

УДК 531.8

С. Н. БЫЧВАРОВ, П. К. КОЛЕВ

ДИНАМИКА МАНИПУЛЯЦИОННОГО РОБОТА С УПРУГИМИ ЗВЕНЬЯМИ

В работе исследуется динамика робота в цилиндрических координатах с одной ротационной и двумя трансляционными связями. Совершено механо-математическое моделирование с учетом упругости руки, при плоском движении захвата, моделированного как диск. Дифференциальные уравнения движения интегрируются по методу Боголюбова – Митропольского, причем исследовано взаимодействие между региональным движением руки и колебаниями в системе. Рассмотренные динамические процессы исследованы численно на персональном компьютере.

1. Постановка задачи. Вывод дифференциальных уравнений движения. Обычно манипуляционная система роботов описывается как разомкнутая цепь, состоящая из жестких звеньев, соединенных сочленениями. В типичном случае она состоит только из низших (R -ротационных и P -трансляционных) кинематических пар пятого класса. Движение цепи будем называть региональным, а координаты, которые описывают его, — региональными.

Повышение быстродействия современных роботов и манипуляторов требует более точного динамического исследования. Часть звеньев обладает значительными упругими свойствами, что приводит к существенной разнице между динамической моделью системы твердых тел и реальной манипуляционной системой. В некоторых случаях, особенно при манипулировании с более тяжелыми объектами, вибрации играют значительную роль при формировании закона движения, точности позиционирования и надежности робота. Когда учитывается упругость звеньев, движение цепи описывается как региональными координатами, так и координатами, которые отражают микродинамику в системе. Все эти координаты в механике являются обобщенными.

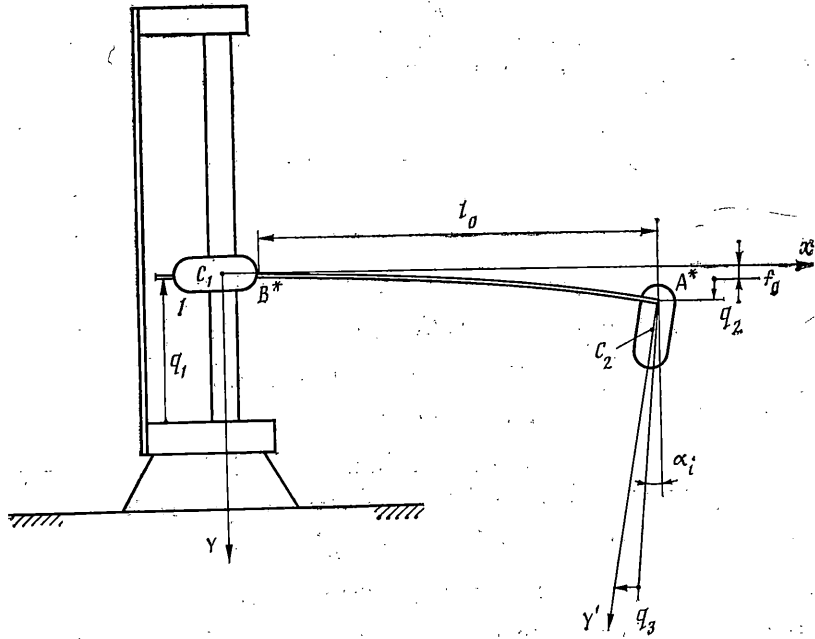
В публикуемой работе исследуется динамика робота RPP структурой, когда он совершает одно из региональных движений. Динамическая модель (фиг. 1) состоит из двух тел 1 и 2 с массами m_1 и m_2 , жестко связанных между собой в точках A^* и B^* с упругим звеном, которое рассматривается как невесомый стержень. С телом 2 связана подвижная координатная система $A^*x'y'$, причем центр масс C_2 лежит на оси y' на расстоянии h . Движение тела 1 описывается координатой q_1 , а тела 2 — линейной q_2 и угловой q_3 координатами. Последние две координаты отсчитываются от положения статического равновесия в относительной системе координат. Манипуляционная система приводится в движение гидравлическим цилиндром, действующим на модуль вертикального скольжения (тело 1) с силой

