

УДК 593.3:534.1

М. Ю. РЯЗАНЦЕВА

ВЫСОКОЧАСТОТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН СИММЕТРИЧНОГО СТРОЕНИЯ

На основе асимптотического анализа пространственной задачи теории упругости выведены двумерные уравнения продольных колебаний трехслойных пластин симметричного строения по толщине, которые описывают низкочастотную и первые две высокочастотные ветви колебаний асимптотически точно в области длинных волн и качественно правильно — в области достаточно коротких волн. Уравнения изгибных колебаний были получены ранее в [1].

1. Постановка задачи. Рассматривается упругая трехслойная пластина постоянной толщины h , отнесенная к декартовой системе координат x, x_α (греческие индексы пробегает значения 1, 2). Срединная поверхность пластины расположена в плоскости $x=0$ и обозначена Ω , граница Ω — через Γ (принятые обозначения соответствуют [1]). Движение упругой пластины определяется функциями $w_i(x, x_\alpha, t)$ — проекциями вектора перемещений на оси координат (латинские индексы пробегает значения 1, 2, 3). Функции w_i предполагаются непрерывными и кусочно-дифференцируемыми. Толщины внешних и внутреннего слоев обозначены через h_1 и h_2 соответственно ($2h_1+h_2=h$).

Материал каждого слоя предполагается однородным и изотропным. Упругие характеристики μ, λ , а также плотность ρ являются четными функциями координаты x (в дальнейшем индекс 1 будет отмечать параметры внешних слоев, а индекс 2 — параметры внутреннего слоя). К лицевым поверхностям пластины приложены переменные во времени поверхностные нагрузки. Боковая поверхность $\Gamma \times (-h/2, h/2)$ предполагается свободной от нагрузок.

Для слоистых пластин симметричной структуры известно, что в линейной постановке трехмерные колебания общего вида распадаются на сумму двух, и поэтому могут быть описаны двумя независимыми системами динамических уравнений (см. [2]). Одна — теория изгибных колебаний — описывает несимметричные по толщине колебания. Другая система уравнений описывает симметричные относительно срединной поверхности колебания — теория продольных колебаний (w_α — четные по x функции, а w — нечетная функция по x).

Двумерные уравнения изгибных колебаний трехслойных пластин симметричной структуры, учитывающие взаимодействие низкочастотной ветви с первой высокочастотной ветвью колебаний построены в [1]. Требуется построить двумерные уравнения продольных колебаний упругих пластин симметричной структуры, описывающие низкочастотную и первые две высокочастотные формы колебаний асимптотически точно в области длинных волн (длина волны l гораздо больше толщины h) и качественно правильно — колебания в области достаточно коротких волн.

В трехмерной постановке истинные перемещения w_i являются стационарным значением функционала

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} \int_{-h/2}^{h/2} (U - K) dx d\omega dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} \{P^i w_i\} d\omega dt \quad (1.1)$$

$$U = \frac{1}{2} \lambda (\varepsilon_i^i)^2 + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon^{ij}, \quad K = \frac{1}{2} \rho (w, t^2 + w_\alpha, t w, t^\alpha)$$

$$\{P^i w_i\} = P_+^i w_i^+ + P_-^i w_i^-, \quad P_\pm^i = P^i|_{x=\pm h/2}$$

где запятой в индексах обозначена операция дифференцирования; по повторяющимся нижнему и верхнему индексам производится суммирование; ε_{ij} — тензор упругих деформаций.

2. Зависимости перемещений от поперечной координаты. Первый этап вывода двумерных уравнений из трехмерной теории упругости заключается в асимптотическом анализе функционала (1.1) в области длинных волн с целью выявления основных динамических параметров конструируемой модели и построения асимптотического разложения для трехмерного вектора перемещения.

На первом шаге асимптотического анализа для перемещений получается краевая задача

$$\frac{4}{h^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \mu \frac{\partial w_\alpha}{\partial \xi} = \rho \frac{\partial^2 w_\alpha}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial w_\alpha}{\partial \xi} = 0 \quad (\xi = \pm 1) \quad (2.1)$$

$$\frac{4}{h^2} \frac{\partial}{\partial \xi} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial \xi} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0 \quad (\xi = \pm 1)$$

$$(\xi = 2x/h, \quad |\xi| \leq 1)$$

из решения которой при известных функциях $\mu(\xi)$, $\lambda(\xi)$ и $\rho(\xi)$ определяются главные приближения собственных форм колебаний и дискретный спектр собственных частот в случае длинноволновых высокочастотных процессов.

