

УДК 539.3:534.1

Д. Г. ВАСИЛЬЕВ, А. Л. ГОЛЬДЕНВЕЙЗЕР, Е. В. НОЛЬДЕ

### ВЫСОКОЧАСТОТНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ТОНКОЙ УПРУГОЙ ОБОЛОЧКИ

Рассматривается погруженная в сжимаемую жидкость гладкая замкнутая выпуклая оболочка вращения с произвольным меридианом  $x=X(s)$ ,  $y=Y(s)$  ( $s \in [0, l]$  — переменная длина дуги меридиана,  $Oy$  — ось вращения). Исследуется задача о вынужденных колебаниях системы «оболочка — жидкость», возникающих в результате приложенных вдоль параллели  $s=s_0$  сил, гармонически пульсирующих во времени как  $\exp(-i\omega t)$  ( $\omega > 0$  — круговая частота). Асимптотическим (при  $h_* = h/R \rightarrow 0$ ,  $h$  — полутолщина оболочки,  $R$  — характерный радиус кривизны) методом получены формулы (3.21), (3.22), (4.10), (4.12), (4.15) для мощности акустического излучения.

1. Постановка задачи. Уравнения задачи имеют вид:

уравнения движения оболочки (по повторяющимся индексам проводится суммирование)

$$2Eh(1-i\gamma)L_{pq}u_q = 2\rho_s h \omega^2 u_p + f_p \quad (p=1, 2; q=1, 2, 3) \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} 2Eh(1-i\gamma) \left[ \frac{1}{3} h^2 \Delta_\Gamma^2 u_3 / (1-\nu^2) + L_{3q} u_q \right] = \\ = 2\rho_s h \omega^2 u_3 + f_3 + \rho_f \omega^2 \psi|_{\eta=0} \quad (q=1, 2, 3) \end{aligned} \quad (4.2)$$

уравнение движения жидкости

$$\Delta\psi + (\omega^2/c_f^2)\psi = 0 \quad (4.3)$$

условие непротекания

$$u_3 = -(\partial\psi/\partial\eta)|_{\eta=0} \quad (4.4)$$

условие излучения Зоммерфельда

$$\partial\psi/\partial\eta - i(\omega/c_f)\psi = o(\eta^{-1}) \quad (\eta \rightarrow +\infty) \quad (4.5)$$

Здесь  $u_p(\alpha)$  — компоненты вектора перемещений срединной поверхности оболочки  $\Gamma$ , причем  $u_3(\alpha)$  — прогиб, отсчитываемый вовнутрь;  $f_p(\alpha)$  — компоненты вектора внешних нагрузок;  $\psi(\alpha, \eta)$  — потенциал перемещений жидкости;  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$  — локальные координаты на  $\Gamma$ ;  $0 \leq \eta < +\infty$  — расстояние до  $\Gamma$ ;  $L_{pq}$  — безмоментные дифференциальные операторы теории оболочек [1, с. 77];  $\Delta_\Gamma$  — поверхностный оператор Лапласа [1, с. 67];  $\Delta$  — трехмерный оператор Лапласа;  $\psi|_{\eta=0}$  и  $(\partial\psi/\partial\eta)|_{\eta=0}$  — значение  $\psi$  и нормальной производной  $\psi$  на  $\Gamma$ ;  $E$  — модуль Юнга;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $\rho_s$  и  $\rho_f$  — плотности материала оболочки и жидкости;  $c_s = (E/\rho_s)^{1/2}$  и  $c_f$  — скорости звука в материале оболочки и в жидкости;  $\gamma > 0$  — безразмерный параметр, характеризующий конструктивное трение в оболочке. Временной множитель  $\exp(-i\omega t)$  во всех соотношениях отделен. Функции  $f_p(\alpha)$  заданы, а  $u_p(\alpha)$ ,  $\psi(\alpha, \eta)$  — искомые функции.

Конечная цель работы — вычисление мощности акустического излучения оболочки (энергии, излучаемой на бесконечность в единицу времени), определяемой формулой

$$P = \frac{\rho_f \omega^3}{2} \operatorname{Im} \iint_\Gamma \bar{\psi}|_{\eta=0} \left( \frac{\partial\psi}{\partial\eta} \right)_{\eta=0} dS \quad (4.6)$$

В дальнейшем предполагается, что  $\Gamma$  — поверхность вращения;  $\alpha_1 = s$ ,  $\alpha_2 = \varphi$  (угловая координата). Предполагается также, что нагрузка кольцевая

$$f_p = g_p \exp(im\varphi) \delta(s-s_0) \quad (p=1, 2, 3) \quad (4.7)$$

где  $g_p$  — константы (нагрузка, приходящаяся на единицу загруженной параллели),  $m$  — целое число волн по параллели,  $\delta(\cdot)$  — дельта-функция Дирака.

В этих предположениях угловая координата отделяется и множитель  $\exp(im\varphi)$  можно всюду опустить. Отделив угловую координату, сохраним для всех операторов старые обозначения. Теперь  $\Delta_\Gamma$ ,  $L_{pq}$  — обыкновенные дифференциальные операторы, в то время как  $\Delta$  — по-прежнему оператор в частных производных

$$\Delta = (1 + \eta R_1^{-1})^{-2} \partial^2 / \partial s^2 - m^2 [X(1 + \eta R_2^{-1})]^{-2} + \\ + \{X_s' [X(1 + \eta R_1^{-1})(1 + \eta R_2^{-1})]^{-1} - \eta (R_1^{-1})_s' (1 + \eta R_1^{-1})^{-3}\} \partial / \partial s + \\ + \partial^2 / \partial \eta^2 + [R_1^{-1}(1 + \eta R_1^{-1})^{-1} + R_2^{-1}(1 + \eta R_2^{-1})^{-1}] \partial / \partial \eta$$

Здесь  $R_1^{-1} = X_s' Y_{ss}'' - Y_s' X_{ss}''$ ,  $R_2^{-1} = Y_s' / X$  — главные кривизны  $\Gamma$ .