$$F_D = L - V\dot{q}_1 - Wq_1^2 \quad (1.1)$$

Здесь L , V и W — параметры гидропривода, являющиеся константами. Для кинетической энергии системы имеем

$$T = \frac{1}{2} [(m_1 + m_2) \dot{q}_1^2 + m_2 \dot{q}_2^2 + \rho^2 m_2 \dot{q}_3^2] - m_2 [q_1 \dot{q}_2 - h q_3 (\dot{q}_1 - \dot{q}_2) \sin(q_3 + \alpha)] \quad (1.2)$$

где ρ — радиус инерции тела 2, α — угол статического поворота тела 2.



Фиг. 1

(Фиг. 1). Потенциальная энергия консервативных сил в системе дается выражением

$$\Pi = 1/2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_{ij} q_i q_j + (m_1 + m_2) q_1 \quad (1.3)$$

Коэффициенты влияния α_{ij} ($i, j=1, 2, 3$) определяются по теореме Кастильяно.

Матрица квазиупругих коэффициентов C_{ij} является обратной матрице коэффициентов влияния α_{ij} :

$$\|c_{i,j}^*\| = \|\alpha_{i,j}\|^{-1} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12EJ/l_0^3 & -6EJ/l_0^2 \\ 0 & -6EJ/l_0^2 & 4EJ/l_0 \end{vmatrix} \quad (1.4)$$

где E — модуль Юнга, J — геометрический момент инерции поперечного сечения упругого звена 3. Обобщенные неконсервативные силы определяются по принципу возможных перемещений $Q_1^* = F_D$, $Q_2 = 0$, $Q_3 = 0$. Подставляя найденные выражения и формулы (1.2), (1.3) в уравнения Лагранжа второго рода, получим дифференциальные уравнения движения системы. Разлагая функции $\sin(q_3 + \alpha)$ и $\cos(q_3 + \alpha)$ в степенной ряд и ограничиваясь первыми двумя членами, окончательно находим

$$\begin{aligned} & (m_1 + m_2) q_1'' - m_2 q_2'' + q_3'' m_2 h \sin \alpha = \\ & = m_2 h [q_3 q_3'' \sin \alpha - (q_3 q_3'' + q_3'^2) \cos \alpha] + L - V q_1' - W q_1'^2 - (m_1 + m_2) g \\ & \quad - m_2 q_1'' + m_2 q_2'' - q_3'' m_2 h \sin \alpha + 12EJ l_0^{-3} q_2 - \\ & \quad - 6EJ l_0^{-2} q_3 = (q_3 q_3'' + q_3'^2) m_2 h \cos \alpha - q_3 q_3'^2 m_2 h \sin \alpha \\ & \quad q_1'' m_2 h \sin \alpha - q_2'' m_2 h \sin \alpha + q_3'' m_2 \rho^2 - \\ & \quad - 6EJ l_0^{-2} q_2 + 4EJ l_0^{-1} q_3 = (q_1'' - q_2'') q_3 m_2 h \sin \alpha \end{aligned} \quad (1.5)$$

Если обозначить стационарную скорость регионального движения v_c (по координате q_1), то будем иметь

$$F_c = L - V v_c - W v_c^2 = (m_1 + m_2) g \quad (1.6)$$

Здесь стационарная сила F_c определяется условием, что система идеально твердая. Точное значение v_c можно определить, решая уравнение (1.6).