Из решения задачи (2.1) следует, что для поперечного волокна упругой трехслойной пластины характерны две серии движений. В одной серии преобладающим является продольное перемещение $w_\alpha \gg w$, в другой серии преобладает поперечное перемещение $w \gg w_\alpha$. Обозначим колебания этих серий $L_{\parallel}(n)$ и $L_{\perp}(n)$ соответственно, где n — номер ветви колебаний.

Решение задачи (2.1) методом Фурье приводит к следующим выражениям для длинноволновых асимптотик собственных форм колебаний:

$$L_{\parallel}(n): w_\alpha = v_\alpha g(\xi), \quad w = 0 \quad (2.2)$$

$$g(\xi) = \begin{cases} (\cos \beta_2 b) (\cos \beta_1 a)^{-1} \cos(\beta_1 - \beta_1 \xi) & (b \leq \xi \leq 1) \\ \cos \beta_2 \xi & (0 \leq \xi \leq b) \end{cases} \quad g(-\xi) = g(\xi)$$

$$L_{\perp}(n): w = \psi f(\xi), \quad w_\alpha = 0 \quad (2.3)$$

$$f(\xi) = \begin{cases} (\sin \alpha_2 b) (\cos \alpha_1 a)^{-1} \cos(\alpha_1 - \alpha_1 \xi) & (b \leq \xi \leq 1) \\ \sin \alpha_2 b & (0 \leq \xi \leq b) \end{cases} \quad f(-\xi) = -f(\xi)$$

$$(a = 2h_1/h, \quad b = h_2/h, \quad a + b = 1)$$

где v_α и ψ — амплитуды колебаний, α_1 , α_2 , β_1 и β_2 — безразмерные частотные параметры, которые выражаются через собственную частоту ветви ω и характеристики слоев упругой пластины по формулам:

$$L_{\parallel}(n): \beta_1 = \frac{1}{2} \omega h (\rho_1 / \mu_1)^{1/2}, \quad \beta_2 = \frac{1}{2} \omega h (\rho_2 / \mu_2)^{1/2}$$

$$L_{\perp}(n): \alpha_1 = \frac{1}{2} \omega h [\rho_1 / (\lambda_1 + 2\mu_1)]^{1/2}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2} \omega h [\rho_2 / (\lambda_2 + 2\mu_2)]^{1/2}$$

Для определения спектра собственных частот колебаний бесконечной трехслойной пластины получены следующие частотные уравнения:

$$L_{\parallel}(n): \operatorname{tg} \beta_1 a + (\rho_2 \mu_2 / \rho_1 \mu_1)^{1/2} \operatorname{tg} \beta_2 b = 0 \quad (2.4)$$

$$L_{\perp}(n): (\operatorname{tg} \alpha_2 b) (\operatorname{tg} \alpha_1 a) = [\rho_2 (\lambda_2 + 2\mu_2) / \rho_1 (\lambda_1 + 2\mu_1)]^{1/2} \quad (2.5)$$

Определяемые из решения уравнений частотные параметры пробегают счетное число значений (номера ветвей опущены). Уравнение (2.4)

имеет тривиальное решение $\omega=0$. Соответствующая этому значению ветвь колебаний отвечает низкочастотным длинноволновым (классическим) колебаниям.

На втором шаге асимптотической процедуры по известным с первого шага функциям w_σ для серии $L_{\parallel}(n)$ и w для серии $L_{\perp}(n)$ отыскиваются соответственно функции w и w_σ . Для трехмерного вектора перемещений в случае высокочастотных длинноволновых процессов получаем асимптотические разложения, главные члены которых задаются формулами:

$$L_{\parallel}(n): w_\sigma = v_\sigma(x^\beta, t)g(\xi), w = {}^{1/2}v_\sigma hq(\xi), n=1, 2, \dots$$

$$L_{\perp}(n): w = \psi(x^\beta, t)f(\xi), w_\sigma = {}^{1/2}\psi_\sigma hp(\xi), n=1, 2, \dots$$

Функции $p(\xi)$ и $q(\xi)$ также как и функций $f(\xi)$ и $g(\xi)$ имеют смысл длинноволновых асимптотик собственных форм колебаний; медленно меняющиеся вдоль пластины амплитуды соответствующих форм колебаний $v_\sigma, \psi_\sigma, \psi$ и v_σ считаются функциями x^β и t .

