$\Delta\mathbf{V}_3=\sum_{i,j,n=-s}^{s-1}\beta_{ijn}\Theta_{i+1}\Theta_{j+1}\mathbf{b}_{n+1} \tag{2.2}$$

$$\Delta\mathbf{V}_4=\sum_{i,j,l,n=-s}^{s-1}\beta_{ijln}\Theta_{i+1}\Theta_{j+1}\Theta_{l+1}\mathbf{b}_{n+1}\ldots$$

где Θ_i — кососимметрическая (3×3)-матрица, задающая векторное произведение $\boldsymbol{\theta}_i\times\mathbf{r}=\Theta_i\mathbf{r}$. Коэффициенты β_n, β_{in}, $\beta_{ijn},\ldots$ подлежат определению.

Представим $F(t,\ t_1)$ как матрицант уравнения (1.5) [9]:

$$F(t,t_1)=E-\int_{t_1}^{t}\Omega\,dt+\int_{t_1}^{t}\left(\Omega\int_{t_1}^{t}\Omega\,dt\right)dt-\ldots \tag{2.3}$$

Подставим (2.2), (2.3) соответственно в левую и правую части выражения (1.6) для $\Delta\mathbf{V}$ и приравняем группы членов одинаковой структуры

$$\sum_{n=-s}^{s-1}\beta_n\mathbf{b}_{n+1}=\int_{t_*-\tau}^{t_*+\tau}\mathbf{a}\,dt \tag{2.4}$$

$$\sum_{i,n=-s}^{s-1} \beta_{in}\Theta_{i+1}\mathbf{b}_{n+1} = \int_{t_*-\tau}^{t_*}\left(\int_{t_*-\tau}^{t}\Omega\,dt\right)\mathbf{a}\,dt - \int_{t_*-\tau}^{t_*}\Omega\,dt\int_{t_*-\tau}^{t_*}\mathbf{a}\,dt + \int_{t_*}^{t_*+\tau}\left(\int_{t_*}^{t}\Omega\,dt\right)\mathbf{a}\,dt \tag{2.5}$$

$$\sum_{i,j,n=-s}^{s-1} \beta_{ijn}\Theta_{i+1}\Theta_{j+1}\mathbf{b}_{n+1} = \int_{t_*-\tau}^{t_*}\left(\int_{t_*-\tau}^{t}\left(\int_{t_*-\tau}^{t}\Omega\,dt\right)\Omega\,dt\right)\mathbf{a}\,dt -$$

$$-\int_{t_*-\tau}^{t_*}\Omega\,dt\int_{t_*-\tau}^{t_*}\left(\int_{t_*-\tau}^{t}\Omega\,dt\right)\mathbf{a}\,dt + \int_{t_*-\tau}^{t_*}\Omega\left(\int_{t_*-\tau}^{t}\Omega\,dt\right)dt\int_{t_*-\tau}^{t_*}\mathbf{a}\,dt +$$

$$+\int_{t_*}^{t_*+\tau}\left(\int_{t_*}^{t}\left(\int_{t_*}^{t}\Omega\,dt\right)\Omega\,dt\right)\mathbf{a}\,dt\ldots \tag{2.6}$$

Из (2.4) сразу следует

$$\beta_n = 1, \qquad \Delta\mathbf{V}_1 = \sum_{n=-s}^{s-1} \mathbf{b}_{n+1}$$

Каждая из систем коэффициентов β_{in}, $\beta_{ijn}, \ldots$ находится независимо от остальных путем представления обеих частей уравнений типа (2.5), (2.6) в виде рядов по степеням h и приравнивания членов низших степеней. Считаем, что при конкретном выборе коэффициентов β_{in}, $\beta_{ijn}, \ldots$ выражения $\Delta\mathbf{V}_2$, $\Delta\mathbf{V}_3, \ldots$ имеют порядок точности соответственно p_2, $p_3, \ldots$ если при этом невязки в (2.5), (2.6) и других соотношениях этого типа являются величинами порядков малости p_2+1, $p_3+1\ldots$ относительно h. Формула (2.2) в целом имеет порядок p, если ошибка аппроксимации $\Delta\mathbf{V}$ на шаге есть величина порядка h^{p+1}, т. е. $p_2=p_3=\ldots=p$. Если известно, что характерные значения (например, амплитуды) производных от $\boldsymbol{\omega}$, а существенно уменьшаются с понижением порядка производных, то для упрощения формул (2.2) без заметного снижения точности можно выбирать коэффициеты, ограничиваясь требованием $p_2\geqslant p_3\geqslant p_4\ldots$ при фиксированном p_2.