Прибавляя и вычитая величину F_c в правой части первого уравнения (1.5) и разделив все слагаемые на $(m_1+m_2)=m$, получим систему (ε — безразмерный малый параметр, $m_0=1$ кг):

$$\sum_{j=1}^3 (a_{ij}q_j'' + c_{ij}q_j) = \varepsilon Q_i \quad (i=1, 2, 3) \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1, & a_{12} &= a_{21} = -a_{22} = m_2/m \\ a_{13} &= a_{31} = -a_{23} = -a_{32} = m_2 m^{-1} h \sin \alpha, \\ a_{33} &= m_2 \rho^2 / m, & c_{22} &= 12EJ / (m l_0^3), & c_{33} &= 4EJ / (m l_0) \\ \varepsilon &= m_0 / m, & c_{23} &= c_{32} = -6EJ / (m l_0^2) \end{aligned}$$

Нелинейные возмущения имеют вид

$$\begin{aligned} Q_1 &= [q_3 q_3'' m_2 h \sin \alpha - (q_3 q_3'' + q_3''^2) m_2 h \cos \alpha - V(q_1' - v_c) - W(q_1'' - v_c^2)] / m_0, \\ Q_2 &= [(q_3 q_3'' + q_3''^2) \cos \alpha - q_3 q_3'' \sin \alpha] m_2 h / m_0 \\ Q_3 &= [(q_1'' - q_2'') q_3 m_2 h \cos \alpha] / m_0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

2. Невозмущенное движение. Дифференциальные уравнения невозмущенного движения получим из (1.7), полагая малый параметр $\varepsilon=0$:

$$\sum_{j=1}^3 (a_{ij}q_j'' + c_{ij}q_j) = 0 \quad (i=1, 2, 3) \quad (2.1)$$

Характеристическое уравнение системы (2.1) имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta(r) &= |a_{ij}r^2 - c_{ij}| = r^2 (b_0 r^4 + 2b_1 r^2 + b_2) = 0 \\ b_0 &= m_2^2 m_1 (\rho^2 - h^2 \sin^2 \alpha) / m^3 \\ 2b_1 &= 12EJ m_2 l_0^{-3} m^{-2} [\rho^2 (m_2 / m_1) h^2 \sin^2 \alpha] + \\ &+ 4EJ m_1 l_0^{-4} m_2^{-2} [1 - 3m_2 h \sin \alpha / (l_0 m)], \\ b_2 &= 12E^2 J^2 / (m^2 l_0^4) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь коэффициенты b_0 , b_1 , b_2 и дискриминант $D^* = b_1^2 - b_0 b_2$ положительны, следовательно характеристическое уравнение (2.2) относительно r^2 имеет неположительные действительные корни. Окончательно для собственных значений получим

$$\begin{aligned} r_{1,2} &= \omega_1 = 0 \\ r_{3,4} &= \pm \{ [-b_1 + (b_1^2 - b_0 b_2)^{1/2}] / b_0 \}^{1/2} = \pm i \omega_2 \\ r_{5,6} &= \pm \{ [-b_1 - (b_1^2 - b_0 b_2)^{1/2}] / b_0 \}^{1/2} = \pm i \omega_3, \quad i^2 = -1 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Чтобы найти фундаментальную систему решений, необходимо определить собственные векторы $\|\varphi_j^{(s)}\|$ полученных собственных значений, что связано с поиском нетривиального решения алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^3 (c_{ij} - a_{ij} \omega_s^2) \varphi_j^{(s)} = 0 \quad (2.4)$$

Для $s=1$ получаем систему

$$c_{22} \varphi_2^{(1)} + c_{23} \varphi_3^{(1)} = 0, \quad c_{23} \varphi_2^{(1)} + c_{33} \varphi_3^{(1)} = 0 \quad (2.5)$$

детерминант которой равен b_2 . Следовательно $\varphi_2^{(1)} = \varphi_3^{(1)} = 0$, а $\varphi_1^{(1)}$ произ-

вольно; положим $\varphi_1^{(1)}=1$. Этому корню характеристического уравнения соответствует фундаментальная система решений. (Знак T означает транспонирование.)

$$\kappa_1^{(1)} = \|1, 0, 0\|^T, \quad \kappa_2^{(1)} = \kappa_1^{(1)} t \quad (2.6)$$