Для вычисления функций $p(\xi)$ и $q(\xi)$ получены следующие формулы:

$$p(\xi) = \begin{cases} D_1 \sin \beta_1 \xi + D_2 \cos \beta_1 \xi - \alpha_1^{-1} \sin \alpha_2 b (\cos \alpha_1 a)^{-1} \sin(\alpha_1 - \alpha_1 \xi) & (b \leq \xi \leq 1), \\ D_3 \cos \beta_2 \xi - \alpha_2^{-1} \cos \alpha_2 \xi & (0 \leq \xi \leq b), \end{cases} \quad p(-\xi) = p(\xi)$$

где α_1 и α_2 определяются из решения уравнения (2.5); параметры β_1 и β_2 связаны с параметрами α_1 и α_2 формулой:

$$\alpha = [\mu / (\lambda + 2\mu)]^{1/2} \beta \quad (2.6)$$

Постоянные множители D_1 , D_2 и D_3 вычисляются по формулам

$$D_1 = R_1/R, \quad D_2 = R_2/R, \quad D_3 = R_3/R$$

$$R = (\mu_2 \beta_2 / \mu_1 \beta_1) \sin \beta_2 b \cos \beta_1 a + \cos \beta_2 b \sin \beta_1 a$$

$$R_1 = (\mu_2 \beta_2 / \mu_1 \beta_1) \sin \beta_2 b (S_2 \sin \beta_1 + S_1 \cos \beta_1 b) + \cos \beta_2 b (S_3 \sin \beta_1 - S_1 \sin \beta_1 b)$$

$$R_2 = (\mu_2 \beta_2 / \mu_1 \beta_1) \sin \beta_2 b (S_2 \cos \beta_1 - S_1 \sin \beta_1 b) + \cos \beta_2 b (S_3 \cos \beta_1 - S_1 \cos \beta_1 b)$$

$$R_3 = S_3 \cos \beta_1 a - S_2 \sin \beta_1 a - S_1, \quad S_1 = -2\beta_1^{-1} (\sin \alpha_2 b) (\cos \alpha_1 a)^{-1}$$

$$S_2 = \alpha_1^{-1} (\sin \alpha_2 b) (\operatorname{tg} \alpha_1 a) - \alpha_2^{-1} \cos \alpha_2 b, \quad S_3 = 2 (\sin \alpha_2 b) (\mu_2 - \mu_1) / (\mu_1 \beta_1)$$

$$q(\xi) = \begin{cases} C_1 \sin \alpha_2 \xi + C_2 \cos \alpha_1 \xi + \beta_1^{-1} (\cos \beta_2 b) (\cos \beta_1 a)^{-1} \sin(\beta_1 - \beta_1 \xi) & (b \leq \xi \leq 1), \\ C_3 \sin \alpha_2 \xi - \beta_2^{-1} \sin \beta_2 \xi & (0 \leq \xi \leq b), \end{cases} \quad q(-\xi) = -q(\xi)$$

где β_1 и β_2 определяется из решения частотного уравнения (2.4); параметры α_1 и α_2 выражаются через β_1 и β_2 соотношением (2.6):

$$C_1 = R_1/R, \quad C_2 = R_2/R, \quad C_3 = R_3/R$$

$$R = \sin \alpha_2 b \sin \alpha_1 b - (\alpha_2 \kappa_2 / \alpha_1 \kappa_1) \cos \alpha_2 b \cos \alpha_1 a$$

$$R_1 = \sin \alpha_2 b (d_3 \sin \alpha_1 - d_1 \sin \alpha_1 b) - (\alpha_2 \kappa_2 / \alpha_1 \kappa_1) \cos \alpha_2 b (d_1 \cos \alpha_1 b + d_2 \sin \alpha_1)$$

$$R_2 = (\alpha_2 \kappa_2 / \alpha_1 \kappa_1) \cos \alpha_2 b (d_1 \sin \alpha_1 b - d_2 \cos \alpha_1) + \sin \alpha_2 b (d_3 \cos \alpha_1 - d_1 \cos \alpha_1 b)$$

$$R_3 = d_3 \cos \alpha_1 a - d_2 \sin \alpha_1 a - d_1$$

$$d_1 = 2 (\cos \beta_2 b) (\cos \beta_1 a)^{-1} \alpha_1 \beta_1, \quad d_3 = 2 (\alpha_1 \kappa_1)^{-1} (\cos \beta_2 b) (\mu_1 - \mu_2)$$

$$d_2 = -\beta_1^{-1} (\sin \beta_1 a) (\cos \beta_2 b) (\cos \beta_1 a)^{-1} - \beta_2^{-1} \sin \beta_2 b$$