После отделения координаты  $\varphi$  на искомые функции необходимо наложить естественные условия ограниченности в вершинах

$$[u_1, u_2, u_3, \Delta_\Gamma u_3, \psi]_{s=+0, l-0} \neq \infty \quad (1.8)$$

С учетом (1.4) формула (1.6) после отделения угловой координаты принимает вид

$$P = -\pi \rho_l \omega^3 \operatorname{Im} \int_0^l \bar{\psi}|_{\eta=0} u_3(s) X(s) ds \quad (1.9)$$

**2. Асимптотические параметры.** Будем предполагать, что все безразмерные физические параметры системы оболочка — жидкость связаны с основным асимптотическим параметром  $h_*$  следующим образом

$$\rho_l / \rho_s \sim h_*^{1/2}, \quad c_l / c_s \sim h_*^{1/4}, \quad \ln \gamma \sim \ln h_* \quad (2.1)$$

Два первых соотношения (2.1) выбраны из того расчета, чтобы по возможности описать задачу о колебаниях погруженной в воду стальной оболочки с характерной относительной полутолщиной  $\approx 1/200$ . Третье соотношение (2.1) — техническое требование, наложенное в интересах обоснования асимптотического метода. В практических задачах, например, когда  $h_*$  и  $\gamma$  лежат в диапазоне от 0,001 до 0,1, это требование выполняется.

Будем рассматривать диапазон высоких частот, определив его соотношением

$$\omega R / c_s \sim h_*^{-\beta} \quad (1/4 < \beta < 1) \quad (2.2)$$

а число волн по параллели для определенности будем предполагать не слишком большим

$$m \leq (\omega R / c_s)^{\chi} \quad (\chi < 1/2) \quad (2.3)$$

(случай больших  $m$  рассматривается аналогично с учетом появления переходных линий и поверхностей [1, 2]).

В работе А. Л. Гольденвейзера и А. Л. Радовинского<sup>1</sup> указан общий метод решения подобных задач. В диапазоне высоких частот (2.2) предлагается на первом этапе при получении компонент вектора перемещений  $u_p$  рассчитывать оболочку как сухую (здесь и ниже под сухой подразумевается оболочка, колеблющаяся в вакууме; слагаемое  $\rho_l \omega^2 \psi|_{\eta=0}$  в (1.2); описывающее давление жидкости на оболочку, отбрасывается). На оболочке различаются колебания двух типов — преимущественно тангенциальные (кваситангенциальные) и преимущественно изгибные (квасиперечные). Первые строятся в главном по динамическим уравнениям плоской теории, для получения вторых можно в главном пользоваться ди-

<sup>1</sup> Гольденвейзер А. Л., Радовинский А. Л. Асимптотический анализ колебаний и излучение оболочки вращения в жидкости: Препринт № 275. М.: ИПМ АН СССР, 1986.

намическим аналогом теории напряженных состояний с большой изменчивостью [3]. В данной работе предложенная схема доводится до конкретных результатов. При этом она несколько модифицируется: уже на первом этапе расчета действие жидкости принимается во внимание. Такая модификация желательна, поскольку оказывается, что при некоторых (квазирезонансных, см. ниже) частотах, исключенных из рассмотрения в работе Гольденвейзера и Радовинского, неучет давления жидкости в (1.2) приводит к значительной ошибке в прогибе. В случае тангенциальной нагрузки это влечет и большую ошибку в мощности излучения.

**3. Случай тангенциальной нагрузки.** Поскольку задача линейна, достаточно ее решить для единичной нагрузки

$$g_p = \delta_{pi} \quad (p=1, 2, 3) \quad (3.1)$$

Индекс  $j$ , характеризующий направленность внешней нагрузки, пробегает значения 1, 2, что отвечает случаю меридиональной и крутильной нагрузки соответственно. Предварительный расчет сухой оболочки позволяет установить общий характер решения. Хотя на оболочке имеют место колебания двух типов, в случае тангенциальной нагрузки основной вклад в энергию, излучаемую на бесконечность, дают квазитангенциальные колебания. При этом их длины волн<sup>2</sup> ( $\sim c_s/\omega$ ) в силу второго условия (2.1) соотносятся с длиной волны в жидкости ( $\sim c_f/\omega$ ) как  $h_*^{-1/4}$ . Это позволяет асимптотически решать уравнение Гельмгольца

$$\psi = \exp(i\kappa\eta) \sum_{n=1}^{+\infty} \Psi_n(s, \eta) \kappa^{-n} \quad (\kappa = \omega/c_f) \quad (3.2)$$

Здесь  $\kappa_* = \kappa R \gg 1$  — большой параметр,  $\Psi_n(s, \eta)$  — не зависящие от параметра  $\kappa$  бесконечно гладкие функции, стремящиеся при  $\eta \rightarrow +\infty$  к нулю как  $O(\eta^{-1})$  (предполагается, что оболочка имеет строго положительную кривизну). Знак в показателе экспоненты выбран в соответствии с условием излучения Зоммерфельда (1.5). Заметим, что разложение (3.2) равномерно по всему бесконечному объему жидкости, но нам оно понадобится лишь в окрестности Г.

Неизвестные функции  $\Psi_n(s, \eta)$  могут быть найдены путем подстановки (3.2) в (1.3), (1.4) с учетом (1.8). В частности, для  $\Psi_1$  получаем

$$\Psi_1 = iu_3 [1 + (R_1^{-1} + R_2^{-1})\eta + R_1^{-1}R_2^{-1}\eta^2]^{-1/2} \quad (3.3)$$

Подставляя (3.3) в (3.2),  $\eta=0$ , и удерживая лишь старший по  $\kappa$  член, получим

$$\psi|_{\eta=0} \approx i\omega^{-1}c_f u_3 \quad (3.4)$$

Соотношение (3.4) имеет ясный физический смысл: оно отвечает приближенному представлению потенциала перемещений жидкости в окрестности оболочки в виде плоской волны  $\psi \approx \psi|_{\eta=0} \exp(i\omega c_f^{-1}\eta)$ .