Для $s=2, 3$ после решения систем (2.4) находим

$$\varphi_1^{(s)} = [a_{13}\omega_s^2(c_{22}-a_{22}\omega_s^2) - a_{12}\omega_s^2(c_{23}-a_{23}\omega_s^2)] [(a_{22}\omega_s^2 - c_{22}) - a_{12}^2\omega_s^4]^{-1} \quad (2.7)$$

$$\varphi_2^{(s)} = [a_{13}a_{21}\omega_s^4 - (a_{23}\omega_s^2 - c_{23})\omega_s^2] [(a_{22}\omega_s^2 - c_{22})\omega_s^2 - a_{12}^2\omega_s^4]^{-1}, \quad \varphi_3^{(s)} = 1$$

Этим двум корням (ω_2, ω_3) соответствуют следующие фундаментальные системы решений:

$$\kappa_1^{(s)} = \|\varphi_1^{(s)}, \varphi_2^{(s)}, \varphi_3^{(s)}\|^T \cos \omega_s t, \quad \kappa_2^{(s)} = \|\varphi_1^{(s)}, \varphi_2^{(s)}, \varphi_3^{(s)}\|^T \sin \omega_s t \quad (2.8)$$

Общее решение, которое является нулевым решением системы (1.7), получаем из (2.6) и (2.8):

$$q_j^{(0)} = (C_1 + C_2 t) \varphi_j^{(1)} + \sum_{s=2}^3 \varphi_j^{(s)} (C_3^{(s)} \cos \omega_s t + C_4^{(s)} \sin \omega_s t) \quad (j=1, 2, 3) \quad (2.9)$$

При автономных системах можно выбирать $C_1=0$. Система (1.7) описывает движение манипуляционной системы близкое к стационарному, откуда следует, что $C_2=v_c$. Заменяем константы $C_3^{(s)}$ и $C_4^{(s)}$ константами a_s и δ_s . Положим в уравнениях (2.9) $C_3^{(s)} = a_s \cos \delta_s$, $C_4^{(s)} = a_s \sin \delta_s$. Таким образом, окончательно получаем

$$q_j^{(0)} = \varphi_j^{(1)} v_c t + \sum_{s=2}^3 \varphi_j^{(s)} a_s \cos(\omega_s t - \delta_s) \quad (j=1, 2, 3) \quad (2.10)$$

3. Возмущенное движение. С помощью метода Боголюбова — Митропольского найдем одночастотное решение дифференциальных уравнений (1.7) возмущенной системы в виде асимптотического ряда

$$q_j^{(0)} = \varphi_j^{(1)} \Phi(a_s, \psi) + \varphi_j^{(s)} a_s \cos \psi + \varepsilon U_j^{(1)}(a_s, \psi) + \varepsilon^2 U_j^{(2)}(a_s, \psi) + \dots \quad (j=1, 2, 3) \quad (3.1)$$

Здесь индекс s соответствует индексу ненулевой основной частоты. Амплитуда a_s , фаза ψ и функция Φ определяются дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} da_s/dt &= \varepsilon A_1(a_s) + \varepsilon^2 A_2(a_s) + \dots \\ d\psi/dt &= \omega_s + \varepsilon B_1(a_s) + \varepsilon^2 B_2(a_s) + \dots \\ d\Phi/dt &= v_c + \varepsilon D_1(a_s, \psi) + \varepsilon^2 D_2(a_s, \psi) + \dots \end{aligned} \quad (3.2)$$

Функции $U_j^{(i)}(a_s, t)$ периодичны по углу ψ . Задача сводится к определению функций $A_i(a_s)$, $B_i(a_s)$, $D_i(\psi)$ ($i=1, 2, \dots$), $U_j^{(i)}(a_s, \psi)$ ($j=1, 2, 3$) так, чтобы ряд (3.1) удовлетворял системе (3.2). Дифференцируем дважды ряд (3.1) с учетом (3.2) и полученный результат подставим в левые части уравнений (1.7), которые будут разложены по степеням малого параметра ε . После разложения правых частей (1.7) в ряды Тейлора с учетом (3.1), функции возмущения окажутся разложенными по степеням малого параметра. Решение в первом приближении достаточно точно [2], поэтому в дальнейшем остановимся только на нем и не будем писать индекс единица. Для этой цели приравняем коэффициенты при первой степени ε в разложениях левых и правых частей (1.7). В результате получим си-