$$\kappa_1 = \lambda_1 + 2\mu_1, \quad \kappa_2 = \lambda_2 + 2\mu_2.$$

Для построения уравнений помимо длинноволновых высокочастотных

процессов необходимо рассмотреть низкочастотные длинноволновые процессы. Они описываются ветвью $L_{\parallel}(0)$, для которой трехмерные перемещения в первом приближении определяются формулами

$$w_{\sigma} = u_{\sigma}(x^{\beta}, t), \quad w = \frac{1}{2} u_{,\sigma} h \varphi(\xi)$$

$$\varphi(\xi) = - \begin{cases} \sigma_2 b + (\xi - b) \sigma_1 & (b \leq \xi \leq 1) \\ \sigma_2 \xi & (0 \leq \xi \leq b), \end{cases} \quad \varphi(-\xi) = -\varphi(\xi)$$

$$\sigma_1 = \lambda_1 / (\lambda_1 + 2\mu_1), \quad \sigma_2 = \lambda_2 / (\lambda_2 + 2\mu_2)$$

Будем строить динамические уравнения, описывающие низкочастотные (классические) продольные колебания и первые две формы высокочастотных колебаний. В этом случае основные гипотезы двумерной теории заключены в формулах для представления трехмерного вектора перемещений через пять двумерных функций:

$$u_{\alpha} = \bar{u}_{\alpha} + v_{\alpha} g + \frac{1}{2} h \psi_{,\alpha} p, \quad w = \psi f + \frac{1}{2} h (u_{,\alpha} \varphi + v_{,\alpha} q) \quad (2.7)$$

Функции $u_{\alpha}(x^{\beta}, t)$ имеют смысл средних продольных перемещений поперечного волокна трехслойной пластины. В соответствии с эффектом Пуассона эти продольные перемещения сопровождаются линейным поперечным обжатием, которое выражается слагаемым $\frac{1}{2} h u_{,\alpha} \varphi$. Основное нелинейное обжатие связано с учетом первой высокочастотной формы колебаний, амплитуда которого обозначена через ψ , а зависимость от поперечной координаты описывается функцией $f(\xi)$. Это поперечное обжатие вызывает продольные перемещения, пропорциональные $\nabla \psi$; соответствующая зависимость от поперечной координаты задается функцией $p(\xi)$. Учет следящей высокочастотной ветви позволяет описать эффект сложного тангенциального перемещения, при котором средняя поверхность перемещается в сторону, противоположную смещению лицевых поверхностей пластины. Этот эффект, отсутствующий в известных моделях трехслойных пластин, описывается слагаемым $v_{\alpha} g(\xi)$.

Для упрощения дальнейших построений на собственные функции f и g , p и q можно наложить некоторые условия нормировок. Оказалось удобным для функции f и p ввести нормировочный множитель согласно формуле

$$N_1 \langle \rho f_0^2 \rangle = \langle \rho \rangle, \quad \langle \cdot \rangle \equiv \int_0^1 (\cdot) d\xi$$

где f_0 определяется формулой (2.3). Для функции g и q вводится нормировка вида $N_2 \langle \rho g_0^2 \rangle = \langle \rho \rangle$, где g_0 определено формулой (2.2).

3. Лагранжиан двумерной теории. Пять двумерных функций перемещений u_{α} , ψ и v_{α} являются определяющими функциями конструируемой модели. Для построения двумерной теории высокочастотных колебаний применялся метод асимптотического анализа и осреднения трехмерного функционала действия упругой пластины. На этом этапе построения подстановка формул (2.7) в функционал действия трехмерного упругого тела (1.1) приводит к следующему выражению для осредненной кинетической энергии

$$\langle K \rangle = \frac{1}{2} \langle \rho \rangle [(u_{\alpha,t}^2 + \psi_{,t}^2 + v_{\alpha,t}^2) + h (c_1 u_{\alpha,t} \psi_{,\alpha t} + c_1 u_{,\alpha t} \psi_{,t} + c_2 \psi_{,t} v_{,\alpha t} + c_2 \psi_{,\alpha t} v_{,t})]$$

$$c_1 = \langle \rho p \rangle / \langle \rho \rangle, \quad c_2 = \langle \rho q f \rangle / \langle \rho \rangle \quad (3.1)$$