Для получения формулы (2.2) порядка p примем, что функции $\Omega(t)$, $\mathbf{a}(t)$ непрерывно $(p+1)$ раз дифференцируемы при $t_0<t<t_0+H$, и представим их, пренебрегая остаточными членами порядка h^{p+2}, в виде

$$\Omega(t) = \sum_{m=0}^{p+1}\frac{\Omega_*^{(m)}}{m!}(t-t_*)^m, \qquad \mathbf{a}(t) = \sum_{k=0}^{p+1}\frac{\mathbf{a}_*^{(k)}}{k!}(t-t_*)^k \tag{2.7}$$

Здесь $\mathbf{a}_*^{(k)} = \mathbf{a}^{(k)}(t_*)$, $\Omega_*^{(m)} = \Omega^{(m)}(t_*)$, $t_*-\tau<t\leqslant t_*+\tau$. Из (2.1), (2.7) находим

$$\Theta_{i+1} = \sum_{m=0}^{p+1}\frac{\Omega_*^{(m)}}{(m+1)!}\psi_i(m)h^{m+1}, \qquad \mathbf{b}_{n+1} = \sum_{k=0}^{p+1}\frac{\mathbf{a}_*^{(k)}}{(k+1)!}\psi_i(k)h^{k+1} \tag{2.8}$$

где $\psi_j(q)=(j+1)^{q+1}-j^{q+1}$. Подставив выражения (2.8), (2.7) соответственно в левую и правую части формулы (2.5) и группируя члены, содержащие $\Omega_*^{(m)}\mathbf{a}_*^{(k)}h^{m+k+2}$ $(0\leqslant m+k+2\leqslant p_2)$, получим

$$\sum_{i,n=-s}^{s-1}\varphi_{in}(m,k)\beta_{in} = [1-(-1)^{m+k+2}]\frac{k+1}{m+k+2}s^{m+k+2}$$

$$\varphi_{in}(m,k) = \psi_i(m)\psi_n(k) \qquad (0\leqslant m+k\leqslant p_2-2) \tag{2.9}$$

Максимально возможный порядок p для заданного s равен наибольшему значению $m+k+2$, при котором уравнения (2.9) совместны. Подставим

(2.7), (2.8) в (2.6) и объединим коэффициенты членов, содержащих $\Omega_*^{(m)}\Omega_*^{(q)}\mathbf{a}_*^{(k)}h^{m+q+k+3}$:

$$\sum_{i,j,n=-s}^{s-1}\chi_{ijn}(m,q,k)\beta_{ijn}=\frac{[1-(-1)^{m+q+k+3}](q+1)(k+1)}{(m+q+2)(m+q+k+3)}s^{m+q+k+3}$$

$$\chi_{ijn}(m,q,k)=\psi_i(m)\psi_j(q)\psi_n(k)\qquad(0\leqslant m+q+k+3\leqslant p_3-3)\tag{2.10}$$

Аналогичным образом получается система уравнений для β_{ijln}:

$$\sum_{i,j,l,n=-s}^{s-1}\varkappa_{ijln}(m,q,r,k)\beta_{ijln}=$$

$$=\frac{[1-(-1)^{m+q+r+k+4}](q+1)(r+1)(k+1)}{(m+q+2)(m+q+r+3)(m+q+r+k+4)}s^{m+q+r+k+4}$$

$$\varkappa_{ijln}(m,q,r,k)=\chi_{ijl}(m,q,r)\psi_n(k)\qquad(0\leqslant m+q+r+k\leqslant p_4-4)\tag{2.11}$$

Общий вид уравнений для коэффициентов $\beta_{ij\ldots n}$ очевиден.