стему

$$\sum_{j=1}^3 (a_{ij}\omega_s^2 U_{j\psi}'' + c_{ij}U_j) = Q_{0,i} - \omega_s D_\psi' \sum_{j=1}^3 a_{ij}\varphi_j^{(1)} + 2A\omega_s \sin \psi \sum_{j=1}^3 a_{ij}\varphi_j^{(s)} + 2Ba_s\omega_s \cos \psi \sum_{j=1}^3 a_{ij}\varphi_j^{(s)} \quad (i=1, 2, 3) \quad (3.3)$$

Здесь функции Q_{0i} периодичны по ψ и имеют вид отрезков рядов Фурье
 $Q_{0,1} = g_{0,1} + g_{1,1} \cos \psi + h_{1,1} \sin \psi + g_{2,1} \cos 2\psi + g_{3,1} \cos 3\psi$
 $Q_{0,2} = g_{1,2} \cos \psi + g_{2,2} \cos 2\psi + g_{3,2} \cos 3\psi$, $Q_{0,3} = g_{0,3} + g_{2,3} \cos 2\psi$
 где коэффициенты имеют следующие значения:

$$g_{0,1} = -W(\varphi_1^{(s)} a_s \omega_s)^2 / (2m_0), \quad g_{1,1} = m_2 h \sin \alpha a_s^3 \omega_s^2 / (4m_0)$$

$$g_{2,1} = (1/2 W + m_2 h \cos \alpha) a_s^2 \omega_s^2 / m_0$$

$$g_{0,3} = m_2 h \cos \alpha (\varphi_1^{(s)} - \varphi_2^{(s)}) a_s^2 \omega_s^2 / (2m_0)$$

$$g_{2,2} = -m_2 h \cos \alpha a_s^2 \omega_s^2 / m_0, \quad h_{1,1} = (V + 2v_c W) a_s \omega_s \varphi_1^{(s)} / m_0$$

$$g_{1,2} = -g_{1,1} = g_{3,2}, \quad g_{2,3} = g_{0,3}, \quad g_{3,1} = -g_{1,2}$$

Функции $U_j(a_s \psi)$ будем искать в виде

$$U_j = \mu_{1,j}(a_s) \sin \psi + \sum_{k=0}^3 \nu_{k,j}(a_s) \cos k\psi \quad (3.4)$$

Коэффициенты $\mu_{1,j}$, $\nu_{k,j}$, как и $A(a_s)$, $B(a_s)$, $D(a_s, \psi)$ определяем, подставляя U_j и $U_{j\psi}''$ в систему (3.3). Сравнивая выражения перед гармониками $\sin \psi$ и $\cos k\psi$ ($k=0, 1, 2, 3$), получаем приводимые ниже системы алгебраических уравнений. При $k=0$ имеем

$$\sum_{j=1}^3 c_{ij} \nu_{0,j} = g_{0,i} - \omega_s \partial D / \partial \psi \sum_{j=1}^3 a_{ij} \varphi_j^{(1)} \quad (i=1, 2, 3) \quad (3.5)$$

После решения системы находим ($\nu_{0,1}$ — произвольно):

$$\nu_{0,2} = [g_{0,1} a_{21} c_{33} + c_{23} (g_{0,1} a_{31})] (c_{23}^2 - c_{22} c_{33})^{-1} = \nu_{0,2}^{\circ} a_s^2 \quad (3.6)$$

$$\nu_{0,3} = [c_{22} (g_{0,3} - g_{0,1} a_{31}) + g_{0,1} a_{21} c_{23}] (c_{22} c_{33} - c_{23}^2)^{-1} = \nu_{0,3}^{\circ} a_s^2$$

$$\partial D / \partial \psi = -\omega_s W (\varphi_1^{(s)} a_s)^2 / 2m_0 = W^{\circ} a_s^2$$

Здесь W° , $\nu_{0,2}^{\circ}$, $\nu_{0,3}^{\circ}$ означают постоянные составляющие соответствующих коэффициентов.