Представление (3.4) позволяет перейти от исследуемой системы (1.1)–(1.5) к замкнутой системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$2Eh(1-i\gamma)L_{pq}u_q = 2\rho_s h\omega^2 u_p + g_p \delta(s-s_0) \quad (p=1, 2; q=1, 2, 3) \quad (3.5)$$

$$2Eh(1-i\gamma)L_{3q}u_q = 2\rho_s h\omega^2 u_3 + i\rho_f \omega c_f u_3 \quad (q=1, 2, 3) \quad (3.6)$$

решения которой надо строить только на оболочке. Стоящий в правой части (3.6) множитель  $i\rho_f \omega c_f$  естественно называть комплексным коэффициентом присоединенной массы.

Поясним также, что при написании (3.6) моментный член был отброшен в соответствии с асимптотическим анализом<sup>3</sup>, показывающим, что при

<sup>2</sup> В литературе по механике обычно принято характеризовать напряженно-деформированное состояние не длиной волны  $\lambda$ , а показателем изменчивости  $p$ . Эти величины связаны между собой соотношением  $\lambda = h_*^p R$ .

<sup>3</sup> См. указ. публ. с 159.

нахождении мощности акустического излучения в случае тангенциальной нагрузки изгибные явления можно в главном не учитывать.

Систему (3.5), (3.6), (1.8) будем решать методом экспоненциального представления. Будем искать решения однородной ( $g_p=0$ ,  $p=1, 2$ ) задачи (3.5), (3.6) в форме

$$u_p(s) = a_p^\pm(s) \exp \left[ \pm i \int_{s_0}^s k(\sigma) d\sigma \right] \quad (p=1, 2, 3) \quad (3.7)$$

Здесь  $k(s)$  — неизвестная функция изменяемости,  $kR \gg 1$ ,  $d^r k/ds^r \sim kR^{-r}$ ,  $r=1, 2, \dots$ ;  $a_p^\pm(s)$  — неизвестные функции интенсивности (функции изменяемости и интенсивности называют также фазовыми и амплитудными функциями соответственно),  $d^r a_p^\pm/ds^r \sim a_p^\pm R^{-r}$ . Подставляя вектор-функцию (3.7) в уравнения (3.5), (3.6) и удерживая главные члены, после несложных выкладок для функций изменяемости получаем

$$k_1(s) = \frac{\omega(1-\nu^2)^{1/2}}{c_s} \left\{ 1 + \frac{i}{2} \left[ \gamma + \frac{(R_1^{-1} + \nu R_2^{-1})^2 \rho_f c_f E}{2\rho_s^2(1-\nu^2)h\omega^3\mu} \right] \right\} \quad (3.8)$$

$$k_2(s) = \frac{\omega[2(1+\nu)]^{1/2}}{c_s} \left\{ 1 + \frac{i}{2} \left[ \gamma + \frac{m^2(R_2^{-1} - R_1^{-1})^2 \rho_f c_f c_s^4}{2\rho_s(1+\nu)^2 h\omega^5 X^2 \mu} \right] \right\} \quad (3.9)$$

$$\mu = 1 + \xi^2, \quad \xi = \rho_f c_f / (2\rho_s h\omega) \quad (3.10)$$

Удерживая в выкладках следующие члены разложения, получаем с точностью до мультипликативной константы функции интенсивности, соответствующие  $k_1$  и  $k_2$ :

$$\begin{bmatrix} a_1^\pm \\ a_2^\pm \\ a_3^\pm \end{bmatrix} = X^{-1/2} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm m/(Xk_1) \\ \mp i(R_1^{-1} + \nu R_2^{-1})/[k_1(1+i\xi)] \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$\begin{bmatrix} a_1^\pm \\ a_2^\pm \\ a_3^\pm \end{bmatrix} = X^{-1/2} \begin{bmatrix} \mp m/(Xk_2) \\ 1 \\ -2im(R_2^{-1} - R_1^{-1})/[k_2^2 X(1+i\xi)] \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Заметим, что при получении функций изменяемости мы действовали не совсем последовательно, удержав члены с  $i\rho_f \omega c_f$ ,  $i\gamma$  в (3.5), (3.6), что дало мнимую часть (3.8), (3.9), которая, как легко видеть, асимптотически мала по сравнению с вещественной. Правильнее было бы члены с  $i\rho_f \omega c_f$ ,  $i\gamma$  учесть при вычислении функций интенсивности. Однако использованный нами подход, не меняя конечного результата, позволяет упростить выкладки.

Асимптотические представления (3.7) — (3.12) непригодны в окрестности вершин  $s=0, l$ , где система координат  $(s, \varphi, \eta)$  имеет особенность и, как следствие, особенность имеют функции интенсивности. Приступим к построению асимптотик в окрестности вершин и удовлетворению условий (1.8). Прежде всего устраним техническую трудность, связанную с тем, что функций  $u_1, u_2$  не инвариантны относительно поворота системы координат, что усложняет их исследование в окрестности вершин. Для этого введем вместо  $u_p$  величины  $w_p$ , связанные соотношением<sup>4</sup>

$$\mathbf{u} = T \mathbf{w} \quad (3.13)$$

$$T = \begin{bmatrix} d/ds & im/X & 0 \\ im/X & -d/ds & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Здесь  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{w}$  — столбцы, составленные сверху вниз из  $u_p$  и  $w_p$  ( $p=1, 2, 3$ )

<sup>4</sup> См. также Васильев Д. Г., Симонов И. В. Асимптотические оценки комплексных частот колебаний оболочки в жидкости: Препринт № 186. М.: ИПМ АН СССР, 1981.