3. Упрощение уравнений для коэффициентов. Так как $\psi_{-j-1}(q)=(-1)^q\psi_j(q)$, то (2.9) преобразуется к виду

$$\sum_{i,n=0}^{s-1}\varphi_{in}(m,k)[\beta_{in}+(-1)^m\beta_{-i-1,n}+(-1)^k\beta_{i,-n-1}+(-1)^{m+k}\beta_{-i-1,-n-1}]=$$

$$=\frac{[1+(-1)^{m+k+1}](k+1)}{m+k+2}s^{m+k+2}\tag{3.1}$$

Дополнительное ограничение

$$\beta_{-i-1,-n-1}=-\beta_{in}\qquad(i,n=-s,\ldots,s-1)\tag{3.2}$$

обеспечивает выполнение уравнений (3.1) при всех четных значениях $m+k$. При нечетных $m+k$ из (3.1), (3.2) следует

$$\sum_{i,n=0}^{s-1}\varphi_{in}(m,k)[\beta_{in}+(-1)^m\beta_{-i-1,n}]=\frac{k+1}{m+k+2}s^{m+k+2}\qquad(1\leqslant m+k\leqslant p_2-3)\tag{3.3}$$

Здесь учтено, что условие (3.2) обеспечивает четный порядок p_2. Можно показать, что при $s>1$ уравнения (3.3) имеют решение, удовлетворяющее соотношениям $\beta_{in}={}^1/_2+\mu_{in}$, $\mu_{ni}=-\mu_{in}$; $\beta_{-i-1,n}=\beta_{-n-1,i}$ $(0\leqslant i,n\leqslant s-1)$.

Невязка δV_2 — разность левой и правой частей (2.5) — при выборе β_{in} из условий (3.2), (3.3) оценивается выражением

$$\delta V_2=2h^{p+1}\sum_{m=0}^{p-1}\Big\{\sum_{i,n=0}^{s-1}\varphi_{in}(m,p-m-1)[\beta_{in}-(-1)^m\beta_{-i-1,n}]-$$

$$-\frac{p-m}{p+1}s^{p+1}\Big\}\frac{\Omega^{(m)}\mathbf{a}^{(p-m-1)}}{(m+1)!(p-m)!}\tag{3.4}$$

Уравнения (2.10), дополненные ограничением

$$\beta_{-i-1,-j-1,-n-1}=\beta_{ijn}\qquad(i,j,n=-s,\ldots,s-1)\tag{3.5}$$

при нечетных значениях $m+q+k$ выполняются автоматически, а при четных приводятся к виду

$$\sum_{i,j,n=0}^{s-1}\chi_{ijn}(m,q,k)[\beta_{ijn}+(-1)^m\beta_{-i-1,jn}+(-1)^q\beta_{i,-j-1,n}+(-1)^k\beta_{ij,-n-1}]=$$

$$=\frac{(q+1)(k+1)}{(m+q+2)(m+q+k+3)}s^{m+q+k+3}\qquad(0\leqslant m+q+k\leqslant p_3-4)\tag{3.6}$$

Уравнения (2.11) при всех четных $m+q+r+k$ удовлетворяются заданием условия $\beta_{-i-1,\,-j-1,\,-l-1,\,-n-1}=-\beta_{ijln}$ $(i,\ j,\ l,\ n=-s,\ldots,s-1)$, а при нечетных $m+q+r+k$ упрощаются переходом к суммированию по всем индексам от 0 до $s-1$. Результат ввиду его громоздкости представим схематически:

$$\sum_{i,j,l,n=0}^{s-1} \varkappa_{ijln}(m,q,r,k)\,[\beta_{ijln}+(-1)^m\beta_{-i-1,jln}+\ldots+(-1)^{m+k}\beta_{-i-1,jl,-n-1}]=$$

$$=\frac{(q+1)(r+1)(k+1)s^{m+q+r+k+4}}{(m+q+2)\ldots(m+q+r+k+4)}\qquad (1\leqslant m+q+r+k\leqslant p_4-5)\qquad (3.7)$$

4. Примеры алгоритмов вычисления скорости. Получим формулу (2.2) максимального четного порядка при $s=1$ $(H=2h)$. Система (2.3) при $m+k=1$ принимает вид

$$\begin{aligned}&\beta_{00}-\beta_{-1,\,0}={}^1/_3\qquad (m=1,\ k=0)\\ &\beta_{00}+\beta_{-1,\,0}={}^2/_3\qquad (m=0,\ k=1)\end{aligned}\qquad (4.1)$$

и имеет единственное решение $\beta_{00}={}^1/_2$, $\beta_{-1,\,0}={}^1/_6$, которому соответствует невязка (3.4):

$$\delta\mathbf{V}_2={}^1/_{90}[\Omega^{\cdot\cdot\cdot}\mathbf{a}-\Omega\mathbf{a}^{\cdot\cdot\cdot}+4(\Omega^{\cdot\cdot}\mathbf{a}^{\cdot}-\Omega^{\cdot}\mathbf{a}^{\cdot\cdot})]h^5$$