При $k=1$ имеем

$$\sum_{j=1}^3 (c_{ij} - a_{ij} \omega_s^2) \nu_{1,j} = g_{1,i} + 2B \omega_s a_s \sum_{j=1}^3 a_{ij} \varphi_j^{(s)} \quad (i=1, 2, 3) \quad (3.7)$$

$$\sum_{j=1}^3 (c_{ij} - a_{ij} \omega_s^2) \mu_{1,j} = h_{1,i} + 2A \omega_s \sum_{j=1}^3 a_{ij} \varphi_j^{(s)} \quad (i=1, 2, 3)$$

Детерминанты обеих систем совпадают с характеристическим, ввиду чего они равны нулю. Величины A и B определяем из условия ограничен-

ности колебания системы. Умножим системы (3.7) на $\varphi_i^{(s)}$ и просуммируем

$$\sum_{j=1}^3 \left[\nu_{1,j} \sum_{i=1}^3 (c_{ij} - a_{ij} \omega_s^2) \varphi_i^{(s)} \right] = \sum_{i=1}^3 g_{1,i} \varphi_i^{(s)} + 2B a_s \omega_s M_s \quad (3.8)$$

$$\sum_{j=1}^3 \left[\mu_{1,j} \sum_{i=1}^3 (c_{ij} - a_{ij} \omega_s^2) \varphi_i^{(s)} \right] = \sum_{i=1}^3 h_{1,i} \varphi_i^{(s)} + A \omega_s M_s, \quad M_s = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} \varphi_i^{(s)} \varphi_j^{(s)}$$

Так как левые части уравнений (3.8) равны нулю, для величин A и B находим

$$A = -\lambda a_s, \quad B = \eta \omega_s a_s^2 \quad (3.9)$$

$$\lambda = (V + 2\nu_c W) \varphi_1^{(s)} \varphi_1^{(s)} / (2m_0 M_s), \quad \eta = m_2 h \sin \alpha (\varphi_2^{(s)} - \varphi_1^{(s)}) / (8m_0 M_s)$$

При $k=2, 3$ имеем

$$\sum_{j=1}^3 (c_{ij} - a_{ij} \omega_s^2 k^2) \nu_{h,j} = g_{h,i} \quad (i=1, 2, 3) \quad (3.10)$$

Детерминанты систем (3.10) отличны от нуля. Применяя правило Крамера, находим $\nu_{h,j} = \Delta_{h,j} / \Delta(k) = \nu_{k,j} a_s^2$ ($k=2, 3; j=1, 2, 3$), где $\Delta(k)$ — детерминанты коэффициентов в системах, а Δ_{hj} — детерминанты, в которых j -е столбцы замещены столбцом свободных членов. Через ν_{hj} обозначаются постоянные составляющие коэффициентов.

Подставляя (3.9) в (3.2), для определения амплитуды a_s и фазы ψ имеем дифференциальные уравнения

$$a_s' = -\varepsilon \lambda a_s, \quad \psi' = \omega_s (1 + \varepsilon \eta a_s^2) \quad (3.11)$$

Из уравнений (3.11) при начальных условиях $t_0=0$, $a_s(t_0)=a_{s,0}$ и $\psi(t_0)=0$ находим

$$a_s = a_{s,0} \exp(-\varepsilon \lambda t) \quad (3.12)$$

$$\psi = \omega_s \{ t + \eta a_{s,0}^2 [1 - \exp(-2\varepsilon \lambda t)] / (2\lambda) \}$$

Функцию D определяем из (3.6) с учетом (3.12). После интегрирования уравнения

$$dD/dt = W^\circ a_{s,0}^2 \omega_s [\exp(-2\varepsilon \lambda t) + \varepsilon \eta a_{s,0}^2 \exp(-4\varepsilon \lambda t)]$$