В выражении (3.1) слагаемое, содержащее квадрат скорости $u_{,\alpha t}$ опущено, как малое для низкочастотных процессов. Слагаемые $\frac{1}{4} h^2 (\psi_{,\alpha t})^2 \langle \rho p^2 \rangle$ и $\frac{1}{4} h^2 (v_{,\alpha t})^2 \langle \rho q^2 \rangle$ заменялись асимптотически эквивалентными на $\frac{1}{4} \omega_2^2 (\psi_{,\alpha})^2 \langle \rho p^2 \rangle h^2$ и $\frac{1}{4} h^2 \omega_3^2 (v_{,\alpha})^2 \langle \rho q^2 \rangle$ и суммировались с соответствующими членами внутренней энергии, которая после асимптотического анализа, операций интегрирования по частям и осреднения по

толщине принимает вид

$$\begin{aligned} \langle U \rangle = & \frac{1}{2} \langle \rho \rangle (\omega_2^2 \psi^2 + \omega_3^2 v_\alpha^2) + 4h^{-1} \langle \rho \rangle [(\frac{1}{4} h^2 \omega_2^2 c_1 + r_1) u_{,\alpha}^\alpha \psi + \\ & + (\frac{1}{4} h^2 \omega_2^2 c_2 + r_2) \psi v_{,\alpha}^\alpha + (\frac{1}{4} h^2 \omega_3^2 c_2 + r_3) \psi_{,\alpha} v^\alpha] + \\ & + k_1 (u_{,\alpha}^\alpha)^2 + k_2 (\psi_{,\alpha})^2 + k_3 (v_{,\alpha}^\alpha)^2 + 2k_4 u_{(\alpha,\beta)}^2 + 2k_5 v_{(\alpha,\beta)}^2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} r_1 = & \langle \lambda f_{,\tau} \rangle / \langle \rho \rangle, \quad r_2 = \langle \lambda f_{,\tau} g \rangle / \langle \rho \rangle, \quad r_3 = \langle \mu f g_{,\tau} \rangle / \langle \rho \rangle \\ k_1 = & \langle \lambda + \lambda \varphi_{,\tau} \rangle, \quad k_2 = \langle \mu f^2 + \mu f p_{,\tau} - \lambda f_{,\tau} p \rangle \\ k_3 = & \langle \lambda g^2 + \lambda g q_{,\tau} - \mu g_{,\tau} q \rangle, \quad k_4 = \langle \mu \rangle, \quad k_5 = \langle \mu g^2 \rangle \end{aligned}$$

где через ω_2 обозначена собственная частота ветви $L_\perp(0)$, а через ω_3 — собственная частота ветви $L_\parallel(1)$.

Внутренняя энергия в форме (3.2) содержит только главные в асимптотическом смысле члены каждой ветви и главные перекрестные члены, отвечающие взаимодействию ветвей колебаний на длинных волнах. По построению данная теория является теорией первого приближения.

Дальнейшие преобразования энергии связаны с процедурой коротковолновой экстраполяции. Суть которой состоит в том, чтобы из всех асимптотически эквивалентных на длинных волнах функционалов выбрать тот, лагранжиан которого будет иметь строго положительные квадратичные формы для U и K и содержать только первые производные от искомым функций.

Произведем прежде преобразования в кинетической энергии, приводящие ее к сумме квадратов

$$\langle K \rangle = \frac{1}{2} \langle \rho \rangle [(u_\alpha^\alpha + \frac{1}{2} h \psi_{,\alpha} c_1)_{,t}^2 + (\psi^\circ + \frac{1}{2} u_{,\alpha}^\alpha c_1 h + \frac{1}{2} h v_{,\alpha}^\alpha c_2)_{,t}^2 + (v_\alpha^\alpha + \frac{1}{2} h \psi_{,\alpha} c_2)_{,t}^2] - \frac{1}{8} \langle \rho \rangle h^2 [(\omega_2^2 c_1^2 + \omega_2^2 c_2^2) \psi_{,\alpha}^{\circ 2} + \omega_3^2 c_2^2 (v_{,\alpha}^\alpha)^2] \quad (3.3)$$