Система (4.1), дополненная уравнениями (3.3) при $m+k=3$, несовместна, поэтому максимальный порядок формулы (2.2) при $s=1$ равен 4. Уравнение (3.6) при $s=1$, $m+q+k=0$ записывается в виде $\beta_{000}+\beta_{-1,\,00}+\beta_{0,\,-1,\,0}+$ $+\beta_{00,\,-1}={}^1/_6$.

Учитывая (3.5), примем $\beta_{ijn}={}^1/_{24}$ $(i,\ j,\ n=-1,0)$. Положив $\Delta V_4=0$ (это вносит ошибку порядка h^5), представим искомую формулу порядка 4 в удобном для реализации виде

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{V}=\mathbf{b}_0+\mathbf{b}_1+{}^1/_6(\Theta_1-\Theta_0)(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_0)+\\ +{}^1/_3(\Theta_1+\Theta_0)[\mathbf{b}_1-\mathbf{b}_0+{}^1/_8(\Theta_1+\Theta_0)(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_0)]\end{aligned}\qquad (4.2)$$

При $\beta_{ijn}=0$ получается упрощенная формула $(p_2=4,\ p_3=3)$:

$$\Delta\mathbf{V}=\mathbf{b}_0+\mathbf{b}_1+{}^1/_6(\Theta_1-\Theta_0)(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_0)+{}^1/_3(\Theta_1+\Theta_0)(\mathbf{b}_1-\mathbf{b}_0)\qquad (4.3)$$

При $s=2$ максимальный порядок формулы (2.2) равен 6. Система (3.3) при $s=2$, $p_2=6$ содержит шесть уравнений и имеет однопараметрическое семейство решений

$$\beta_{00}=\beta_{11}={}^1/_2,\qquad \beta_{01}={}^{11}/_9+\mu,\qquad \beta_{10}=-{}^2/_9-\mu$$

$$\beta_{-2,1}=\mu,\qquad \beta_{-1,0}={}^1/_{45}+3\mu,\qquad \beta_{-1,1}=\beta_{-2,0}=-{}^1/_{30}-2\mu$$

Весьма точное и экономичное выражение для ΔV_2 получается при $\mu=-{}^1/_{90}$:

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{V}^{\circ}={}^1/_2\{[\Theta_1+\Theta_2-{}^1/_{45}(\Theta_{-1}+\Theta_0)](\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2)-\\ -[\Theta_{-1}+\Theta_0-{}^1/_{45}(\Theta_1+\Theta_2)](\mathbf{b}_{-1}+\mathbf{b}_0)\}+{}^{32}/_{45}(\Theta_1\mathbf{b}_2-\Theta_2\mathbf{b}_1+\Theta_{-1}\mathbf{b}_0-\Theta_0\mathbf{b}_{-1})\end{aligned}\qquad (4.4)$$

Соответствующая невязка (3.4) имеет вид

$$\Delta\mathbf{V}_2={}^8/_{945}h^7[\Omega^{(5)}\mathbf{a}-\Omega\mathbf{a}^{(5)}+6(\Omega^{(4)}\mathbf{a}^{\cdot}-\Omega^{\cdot}\mathbf{a}^{(4)})+8(\Omega^{\cdot\cdot\cdot}\mathbf{a}^{\cdot\cdot}-\Omega^{\cdot\cdot}\mathbf{a}^{\cdot\cdot\cdot})]$$

Обозначим

$$\begin{aligned}A(\beta_{ijn})&=\beta_{ijn}+\beta_{-i-1,\,jn}+\beta_{i,\,-j-1,\,n}+\beta_{ij,-n-1}\\ B(\beta_{ijn})&=\beta_{ijn}-\beta_{-i-1,\,jn}-\beta_{i,\,-j-1,\,n}+\beta_{ij,\,-n-1}\\ C(\beta_{ijn})&=\beta_{ijn}-\beta_{-i-1,\,jn}+\beta_{i,\,-j-1,\,n}-\beta_{ij,\,n-1}\\ D(\beta_{ijn})&=\beta_{ijn}+\beta_{-i-1,\,jn}-\beta_{ij,\,-n-1}-\beta_{ij,\,-n-1}\qquad (i,\ j,\ n=0,\ 1)\end{aligned}$$