При начальных условиях $t_0=0$, $D_0=0$ получаем

$$D = W^\circ a_{s,0}^2 \omega_s \{ [\exp(-2\varepsilon \lambda t) - 1] / \varepsilon + \eta a_{s,0}^2 [\exp(-4\varepsilon \lambda t) - 1] / 2 \} / (2\lambda)$$

Подставляя это выражение в (3.2) и интегрируя при начальных условиях $t_0=0$, $\Phi(t_0)=\Phi_0$, для функции Φ окончательно находим

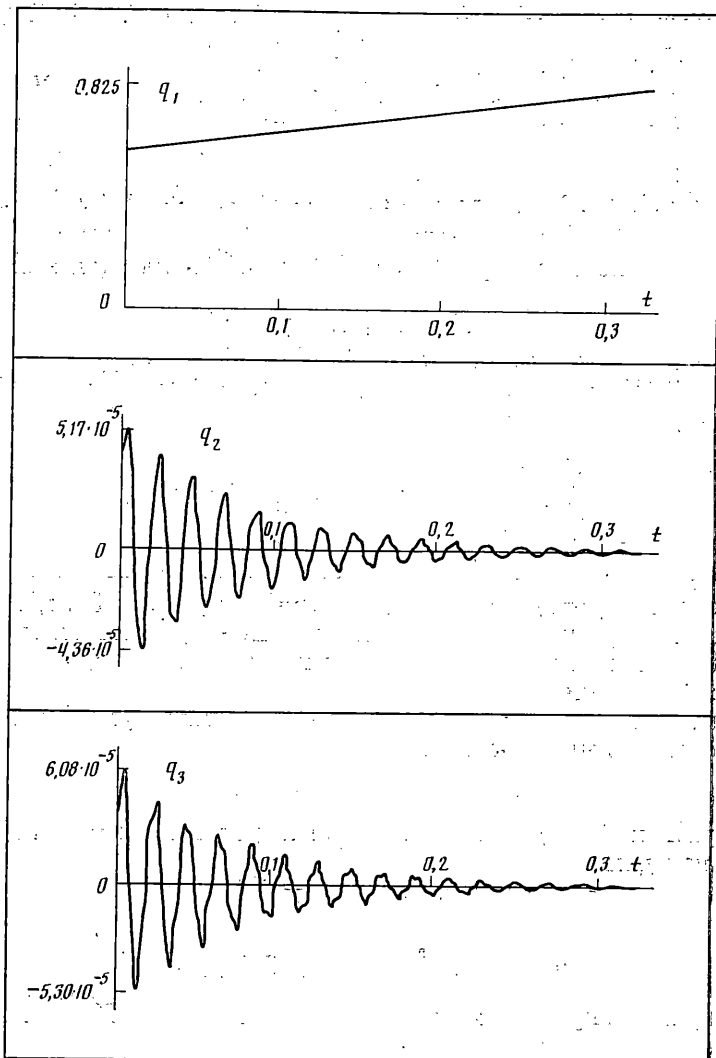
$$\Phi = \Phi_0 + [v_c - (1 + \varepsilon \eta a_{s,0}^2 / 2) W^\circ a_{s,0}^2 \omega_s / (2\lambda)] t + W^\circ a_{s,0}^2 \omega_s \{ [1 - \exp(-2\varepsilon \lambda t)] / \varepsilon - \eta a_{s,0}^2 [1 - \exp(-4\varepsilon \lambda t)] / (8\lambda) \} / (4\lambda^2) \quad (3.13)$$