соответственно:  $w_1$  — скалярный потенциал сжатия,  $w_2$  — псевдоскалярный потенциал сдвига,  $w_3 \equiv u_3$ .

Вблизи обеих вершин функции  $w_p$  ведут себя как функции Бесселя  $m$ -го порядка

$$w_p(s) \sim J_m(K(s)) \quad (3.14)$$

$$K(s) = K_j^+(s) \equiv \int_0^s k_j(\sigma) d\sigma \quad (j=1, 2; s \in [0, l - \varepsilon R]) \quad (3.15)$$

$$K(s) = K_j^-(s) \equiv \int_s^l k_j(\sigma) d\sigma \quad (j=1, 2; s \in [\varepsilon R, l]) \quad (3.16)$$

$\varepsilon$  — малое положительное число. Используя известную асимптотическую формулу

$$J_m(\rho) = (\frac{1}{2}\pi\rho)^{-1/2} \cos(\rho^{-1/2}m\pi - \frac{1}{4}\pi) + O(\rho^{-3/2}) \quad (\rho \rightarrow +\infty) \quad (3.17)$$

можно от асимптотик (3.13) — (3.16) перейти к исходным асимптотикам (3.7) — (3.12), т. е. указать линейные комбинации осциллирующих экспонент (3.7), продолжимые регулярным образом в вершины; это позволяет эффективно выписать условия в вершинах.

Решение неоднородной задачи (3.5), (3.6) слева и справа от загруженной параллели ищется в виде линейной комбинации четырех решений (3.7) однородной задачи. Восемь неизвестных констант определяются из восьми линейных соотношений: четырех краевых условий в вершинах (по два условия в каждой) и четырех условий на  $s=s_0$  (непрерывность  $u_1, u_2$  и нужные скачки  $u_1', u_2'$ , см. (3.5)). Опуская промежуточные выкладки, приведем асимптотические выражения для компонент вектора перемещений, справедливые на всей оболочке за исключением непосредственной окрестности вершин.

В случае меридиональной нагрузки имеем

$$u_p = \frac{(-1)^{m+1}k_1}{2\rho_s h\omega^2} \left( \frac{X(s_0)}{X(s)} \right)^{1/2} \left\{ \frac{\sin(K_1^\mp(s_0) - \frac{1}{2}m\pi - \frac{1}{4}\pi)}{\cos(K_1^+(l))} b_p^\pm \pm \frac{im \cos(K_2^\mp(s_0) - \frac{1}{2}m\pi - \frac{1}{4}\pi)}{X(s_0)k_1 \cos(K_2^+(l))} d_p^\pm \right\} \quad (p=1, 2, 3) \quad (3.18)$$

В случае крутильной нагрузки

$$u_p = \frac{(-1)^{m+1}k_2}{2\rho_s h\omega^2} \left( \frac{X(s_0)}{X(s)} \right)^{1/2} \left\{ \mp \frac{im \cos(K_1^\mp(s_0) - \frac{1}{2}m\pi - \frac{1}{4}\pi)}{X(s_0)k_2 \cos(K_1^+(l))} b_p^\pm + \frac{\sin(K_2^\mp(s_0) - \frac{1}{2}m\pi - \frac{1}{4}\pi)}{\cos(K_2^+(l))} d_p^\pm \right\} \quad (p=1, 2, 3) \quad (3.19)$$

$$\begin{bmatrix} b_1^\pm \\ b_2^\pm \\ b_3^\pm \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(K_1^\pm(s) - \frac{1}{2}m\pi - \frac{1}{4}\pi) \\ \mp im(k_1 X)^{-1} \cos(K_1^\pm(s) - \frac{1}{2}m\pi - \frac{1}{4}\pi) \\ \mp (R_1^{-1} + \nu R_2^{-1}) [k_1(1 + i\zeta)]^{-1} \cos(K_1^\pm(s) - \frac{1}{2}m\pi - \frac{1}{4}\pi) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} d_1^\pm \\ d_2^\pm \\ d_3^\pm \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm im(k_2 X)^{-1} \cos(K_2^\pm(s) - \frac{1}{2}m\pi - \frac{1}{4}\pi) \\ \sin(K_2^\pm(s) - \frac{1}{2}m\pi - \frac{1}{4}\pi) \\ -2im(R_2^{-1} - R_1^{-1}) [k_2^2(1 + i\zeta) X]^{-1} \sin(K_2^\pm(s) - \frac{1}{2}m\pi - \frac{1}{4}\pi) \end{bmatrix}$$

Нижний знак в (3.18), (3.19) берется при  $s \in [s_0, l - \varepsilon R]$ , верхний — при  $s \in [\varepsilon R, s_0]$ . Поясним также, что фазовый сдвиг на  $\frac{1}{2}m\pi + \frac{1}{4}\pi$  — это влияние вершин, ср. (3.17).

Как и следовало ожидать, в (3.18), (3.19)  $u_3 \ll (u_1, u_2)$ ; в этом легко убедиться, проследив за вхождением  $k_p$  ( $p=1, 2$ ) с учетом того, что в силу (2.1) — (2.3)  $k_p R \gg 1$ ,  $k_p R \gg m$ . Таким образом, построенное решение действительно квазитангенциально.