Система (3.6) при $s=2$, $p_3=6$ записывается в виде

$$A(\beta_{000}+\beta_{100}+\beta_{010}+\beta_{001}+\beta_{110}+\beta_{101}+\beta_{011}+\beta_{111})={}^4/_3$$

$$A[\beta_{000}+\beta_{010}+\beta_{001}+\beta_{011}+7(\beta_{100}+\beta_{110}+\beta_{101}+\beta_{111})]={}^8/_5$$

$$A[\beta_{000}+\beta_{100}+\beta_{001}+\beta_{101}+7(\beta_{010}+\beta_{110}+\beta_{011}+\beta_{111})]={}^{24}/_5$$

$$A[\beta_{000}+\beta_{100}+\beta_{010}+\beta_{110}+7(\beta_{001}+\beta_{101}+\beta_{011}+\beta_{111})]={}^{48}/_5$$
$$B[\beta_{000}+\beta_{001}+3(\beta_{100}+\beta_{101}+\beta_{010}+\beta_{011})+9(\beta_{110}+\beta_{111})]={}^{16}/_5$$
$$C[\beta_{000}+\beta_{010}+3(\beta_{001}+\beta_{011}+\beta_{100}+\beta_{110})+9(\beta_{101}+\beta_{111})]={}^{64}/_{15}$$
$$D[\beta_{000}+\beta_{100}+3(\beta_{001}+\beta_{101}+\beta_{010}+\beta_{110})+9(\beta_{011}+\beta_{111})]={}^{128}/_{15} \qquad (4.5)$$

Ее решение ищем в форме

$$\beta_{ijn}=\alpha_{ijn}+\lambda_{ijn}+\mu_{ijn}+\nu_{ijn} \quad (i, j, n=0, 1)$$

$$\alpha_{ijn}=\alpha_{-i-1,\,jn}=\alpha_{i,\,-j-1,\,n}=\alpha_{ij,\,-n-1}, \quad \lambda_{ijn}=-\lambda_{-i-1,\,jn}=-\lambda_{i,\,-j-1,\,n}=\lambda_{ij,\,-n-1}$$
$$\mu_{ijn}=-\mu_{-i-1,\,jn}=\mu_{i,\,-j-1,\,n}=-\mu_{ij,\,-n-1}, \quad \nu_{ijn}=\nu_{-i-1,\,jn}=-\nu_{i,-j-1,\,n}=-\nu_{ij,\,-n-1} \qquad (4.6)$$

При этом $A(\beta_{ijn})=A(\alpha_{ijn})$, $B(\beta_{ijn})=B(\lambda_{ijn})$, $C(\beta_{ijn})=C(\mu_{ijn})$, $D(\beta_{ijn})=D(\nu_{ijn})$.

Таким образом, находим α_{ijn}, решая первые четыре уравнения (4.5) независимо от остальных, а λ_{ijn}, μ_{ijn}, ν_{ijn} — соответственно из пятого, шестого и седьмого уравнений. Примеры выражений ΔV_3:

$$\Delta\mathbf{V}_3{}^\circ=(\Theta_1+\Theta_0)[{}^8/_{45}(\Theta_1+\Theta_0)+{}^{13}/_{90}(\Theta_2+\Theta_{-1})](\mathbf{b}_2+\mathbf{b}_{-1})+$$
$$+{}^1/_{45}(\Theta_2+\Theta_{-1})(\Theta_1+\Theta_0)[\mathbf{b}_2+\mathbf{b}_{-1}-{}^1/_2(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_0)]+$$
$$+{}^{32}/_{45}(\Theta_1+\Theta_0)(\Theta_1-\Theta_0)(\mathbf{b}_2-\mathbf{b}_{-1})+$$
$$+(\Theta_1-\Theta_0)[{}^{36}/_{45}(\Theta_1-\Theta_0)(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_0)+{}^{16}/_{45}(\Theta_1+\Theta_0)(\mathbf{b}_2-\mathbf{b}_{-1})]$$
$$\Delta\mathbf{V}_3{}'=[{}^8/_{45}(\Theta_1+\Theta_0)+{}^1/_{90}(\Theta_2+\Theta_{-1})](\Theta_1+\Theta_0)(\mathbf{b}_2+\mathbf{b}_{-1})+$$
$$+{}^1/_{90}(\Theta_1+\Theta_0)(\Theta_2+\Theta_{-1})[14(\mathbf{b}_2+\mathbf{b}_{-1})-(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_0)]+$$
$$+{}^1/_{15}\Theta_+\Theta_-\mathbf{b}_-+{}^1/_{40}\Theta_-{}^2\mathbf{b}_++{}^1/_{30}\Theta_-\Theta_+\mathbf{b}_-$$
$$\Theta_\pm=\Theta_1+\Theta_2\pm\Theta_0\pm\Theta_{-1}, \quad \mathbf{b}_\pm=\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2\pm\mathbf{b}_0\pm\mathbf{b}_{-1} \qquad (4.7)$$