Три последних слагаемых образовались в результате замены величин $\psi_{,\alpha i}^{\circ 2}$ и $(v_{,\alpha i}^\alpha)^2$ на асимптотически эквивалентные на длинных волнах $\omega_2^2 \psi_{,\alpha}^{\circ 2}$ и $\omega_3^2 (v_{,\alpha}^\alpha)^2$. Выделим полные квадраты в выражении для $\langle U \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle U \rangle = & \frac{1}{2} \langle \rho \rangle \{ \omega_2^2 [\psi^\circ + \frac{1}{2} h c_1 u_{,\alpha}^\alpha + \frac{1}{2} h c_2 v_{,\alpha}^\alpha]^2 + \omega_3^2 [v_\alpha^\alpha + \frac{1}{2} h c_2 \psi_{,\alpha}^\circ]^2 + \\ & + h^{-1} [r_1 u_{,\alpha}^\alpha \psi + r_2 \psi^\circ v_{,\alpha}^\alpha + r_3 \psi_{,\alpha}^\circ v^\alpha] + 2k_4 \langle \rho \rangle^{-1} u_{(\alpha,\beta)}^{\circ 2} + 2k_5 \langle \rho \rangle^{-1} v_{(\alpha,\beta)}^{\circ 2} \} + \\ & + \frac{1}{4} h^2 [(u_{,\alpha}^\alpha)^2 (4k_1 h^{-2} \langle \rho \rangle^{-1} - \omega_2^2 c_1^2) + \psi_{,\alpha}^{\circ 2} (4k_2 h^{-2} \langle \rho \rangle^{-1} + \omega_2^2 c_2^2 + \omega_2^2 c_1^2 - \\ & - \omega_3^2 c_2^2) + (v_{,\alpha}^\alpha)^2 (4k_3 h^{-2} \langle \rho \rangle^{-1} + \omega_3^2 c_2^2 - \omega_2^2 c_2^2)] \end{aligned} \quad (3.4)$$

В динамические уравнения войдут пять искомым функций координат и времени $u_\alpha^\alpha(x^\beta, t)$, $\psi^\circ(x^\beta, t)$ и $v_\alpha^\alpha(x^\beta, t)$ (соответствующие обозначения без градуса зарезервированы для функций, которые появятся в окончательных уравнениях после введения замен). Замены искомым функций вводятся по формулам

$$\begin{aligned} u_\alpha &= u_\alpha^\circ + \frac{1}{2} h c_1 \psi_{,\alpha}^\circ \\ \psi &= \psi^\circ + \frac{1}{2} h c_1 u_{,\alpha}^\alpha + \frac{1}{2} h c_2 v_{,\alpha}^\alpha \\ v_\alpha &= v_\alpha^\circ + \frac{1}{2} h c_2 \psi_{,\alpha}^\circ \end{aligned} \quad (3.5)$$

После подстановки формул (3.5) в выражения (3.3), (3.4) и отбрасывания малых в асимптотическом смысле членов получаем выражения для $\langle K \rangle$ и $\langle U \rangle$, которые рассматриваются как окончательные формулы — постулаты теории продольных колебаний трехслойных пластин симметричного строения.

$$\langle K \rangle = \frac{1}{2} \langle \rho \rangle (u_{\alpha, i} u_{, i}^\alpha + \psi_{, t}^2 + v_{\alpha, i} v_{, i}^\alpha) \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \langle U \rangle = & \frac{1}{2} \langle \mu \rangle [4h^{-2} (\alpha^2 \psi^2 + \beta^2 v_\alpha v^\alpha) + 4h^{-1} (R_1 u_{,\sigma}^\sigma \psi + R_2 \psi v_{,\sigma}^\sigma + R_3 \psi_{,\alpha} v^\alpha) + \\ & + S_1 (u_{,\sigma}^\sigma)^2 + S_2 (\psi_{,\alpha})^2 + S_3 (v_{,\sigma}^\sigma)^2 + 2u_{(\alpha,\beta)}^2 + 2S_4 v_{(\alpha,\beta)}^2] \end{aligned} \quad (3.7)$$

Теория продольных колебаний (3.6), (3.7) помимо средних значений сдвиговой жесткости $\langle \mu \rangle$ и плотности $\langle \rho \rangle$ содержит девять безразмерных констант, которые вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= {}^1/4 \omega_2^2 h^2 \langle \rho \rangle / \langle \mu \rangle, \quad \beta^2 = {}^1/4 \omega_3^2 h^2 \langle \rho \rangle / \langle \mu \rangle \\ R_1 &= \langle \lambda f, \tau \rangle / \langle \mu \rangle, \quad R_2 = \langle \lambda f, \tau g \rangle / \langle \mu \rangle \\ R_3 &= \langle \mu f g, \tau \rangle / \langle \mu \rangle, \quad S_1 = k_1 / \langle \mu \rangle + R_1 / \alpha^2 \\ S_2 &= k_2 / \langle \mu \rangle + (R_2 - R_3)^2 / (\beta^2 - \alpha^2) - R_1 / \alpha^2 \\ S_3 &= k_3 / \langle \mu \rangle - (R_2 - R_3)^2 / (\beta^2 - \alpha^2), \quad S_4 = \langle \mu g^2 \rangle / \langle \mu \rangle \end{aligned} \quad (3.8)$$