Вернемся к мощности акустического излучения. Приближенное представление (3.4) дает возможность упростить формулу (1.9):

$$P = \pi \rho_f \omega^2 c_f \int_0^l |u_3(s)|^2 X(s) ds \quad (3.20)$$

Подставляя в (3.20) поочередно прогиб  $u_3$  из (3.18), (3.19) и интегрируя (тем обстоятельством, что формулы (3.18), (3.19) несправедливы в непосредственной окрестности вершин, можно здесь пренебречь, так как интегральный вклад этих окрестностей в излучение мал), получаем для мощности акустического излучения следующие асимптотические выражения:

в случае меридиональной нагрузки

$$P = \frac{\pi \rho_f c_f X(s_0)}{2(\rho_s h \omega)^2 \mu} \times \left[ \frac{|\sin(K_1^+(s_0) - 1/2 m \pi - 1/4 \pi)|^2 I_1 + |\sin(K_1^-(s_0) - 1/2 m \pi - 1/4 \pi)|^2 I_2}{|\cos(K_1^+(l))|^2} + m^4 \frac{|\cos(K_2^+(s_0) - 1/2 m \pi - 1/4 \pi)|^2 I_3 + |\cos(K_2^-(s_0) - 1/2 m \pi - 1/4 \pi)|^2 I_4}{(X(s_0) \operatorname{Re} k_2)^4 |\cos(K_2^+(l))|^2} \right] \quad (3.21)$$

в случае крутильной нагрузки

$$P = \frac{\pi \rho_f c_f m^2}{2(\rho_s h \omega)^2 X(s_0) \mu} \times \left[ \frac{|\cos(K_1^+(s_0) - 1/2 m \pi - 1/4 \pi)|^2 I_1 + |\cos(K_1^-(s_0) - 1/2 m \pi - 1/4 \pi)|^2 I_2}{(\operatorname{Re} k_1)^2 |\cos(K_1^+(l))|^2} + \frac{|\sin(K_2^+(s_0) - 1/2 m \pi - 1/4 \pi)|^2 I_3 + |\sin(K_2^-(s_0) - 1/2 m \pi - 1/4 \pi)|^2 I_4}{(\operatorname{Re} k_2)^2 |\cos(K_2^+(l))|^2} \right] \quad (3.22)$$

Здесь  $k_j, K_j^\pm$  ( $j=1, 2$ ),  $\mu$  — те же, что и в (3.8), (3.9), (3.15), (3.16), (3.10). Через  $I_n$  ( $n=1, \dots, 4$ ) обозначены следующие интегралы

$$I_1 = \frac{1}{4} \int_{s_0}^l (R_1^{-1} + \nu R_2^{-1})^2 \operatorname{ch}(2 \operatorname{Im} K_1^-(s)) ds,$$

$$I_2 = \frac{1}{4} \int_0^{s_0} (R_1^{-1} + \nu R_2^{-1})^2 \operatorname{ch}(2 \operatorname{Im} K_1^+(s)) ds$$

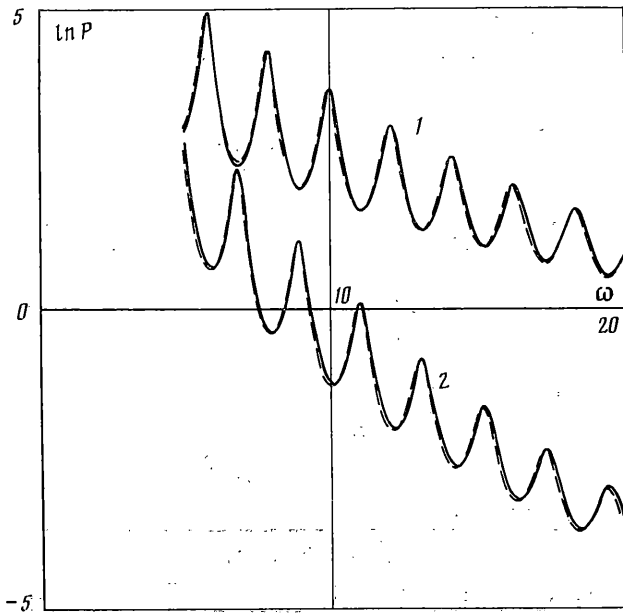
$$I_3 = [X(s_0)]^2 \int_{s_0}^l \left( \frac{R_2^{-1} - R_1^{-1}}{X} \right)^2 \operatorname{ch}(2 \operatorname{Im} K_2^-(s)) ds$$

$$I_4 = [X(s_0)]^2 \int_0^{s_0} \left( \frac{R_2^{-1} - R_1^{-1}}{X} \right)^2 \operatorname{ch}(2 \operatorname{Im} K_2^+(s)) ds$$

Из анализа (3.21), (3.22) видно, что когда на дуге  $l$  укладывается полуцелое число квазитангенциальных полуволн, имеет место квазирезонанс мощности излучения, т. е. резкий, меняющий асимптотический порядок, но конечный подскок.

Для проверки полученных формул (3.21), (3.22) была рассчитана погруженная в воду стальная сферическая оболочка

$$h=0,005; \quad \gamma=0,05; \quad \rho_f=0,127; \quad c_f=0,286; \quad \nu=0,3; \quad m=2 \quad (3.23)$$



Фиг. 1

возбуждаемая вдоль экватора. Здесь и далее в численных примерах используется система единиц

$$E=1, \rho_s=1, R=1. \quad (3.24)$$

что приводит к удобному обезразмериванию ( $R$  — радиус сферы). На фиг. 1 изображена частотная зависимость логарифма мощности акустического излучения. Графики, отвечающие случаям меридионального и крутильного возбуждения, отмечены цифрами 1, 2 соответственно. Диапазон частот взят от 5 до 20. Сплошные линии — это результат полного численного решения задачи, штриховые — асимптотики (3.21), (3.22). Сплошные и штриховые линии практически слились. Хорошо видны квази-резонансы.

**4. Случай нормальной нагрузки.** Пусть параллель  $s=s_0$  загружена нормальной единичной силой (1.7), (3.1),  $j=3$ . В этом случае на оболочке по-прежнему возбуждаются колебания двух типов — квазитангенциальные и квазипоперечные — причем амплитуда квазипоперечных теперь существенно преобладает. Отсюда, однако, нельзя сразу сделать вывод о преобладающем вкладе квазипоперечных колебаний в мощность излучения, поскольку излучательная способность квазитангенциальных и квазипоперечных колебаний различна. Но детальный асимптотический анализ показывает, что в обсуждаемом диапазоне частот такой вывод правилен. Поэтому ниже при вычислении мощности излучения учитываются только квазипоперечные формы. Вклад в мощность излучения квазитангенциальных форм может быть учтен аналогично п. 3 и оказывается в диапазоне (2.2) асимптотически малым по сравнению с вкладом квазипоперечных.