Система (3.7) при $s=2$, $p_4=6$, $m+q+r+k=1$ разделяется на четыре взаимно независимых уравнения с помощью приемов, подобных тем, которые использованы в решении (4.6). Варианты выражений для ΔV_4:

$$\Delta\mathbf{V}_4{}^\circ={}^1/_{15}[(\Theta_1-\Theta_0)(\Theta_1+\Theta_0)^2(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_0)+$$
$$+2(\Theta_1+\Theta_0)(\Theta_1-\Theta_0)(\Theta_1+\Theta_0)(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_0)+$$
$$+3(\Theta_1+\Theta_0)^2(\Theta_1-\Theta_0)(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_0)+4(\Theta_1+\Theta_0)^3(\mathbf{b}_1-\mathbf{b}_0)]$$
$$\Delta V_4{}'={}^1/_{480}(\Theta_-\Theta_+{}^2\mathbf{b}_++2\Theta_+\Theta_-\Theta_+\mathbf{b}_++3\Theta_+{}^2\Theta_-\mathbf{b}_++4\Theta_+{}^3\mathbf{b}_-) \qquad (4.8)$$

В формулу порядка 6 при $s=2$ входит еще выражение типа $\Delta\mathbf{V}_5$, например,

$$\Delta\mathbf{V}_5{}^\circ={}^1/_{1920}\Theta_+{}^4\mathbf{b}_+ \qquad (4.9)$$

Из изложенного получаются следующие разновидности формул (2.2) при $s=2$.

1) Формулы порядка 6. Пример:

$$\Delta\mathbf{V}=\mathbf{b}_++\Delta\mathbf{V}_2{}^\circ+\Delta\mathbf{V}_3{}^\circ+\Delta\mathbf{V}_4{}^\circ+\Delta\mathbf{V}_5{}^\circ \qquad (4.10)$$

Выражения для $\Delta\mathbf{V}_2{}^\circ, \ldots, \Delta\mathbf{V}_5{}^\circ$ даны в (4.4), (4.7), (4.8), (4.9).

2) Упрощенные формулы, в которых $\Delta\mathbf{V}_2$, $\Delta\mathbf{V}_3$ выбраны из условий $p_2=p_3=6$, а $\Delta\mathbf{V}_4=O(h^5)$, $\Delta\mathbf{V}_5=O(h^5)$ не учитываются. Пример:

$$\Delta\mathbf{V}=\mathbf{b}_++\Delta\mathbf{V}_2{}^\circ+\Delta\mathbf{V}_3{}^\circ \qquad (4.11)$$

3) Дальнейшее упрощение — формирование $\Delta\mathbf{V}_2$, $\Delta\mathbf{V}_3$ по условиям $p_2=6$, $p_3=4$. Пример:

$$\Delta\mathbf{V}=b_++\Delta\mathbf{V}_2{}^\circ+{}^1/_{24}\Theta_+{}^2\mathbf{b}_+ \qquad (4.12)$$

5. Результаты моделирования. Моделирование формул вычисления скорости выполнено при законе сферического движения

$$\omega_x=\alpha\Phi^\bullet\sin\Phi, \quad \omega_y=\alpha\Phi^\bullet\cos\Phi, \quad \omega_z=c\Phi^\bullet \qquad (5.1)$$

где α, c — постоянные, $\Phi=\Phi(t)$. Движение (5.1) подобно рассмотренному в [10] случаю интегрируемости кинематических уравнений сферического движения; решение уравнения (1.2) и квадратуры от ω_x, ω_y, ω_z в (2.1)