4. Уравнения вынужденных колебаний трехслойной пластины. Взяв за основу вариационный подход [3] постулируем, что движение трехслойной пластины будет происходить в соответствии со следующим вариационным принципом

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \int_{-h/2}^{h/2} \langle \Lambda \rangle dx dt, \quad \langle \Lambda \rangle = \langle U \rangle - \langle K \rangle \quad (4.1)$$

где $\langle K \rangle$ и $\langle U \rangle$ — двумерные плотности кинетической и внутренней энергии, определяемые формулами (3.6) и (3.7) соответственно. Лагранжиан (4.1) является квадратичной формой по u_α , ψ и v_α и их производным первого порядка. Соответствующие уравнения Эйлера являются уравнениями гиперболического типа и для случая вынужденных колебаний они имеют вид:

$$\langle \rho \rangle u_{\alpha,tt} - \langle \mu \rangle [\Delta u_\alpha + (S_1 + 1) u_{,\beta\alpha}^\beta + 2h^{-1} R_1 \psi_{,\alpha}] = 2h^{-1} \{P_\alpha\} \quad (4.2)$$

$$\langle \rho \rangle \psi_{,tt} - \langle \mu \rangle [S_2 \Delta \psi - 4h^{-2} \alpha^2 \psi - 2h^{-1} R_1 u_{,\alpha}^\alpha + 2h^{-1} v_{,\alpha} (R_3 - R_2)] = 2h^{-1} [P] f|_{t=1}$$

$$\langle \rho \rangle v_{\alpha,tt} - \langle \mu \rangle [S_4 \Delta v_\alpha - 4h^{-2} \beta^2 v_\alpha + (S_3 + S_4) v_{,\beta\alpha}^\beta - 2h^{-1} (R_3 - R_2) \psi_{,\alpha}] = 2h^{-1} \{P_\alpha\} g|_{t=1}$$

$$[P] = P|_{t=1} - P|_{t=-1}, \quad \{P_\alpha\} = P_\alpha|_{t=1} + P_\alpha|_{t=-1}$$

Если край пластины жестко заделан, то $u_\alpha = \psi = v_\alpha = 0$ на контуре. Для случая свободного края естественные граничные условия записываются в виде:

$$S_1 u_{,\beta}^\beta v_\alpha + 2u_{(\alpha, \beta)} v^\beta + 2h^{-1} R_1 \psi v_\alpha = 0$$

$$S_2 \psi_{,\alpha} v^\alpha + 2h^{-1} R_3 v_\alpha v^\alpha = 0 \text{ на } \Gamma$$

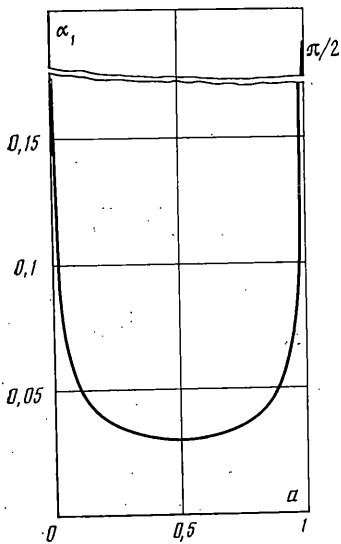
$$S_3 v_{,\alpha}^\alpha v^\beta + 2S_4 v_{(\alpha, \beta)} v^\beta + R_2 2h^{-1} \psi v_\beta = 0$$

где v_α — вектор, нормальный к контуру Γ и лежащий в плоскости пластины.