Положение статического равновесия упругой системы определяется перемещением f_0 и поворотом α (фиг. 1). Применяя принцип возможных перемещений в обобщенных координатах, для нахождения этих величин имеем уравнения $c_{22} f_0 + c_{23} \alpha = G_2$, $c_{23} f_0 + (c_{33} + G_2 h) \alpha = 0$. Из этих уравнений, учитывая (1.4), находим

$$\alpha = l_0^2 m_2 g [2(EJ + m_2 g h l_0)]^{-1}$$

$$f_0 = m_2 g l_0^3 (4EJ + m_2 g h l_0) [12EJ(EJ + m_2 g h l_0)]^{-1}$$

Таким образом, все величины, фигурирующие в решении, определены. Подставляя (3.4), (3.5) и (3.13) в (3.1), асимптотическое решение возму-



Фиг. 2

щенной системы в первом приближении получаем в виде

$$q_j = \varphi_j^{(1)} \Phi + \varphi_j^{(s)} a_{s,0} \exp(-\varepsilon \lambda t) \cos \{ \omega_s [t + \eta a_{s,0}^2 (1 - \exp(-2\varepsilon \lambda t)) / (2\lambda)] \} + \\ + \varepsilon a_{s,0}^2 \exp(-2\varepsilon \lambda t) \left\{ v_{0,j} + \sum_{k=2}^3 v_{k,j} \cos [k \omega_s [t + \eta a_{s,0}^2 (1 - \exp(-2\varepsilon \lambda t))]] \right\} \quad (j=1, 2, 3)$$

4. Численное интегрирование дифференциальных уравнений движения. Численное интегрирование методом Рунге - Кутты 4-го порядка. С этой целью систему (1.5) разрешим относительно старших производных и понизим порядок системы. Получим шесть дифференциальных уравнений первого порядка.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= [L - V x_1 - W x_1^2 - mg - c_{22} x_4 - c_{23} x_6] / m_1 = F_1 \\ x_3^* &= [F_2 \rho^2 + F_3 h \sin(x_6 + \alpha)] [\rho^2 - h^2 \sin^2(x_6 + \alpha)]^{-1} \\ x_5^* &= [F_3 + F_2 h \sin(x_6 + \alpha)] [\rho^2 - h^2 \sin^2(x_6 + \alpha)]^{-1} \\ x_2^* &= x_1, \quad x_4^* = x_3, \quad x_6^* = x_5 \\ q_1 &= x_1, \quad q_2 = x_2, \quad q_3 = x_3, \quad q_4 = x_4, \quad q_5 = x_5, \quad q_6 = x_6 \\ \dot{F}_2 &= F_1 + x_5^2 h \cos(x_6 + \alpha) - (c_{22} x_4 + c_{23} x_6) / m_2 \\ \dot{F}_3 &= -F_1 h \sin(x_6 + \alpha) - (c_{22} x_4 + c_{33} x_6) / m_2 \end{aligned}$$

Для проведения сравнительного анализа численного и приближенного асимптотического решения, последнее также было запрограммировано. На фиг. 2 показаны графики законов движения, соответствующие численному решению. Считая числовое решение достаточно точным, мы сравнивали полученное одночастотное асимптотическое решение с ним. Был проведен частотный анализ полученного числового решения, который показал хорошее совпадение собственных частот. Разница между двумя решениями по параметрам: стационарная скорость регионального движения и декремент затухания не больше 8-10 процентов. Повышение жесткости системы уменьшает эту разницу.

Наблюдается еще следующий эффект. Время затухания колебания в системе уменьшается с увеличением отношения m_2/m_1 , которое следует из коэффициента демпфирования λ (3.9). Это подтверждается и при численном моделировании динамики работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Яблонский А. А., Норейко С. С. Курс теории колебаний. М.: Высш. шк. 1966. 255 с.
2. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука. 1974. 503 с.
3. Бочваров С. Н., Парасков Ц. Н. Собственные продольные одночастотные колебания систем из нескольких материальных точек с диссипативными связями // Инж. ж. МТТ. 1967. № 1. с. 50-57.
4. Акуленко Л. Д., Михайлов С. А., Черноусько Ф. Л. Моделирование динамики манипулятора с упругими звеньями // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 3. с. 118-124.

София, Болгария

Поступила в редакцию
13.VIII.1986.