Таблица 1

i	ν_i	ε_i	i	ν_i	ε_i	i	ν_i	ε_i
1	1,65	—2,36	7	6,74	—4,05	13	0,87	3,17
2	6,62	0,58	8	8,16	3,99	14	10,7	—2,19
3	10,2	—0,46	9	14,2	1,02	15	19,8	3,41
4	4,48	2,10	10	10,4	—6,30	16	3,68	—3,89
5	12,3	—0,94	11	13,4	—1,13	17	3,66	—1,97
6	8,90	—4,32	12	4,06	3,76			

Таблица 2

Φ_i°	(4.3)	(4.2)	(4.12)	(4.11)	(4.10)
0,0174	$4{,}7\cdot10^{-5}$	$3{,}4\cdot10^{-5}$	$2{,}6\cdot10^{-6}$	$1{,}5\cdot10^{-7}$	$4{,}8\cdot10^{-7}$
0,035	$3{,}6\cdot10^{-4}$	$1{,}3\cdot10^{-4}$	$3{,}7\cdot10^{-5}$	$7{,}7\cdot10^{-6}$	$2{,}3\cdot10^{-6}$
0,052	$1{,}3\cdot10^{-3}$	$3{,}0\cdot10^{-4}$	$1{,}7\cdot10^{-4}$	$7{,}3\cdot10^{-5}$	$2{,}8\cdot10^{-5}$

выражаются через элементарные функции аргумента Φ с помощью замены $d\Phi=\Phi^{\cdot}dt$, приводящей случай (5.1) к варианту конического движения. Функция $\Phi(t)$ задавалась в виде

$$\Phi=\sum_{i=1}^{N}\Phi_i^\circ\sin(\nu_i t+\varepsilon_i)$$

В одном из вариантов моделирования полагалось $\alpha=1$, $c=0{,}01$, $N=17$; Φ_i° принимались одинаковыми при $i=1,\ldots,17$. Значения ν_i (в c^{-1}), ε_i приведены в табл. 1.

Ускорение **a** имитировалось как суперпозиция постоянной составляющей $a^\circ=10$ м/с^2, направленной по оси η, и вращательного и центростремительного ускорений точки O, смещенной на расстояние 8 м вдоль оси x относительно центра колебаний по закону (5.1). При нахождении точных значений **V** и квадратур от a использовались формулы Ньютона — Котеса с накопленной ошибкой порядка h^8. Результаты моделирования представлены в табл. 2 в виде значений $\|\delta\mathbf{V}\|/t$, м/с^2 ($\|\delta\mathbf{V}\|$ — евклидова норма накопленной ошибки вычисления **V**; $t=120$ с) для нескольких алгоритмов при различных значениях Φ_i°.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wilcox J. C.* A new algorithm for strapped-down inertial navigation // IEEE Trans. Aerospace and Electronic Syst. 1967. V. AES – 3. N 5. P. 796–802.
2. *Vander Velde W. E., Bentley G. K., Fagan J. H., McDonald W. T.* Onboard computer requirements for navigation of a spinning and maneuvering vehicle // J. Spacecraft and Rockets. 1969. V. 6. N 12. P. 1371–1379.
3. *Ткаченко А. И.* Повышение точности вычисления кинематических параметров // Кибернетика и вычислительная техника. Киев: Наук. думка. 1973. Вып. 19. С. 117–121.
4. *Лебедев Д. В., Панов А. П.* Бесплатформенное инерциальное управление мягкой посадкой на поверхность планеты без атмосферы // Космич. исследования. 1978. Т. 16. № 1. С. 44–53.
5. *Лебедев Д. В.* К управлению поступательно-вращательным движением твердого тела // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 5. С. 745–752.
6. *Лебедев Д. В.* К задаче вычисления параметров движения твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 1. С. 170–172.
7. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз. 1961. 824 с.
8. *Панов А. П.* Методы шестого порядка точности для вычисления координат вектора ориентации по квазикоординатам // Кибернетика и вычислительная техника. Киев: Наук. думка. 1986. Вып. 69. С. 47–52.
9. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука. 1967. 575 с.
10. *Челноков Ю. Н.* Об определении ориентации объекта в параметрах Родрига — Гамильтона по его угловой скорости // Изв. АН СССР. МТТ. 1977. № 3. С. 11–20.

Киев

Поступила в редакцию 8.VII.1987