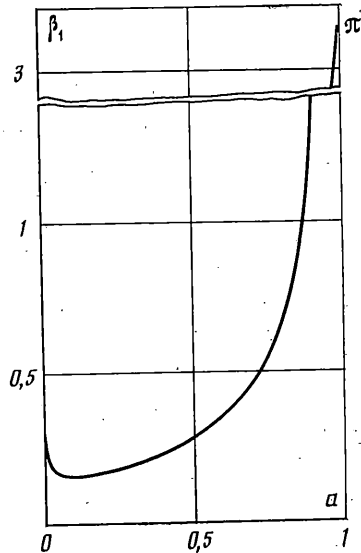
5. Исследование частотных уравнений. Собственная частота ветви $L_\perp(0)$ является первым корнем уравнения (2.5). Обозначим $\rho_* = \rho_2 / \rho_1$, $\kappa_* = \kappa_2 / \kappa_1$, где $\kappa = \lambda + 2\mu$. Как правило, на практике встречаются трехслойные пластины с жесткими и тяжелыми несущими слоями и податливым заполнителем, т. е. такие для которых $\kappa_* \ll 1$ и $\rho_* \ll 1$. При этих предположениях справедлива следующая асимптотическая формула (вывод аналогичной формулы дан в [1]):

$$\alpha_1 = (\kappa_* / ab)^{1/2} \quad (5.1)$$

Из формулы (5.1) следует, что собственная частота ω_2 зависит при фиксированных материалах от соотношения слоев и для материалов с сильно различающимися упругими характеристиками достигает минимального значения при $a = b = 0.5$. Следует отметить, что для трехслойных пластин с большим перепадом упругих модулей собственные частоты первых высокочастотных ветвей $L_\perp(0)$ и $L_\parallel(1)$ лежат в звуковом диапазоне частот и для них справедливо неравенство $\omega_2 < \omega_3$. Расчеты показывают, что, например, для пластины толщиной $h = 0.02$ м, внешние слои которой выполнены из алюминиевого сплава ($\lambda_1 = 4.76 \cdot 10^4$ МПа, $\mu_1 = 2.65 \cdot 10^4$ МПа, $\rho_1 = 2.65 \cdot 10^3$ кг/м³), а заполнитель — из материала подобного пенополиуретану ($\lambda_2 = 15.7$ МПа,



Фиг. 1



Фиг. 2

$\mu_2=3,92$ МПа, $\rho_2=50$ кг/м³) при $a=b=0,5$ — $\omega_2=2,990$ кГц, а $\omega_3=14,120$ кГц, в то время как однородной алюминиевой пластине соответствуют частоты $\omega_2=154$ кГц, $\omega_3=158,2$ кГц.

На фиг. 1 приведены результаты вычисления частотного параметра (первого корня уравнения 2.5) для описанной выше пластины при изменении относительной толщины внешнего слоя a от 0 до 1. Точка $a=0$ соответствует однородной пластине $h=0,02$ м, изготовленной из пенополиуретана, для которой согласно [6] $\alpha_1 = \pi/2 (\mu_*/\rho_*)^{1/2}$, однородной алюминиевой пластине соответствует значение $\alpha_1 = \pi/2$ [6]. Из графика фиг. 1 следует, что функция $\alpha_1(a)$ близка к постоянной в широком диапазоне изменения относительной толщины a (0,3÷0,7), при этом значение частотного параметра α_1 существенно ниже значения α_1 для пластины из пенополиуретана.

На фиг. 2 приводится график зависимости, построенный по результатам вычисления первого ненулевого корня уравнения (2.4). Однородной алюминиевой пластине соответствует точка $a=1$, $\beta_1=\pi$ для пластины из пенополиуретана $a=0$, $\beta_1 = \pi (\mu_*/\rho_*)^{1/2}$. Из графика следует, что для ветви $L_{||}(1)$ также имеет место эффект понижения собственной частоты колебаний трехслойной пластины по сравнению с однородной пластиной, изготовленной из материала заполнителя. Однако, поскольку не удается построить асимптотику решения уравнения (2.4) при $\mu_* \rightarrow 0$, предсказать положение минимума функции $\beta_1(a)$ нельзя не проводя численного счета.

Таким образом, расчеты показывают, что для неоднородных пластин, особенно при сильном различии механических характеристик слоев, наблюдается значительное понижение собственных частот первых высокочастотных ветвей колебаний, поэтому эффекты, связанные с наличием высокочастотных форм, проявляются существенным образом практически во всех задачах динамики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рязанцева М. Ю. Изгибные колебания трехслойных пластин симметричного строения // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 3. С. 153—159.
2. Григолюк Э. И., Селезов И. Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. М.: ВИНТИ, 1973. 272 с.
3. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1973. 536 с.
4. Lamb H. On waves in an elastic plate // Proc. Long Math. Soc. 1889/1890. V. 21. № 360. P. 70—90.
5. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 283 с.
6. Бердичевский В. Л., Ле Хань Чау. Высокочастотные колебания оболочек // Докл. АН СССР. 1982. Т. 267. № 3. С. 584—589.

Москва

Поступила в редакцию
10.III.1989