Ход решения задачи будет зависеть от того, какая из длин больше: длина волны в жидкости или длина квазипоперечной волны на оболочке. В дальнейшем будем называть частотой совпадения  $\omega_c$  частоту, при которой эти длины совпадают. Очевидные выкладки дают для  $\omega_c$  следующее выражение

$$\omega_c = [3(1-\nu^2)]^{1/2} c_f^2 / (c_s h) \quad (4.1)$$

Заметим, что частота совпадения имеет порядок  $h_*^{-1/2} c_s R^{-1}$ .

*Случай 1.* Длина волны в жидкости больше длины квазипоперечной волны на оболочке ( $\omega \ll \omega_c$ ). Это соответствует диапазону частот (2.2), где  $\beta < 1/2$ . Характер решения на оболочке можно установить, считая ее в нулевом приближении сухой и, более того, рассчитывая ее по теории напряженных состояний с большой изменяемостью. Соответствующие приближенные уравнения аналогичны по структуре уравнениям изгибных колебаний пластины. Видно, что решение складывается из сильно осциллирую-

щей части, распространяющейся далеко от загруженной параллели, и краевого эффекта. Здесь под динамическим краевым эффектом понимается происходящее в окрестности загруженной параллели нарушение чисто осциллирующего по  $s$  характера решения (результат наличия двух затухающих экспонент и скачков фазы двух осциллирующих экспонент). Решая асимптотически уравнение Гельмгольца в пристеночном слое, легко убедиться, что сильно осциллирующая часть прогиба даст экспоненциальное затухание вглубь жидкости (ср., например, [2, 4]). Краевой же эффект, будучи передан на жидкость, не дает экспоненциального затухания потенциала перемещений  $\psi$ . Таким образом, излучение носит локальный характер, излучает только узкий, непосредственно примыкающий к загруженной параллели (шириной порядка длины квазипоперечной волны) пояс оболочки. Сказанное позволяет перейти от задачи об оболочке вращения к аналогичной задаче о пластине (в каждой точке  $M$  загруженной параллели оболочку заменяем бесконечной пластиной, причем их нормали в точке  $M$  совпадают).

Таким образом, от системы (1.1)–(1.3) мы переходим к следующей системе уравнений

$$\frac{2Eh^3(1-i\gamma)}{3(1-\nu^2)} \frac{\partial^4 u_3}{\partial z^4} = 2\rho_s h \omega^2 u_3 + \delta(z) + \rho_f \omega^2 \psi|_{\eta=0} \quad (4.2)$$

$$(\partial^2/\partial z^2 + \partial^2/\partial \eta^2)\psi + (\omega^2/c_f^2)\psi = 0 \quad (4.3)$$

Здесь  $-\infty < z < +\infty$ ,  $0 \leq \eta < +\infty$  — координаты, отсчитываемые от точки  $M$  по касательной к пластине и по нормали. По-прежнему выполняется условие непротекания (1.4) и условие излучения Зоммерфельда

$$\partial\psi/\partial r - i(\omega/c_f)\psi = o(r^{-1}), \quad r = (z^2 + \eta^2)^{1/2} \rightarrow +\infty \quad (4.4)$$

Система (4.2)–(4.4), (1.4) может быть решена методом преобразования Фурье. Для преобразования Фурье от  $\psi(z, \eta)$

$$\psi^F(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(z, \eta) \exp(-i\xi z) dz$$

получаем

$$\psi^F(\xi, \eta) = \frac{i u_3^F(\xi)}{[(\omega/c_f)^2 - \xi^2]^{1/2}} \exp(i\eta[(\omega/c_f)^2 - \xi^2]^{1/2}) \quad \left(|\xi| < \frac{\omega}{c_f}\right) \quad (4.5)$$

$$\psi^F(\xi, \eta) = \frac{u_3^F(\xi)}{[\xi^2 - (\omega/c_f)^2]^{1/2}} \exp(-\eta[\xi^2 - (\omega/c_f)^2]^{1/2}) \quad \left(|\xi| > \frac{\omega}{c_f}\right) \quad (4.6)$$

где  $u_3^F(\xi)$  — фурье-образ прогиба  $u_3(z)$ . Используя унитарность преобразования Фурье, перепишем мощность акустического излучения (1.9) в виде

$$P = -\frac{\rho_f \omega^3 X(s_0)}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\psi^F}|_{\eta=0} u_3^F d\xi \quad (4.7)$$

Подставляя (4.5), (4.6) в (4.7) и замечая, что при  $|\xi| > \omega/c_f$  подынтегральное выражение (4.7) вещественно, получаем

$$P = \frac{\rho_f \omega^3 X(s_0)}{2} \int_{-\omega/c_f}^{\omega/c_f} [(\omega/c_f)^2 - \xi^2]^{-1/2} |u_3^F(\xi)|^2 d\xi \quad (4.8)$$

Из (4.2), (4.5) выводим

$$u_3^F(\xi) = \left( \frac{2Eh^3(1-i\gamma)}{3(1-\nu^2)} \xi^4 - 2\rho_s \omega^2 h - \frac{i\rho_f \omega^2}{[(\omega/c_f)^2 - \xi^2]^{1/2}} \right)^{-1} \quad (4.9)$$

Подставляя (4.9) в (4.8) и пренебрегая малым коэффициентом  $\gamma$ , по-



лучаем окончательную формулу для мощности акустического излучения

$$P = \frac{\rho_f X(s_0)}{8h^2 \rho_s^2 \omega} \int_{-\omega/c_f}^{\omega/c_f} \frac{[(\omega/c_f)^2 - \xi^2]^{1/2} d\xi}{(1 - (\xi/k_0)^4)^2 ((\omega/c_f)^2 - \xi^2) + [\rho_f / (2h\rho_s)]^2} \quad (4.10)$$

$$k_0 = [\omega / (c_s h)]^{1/2} [3(1 - \nu^2)]^{1/4} \quad (4.11)$$

Интеграл (4.10) трудно взять аналитически. Однако он может быть найден приближенно с относительной погрешностью  $O(h^{1-2\beta})$  (см. (2.2),  $\beta < 1/2$ ), если в знаменателе пренебречь членом  $(\xi/k_0)^4$  по сравнению с 1

$$P = \pi \rho_f X(s_0) (8h^2 \rho_s^2 \omega)^{-1} \{1 - (1 + [2\rho_s h \omega / (\rho_f c_f)]^2)^{-1/2}\} \quad (4.12)$$

Формулы (4.10), (4.12) предсказывают плавный (нерезонансный) характер зависимости мощности излучения от частоты, хотя рассматриваемый частотный диапазон содержит большое количество изгибных собственных частот (положение их вещественных частей с большой точностью может быть найдено по асимптотике [5]). При малом  $\gamma$  в окрестности указанных частот наблюдаются квазирезонансы перемещений. Однако на дальнейшее акустическое поле они не влияют, так как соответствующие формы сильно затухают вглубь жидкости, а величина квазирезонансных подскоков имеет конечный по  $h$ . порядок (см. последнее соотношение (2.1)).

*Случай 2.* Длина волны в жидкости меньше длины квазипоперечной волны на оболочке ( $\omega \gg \omega_c$ ). Это соответствует частотному диапазону (2.2), где  $\beta > 1/2$ . В отличие от случая 1 от загруженной параллели теперь распространяется осциллирующее по  $s$  решение, свободное от экспоненциального затухания по  $\eta$ . Но, как показывает асимптотический анализ в следующем порядке точности, в данном случае осциллирующая компонента модулируется некоторой экспонентой, затухающей при удалении вдоль оболочки от загруженной параллели (функция интенсивности). Волна не доходит до вершин, и излучение вновь имеет локальный характер (излучает лишь некоторый, прилегающий к загруженной параллели, пояс, охватывающий порядка десятка длин квазипоперечных волн). Это позволяет снова перейти от задачи об оболочке вращения к задаче о бесконечной пластине.

Аналогично случаю 1 для мощности акустического излучения получаем

$$P = \frac{\rho_f X(s_0) k_0^8}{8h^2 \rho_s^2 \omega} \int_{-\omega/c_f}^{\omega/c_f} \frac{d\xi}{[(\omega/c_f)^2 - \xi^2]^{1/2} |\xi^4 - k_3^4|^2} \quad (4.13)$$

$$k_3 = k_0 (1 + 1/4 i \{\gamma + \rho_f (2\rho_s h)^{-1} [(\omega/c_f)^2 - k_0^2]\}^{-1/2}) \quad (4.14)$$

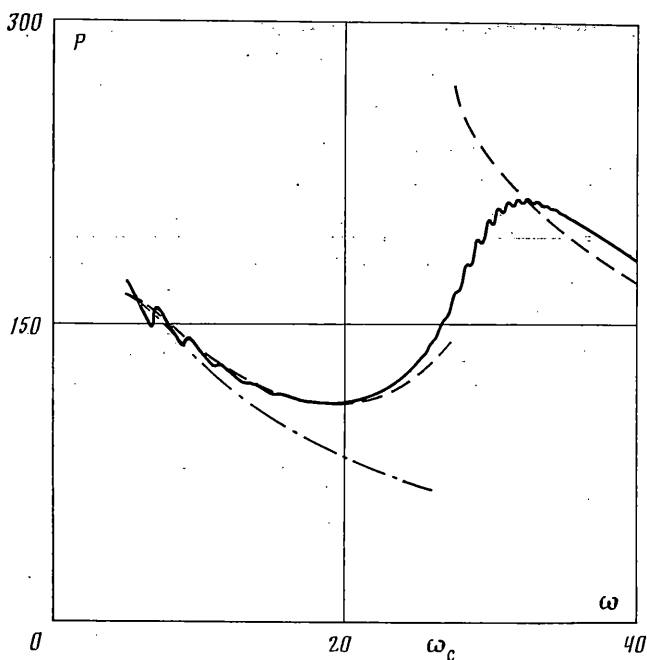
Мнимая часть волнового числа (4.14) описывает затухание квазипоперечной волны вдоль оболочки при удалении от загруженной параллели.

При сделанных асимптотических предположениях основной вклад в интеграл (4.13) дают окрестности точки  $\xi = \pm k_0$ . Выделяя полюсной член, получаем окончательное выражение для мощности акустического излучения при частотах, больших, чем частота совпадения

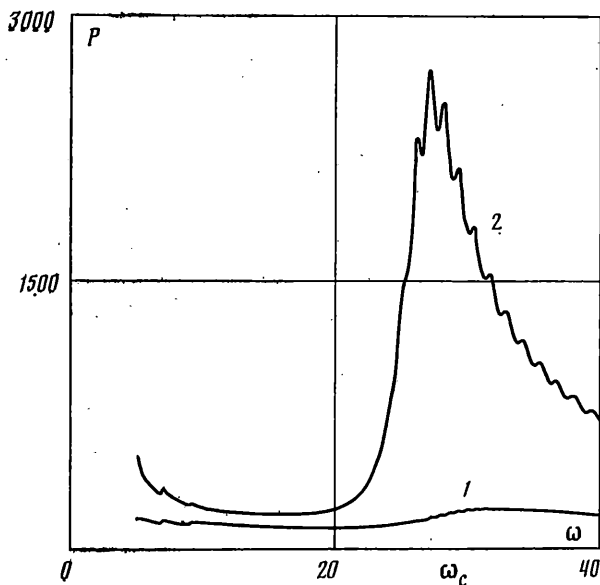
$$P = \frac{\pi \rho_f X(s_0) [3(1 - \nu^2)]^{1/2}}{64 \rho_s^2 c_s h^3 (\text{Im } k_3) [(\omega/c_f)^2 - k_0^2]^{1/2}} \quad (4.15)$$

Для примера, рассмотренного в п. 3 (см. (3.23), (3.24)), в случае нормальной нагрузки на фиг. 2 изображена частотная зависимость мощности акустического излучения; диапазон частот  $5 \leq \omega \leq 40$ ; частота совпадения  $\approx 27$ . Как и на фиг. 1, сплошная линия — результат полного численного решения задачи (1.1)–(1.5), штриховые — асимптотики (4.10) ( $\omega < \omega_c$ ) и (4.15) ( $\omega > \omega_c$ ). Штрихпунктирная линия — упрощенная асимптотика (4.12). В левой части графика видны мелкие пики — тангенциальные квазирезонансы, возбуждаемые в слабой степени нормальной нагрузкой и не учтенные в проведенных выше асимптотических выкладках. Интересно, что при снижении частот до  $\omega R/c_s \sim 1$  влияние тангенциальных форм резко усиливается и их вклад в мощность излучения в случае нормальной нагрузки может оказаться преобладающим [6].

Остановимся на вопросе о возможности рассчитывать оболочку как сухую в случае нормальной нагрузки. На фиг. 3 (пример тот же) кривая 1 — результат полного



Фиг. 2



Фиг. 3

численного решения задачи (1.1)–(1.5) (естественно, она совпадает со сплошной кривой на фиг. 2), кривая 2 – результат полного численного решения задачи (1.1)–(1.5) в пренебрежении давлением жидкости на оболочку (без  $\rho_f \omega^2 \psi|_{r=0}$  в (1.2)). Видно, что в окрестности частоты совпадения неучет давления жидкости на оболочку приводит к десятикратному завышению мощности излучения.

Используя результаты данного параграфа, относящиеся к частоте совпадения и связанным с ней акустическим явлениям, следует иметь в виду, что при реальных параметрах частота совпадения оказывается достаточно высокой и теория оболочек на таких частотах работает не очень точно (хотя формально условие  $\beta < 1$  в (2.2) гарантирует малость толщины оболочки по сравнению с характерной длиной волны). Поэтому более тщательное исследование требует внесения поправок, учитывающих трехмерность оболочки. В частности, истинная частота совпадения оказывается примерно на 20% выше, чем (4.1); см. также [7], где подобный учет проведен на основе теории типа Тимошенко.

5. **Бесконечная цилиндрическая оболочка.** Важный для практики случай бесконечной круговой цилиндрической оболочки формально не укладывается в описанную выше схему. Однако он может быть рассмотрен аналогичным образом. При этом формулы (4.10), (4.12), (4.15) остаются в силе ( $X(s_0)$  следует положить равным радиусу цилиндра  $R$ ). Формулы (3.21), (3.22) упрощаются и принимают вид

$$P = \frac{\pi \rho_f c_f}{16(h\rho_s \omega)^2 R \mu} \left( \frac{v^2}{\operatorname{Im} k_1} + \frac{4m^4}{R^4 (\operatorname{Re} k_2)^4 \operatorname{Im} k_2} \right) \quad (5.1)$$

$$P = \frac{\pi \rho_f c_f m^2}{16(h\rho_s \omega)^2 R^3 \mu} \left( \frac{v^2}{(\operatorname{Re} k_1)^2 \operatorname{Im} k_1} + \frac{4}{(\operatorname{Re} k_2)^2 \operatorname{Im} k_2} \right) \quad (5.2)$$

Здесь  $k_1, k_2, \mu$  по-прежнему определяются формулами (3.8), (3.9), (3.10) с  $X=R, R_1^{-1}=0, R_2^{-1}=R^{-1}$ .

Для ряда специальных случаев близкие к (3.21), (3.22), (4.10), (5.1), (5.2) асимптотические формулы были получены в [8, 9].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 384 с.
2. Попов А. Л., Чернышев Г. Н. О резонансных частотах оболочек, колеблющихся в бесконечной жидкости // ПММ. 1979. Т. 43. вып. 5. С. 869–876.
3. Гольденвейзер А. Л. Приближенные методы исследования свободных колебаний тонких оболочек // ПММ. 1977. Т. 41. вып. 6. С. 1079–1094.
4. Радовинский А. Л. Неосесимметричные колебания оболочек вращения, содержащих жидкость // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 2. С. 139–146.
5. Васильев Д. Г. Формула для функции распределения частот оболочки вращения, погруженной в жидкость // Докл. АН СССР. 1979. Т. 248. № 2. С. 325–328.
6. Васильев Д. Г., Лидский В. Б. Вынужденные колебания тонкой упругой оболочки, взаимодействующей с жидкостью // Математические методы механики деформируемого твердого тела. Сер. Прочность и вязкоупругость. М.: Наука, 1986. С. 30–36.
7. Boisich R., Guicking D. Zur Grenzfrequenz ebener Platten in dichten Medien // Acustica. 1980. В. 44. № 1. С. 41–45.
8. Нольде Е. В. Высокочастотное излучение бесконечного тонкостенного цилиндра в жидкости // Математические методы управления и обработки информации. М.: изд. МФТИ, 1986. С. 136–139.
9. Нольде Е. В. Высокочастотные колебания оболочки, контактирующей с жидкостью // Тр. XIV Всес. конф. по теории пластин и оболочек. Изд-во Тбил. ун-та, 1987. Т. 2. С. 291–296.

Москва

Поступила в редакцию  
3.V.1988