МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 · 1989

УДК 539.3 : 534.1

И. Г. ФИЛИППОВ, С. И. ФИЛИППОВ

УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Теоретические исследования колебаний пластин переменной жесткости указаны в [1–3].

Выводятся общие и основанные на них приближенные уравнения колебания пластин переменной жесткости в предположении, что материал пластинки кусочно-однороден с плоской границей однородности, а толщина пластинки переменна.

1. Постановка общей задачи. Кусочно-однородную пластинку переменной толщины будем рассматривать как кусочно-однородный вязкоупругий слой той же геометрии с плоской границей изменения однородности, которая принимается за плоскость $z=0$. Верхнюю часть слоя или пластинки $[-\infty<(x,y)<\infty;\ 0\leqslant z\leqslant F_0(x,y)]$ будем обозначать индексом 0, а нижнюю часть $[-\infty<(x,y)<\infty;\ -F_1(x,y)\leqslant z\leqslant 0]$ – индексом 1.

На поверхностях пластинки задаются нестационарные внешние усилия, вызывающие ее продольно-поперечные колебания. Задача формулируется в трехмерной линейной постановке.

Предполагая материал пластинки изотропным, введем потенциалы $\Phi^{(l)}$ и $\Psi^{(l)}$ продольных и поперечных волн

$$\mathbf{U}^{(l)}=\operatorname{grad}\Phi^{(l)}+\operatorname{rot}\Psi^{(l)},\quad \operatorname{div}\Psi^{(l)}=0 \tag{1.1}$$

В потенциалах $\Phi^{(l)}$ и $\Psi^{(l)}$ уравнения движения пластинки как слоя принимают вид

$$\begin{gathered}N_l(\Delta\Phi^{(l)})=\rho_l\partial^2\Phi^{(l)}/\partial t^2,\quad M_l(\Delta\Psi^{(l)})=\rho_l\partial^2\Psi^{(l)}/\partial t^2\\ N_l=L_l+2M_l,\quad \Delta=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2+\partial^2/\partial z^2\end{gathered} \tag{1.2}$$

где L_l и M_l – вязкоупругие операторы, при этом зависимости напряжений $\sigma_{ji}^{(l)}$ от деформаций $\varepsilon_{ij}^{(l)}$ в точках пластинки имеют вид

$$\begin{gathered}\sigma_{jj}^{(l)}=L_l(\varepsilon^{(l)})+2M_l(\varepsilon_{jj}^{(l)})\qquad (l=0,1)\\ \sigma_{ij}^{(l)}=M_l(\varepsilon_{ij}^{(l)})\qquad (i\neq j;\ i,j=x,y,z)\end{gathered} \tag{1.3}$$

В общем случае, операторы L_l и M_l произвольны, но обратимы, т. е. существуют обратные к ним операторы L_l^{-1} и M_l^{-1}.

Граничные условия задачи запишутся в виде:

$$z=F_0(x,y):\ \sigma_{nn}^{(0)}=f_n^{(0)}(x,y,t),\qquad \sigma_{ns_j}^{(0)}=f_{ns_j}^{(0)}(x,y,t)\qquad (j=1,2) \tag{1.4}$$

$$z=-F_1(x,y):\ \sigma_{nn}^{(1)}=f_n^{(1)}(x,y,t),\qquad \sigma_{ns_j}^{(1)}=f_{ns_j}^{(1)}(x,y,t)\qquad (j=1,2) \tag{1.5}$$

$$\begin{gathered}z=0:\ \sigma_{zz}^{(0)}=\sigma_{zz}^{(1)},\qquad \sigma_{iz}^{(0)}=\sigma_{iz}^{(1)}\qquad (i=x,y)\\ u^{(0)}=u^{(1)},\quad v^{(0)}=v^{(1)},\quad w^{(0)}=w^{(1)}\end{gathered} \tag{1.6}$$

где индекс n – обозначает нормаль к поверхностям пластинки, а s_1 и s_2 – ортогональные к нормали координаты в касательной плоскости, проведенной к поверхности пластинки в той или иной точке. Начальные условия — нулевые.

При записи выражений $\sigma_{nn}^{(l)}$, $\sigma_{ns_j}^{(l)}$ в точках поверхностей пластинки через напряжения в декартовых координатах ограничимся случаем слабо искривленных поверхностей:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{nn}^{(l)} &= \sigma_{zz}^{(l)} - 2\left(F_x' \sigma_{xz}^{(l)} + F_y' \sigma_{yz}^{(l)}\right)\\
\sigma_{ns_1}^{(l)} &= F_x'\left(\sigma_{zz}^{(l)} - \sigma_{xx}^{(l)}\right) - F_y' \sigma_{xy}^{(l)} + \sigma_{xz}^{(l)}\\
\sigma_{ns_2}^{(l)} &= F_y'\left(\sigma_{zz}^{(l)} - \sigma_{yy}^{(l)}\right) - F_x' \sigma_{xy}^{(l)} + \sigma_{yz}^{(l)}
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

где $z=F(x,y)$ описывает верхнюю или нижнюю поверхность, а F_x' и F_y' — первые частные производные.

2. Общие решения задачи. Общие уравнения колебания. При исследовании колебания пластин точная трехмерная задача заменяется более простой, двумерной для точек срединной плоскости пластинки, что накладывает ограничения на внешние усилия. Эти ограничения сводятся к тому, что внешние усилия не могут быть высокочастотными.

Общее решение задачи при нулевых начальных условиях будем находить, полагая

$$
\begin{aligned}
\Phi^{(l)} &= \int_0^\infty \left.\begin{matrix}\sin kx\\ -\cos kx\end{matrix}\right\} dk \int_0^\infty \left.\begin{matrix}\sin qy\\ -\cos qy\end{matrix}\right\} dq \int_l \Phi_0^{(l)} e^{pt}\, dp\\
\Psi_1^{(l)} &= \int_0^\infty \left.\begin{matrix}\sin kx\\ -\cos kx\end{matrix}\right\} dk \int_0^\infty \left.\begin{matrix}\cos qy\\ \sin qy\end{matrix}\right\} dq \int_l \Psi_{10}^{(l)} e^{pt}\, dp\\
\Psi_2^{(l)} &= \int_0^\infty \left.\begin{matrix}\cos kx\\ \sin kx\end{matrix}\right\} dk \int_0^\infty \left.\begin{matrix}\sin qy\\ -\cos qy\end{matrix}\right\} dq \int_l \Psi_{20}^{(l)} e^{pt}\, dp\\
\Psi_3^{(l)} &= \int_0^\infty \left.\begin{matrix}\cos kx\\ \sin kx\end{matrix}\right\} dk \int_0^\infty \left.\begin{matrix}\cos qy\\ \sin qy\end{matrix}\right\} dq \int_{(l)} \Psi_{30}^{(l)} e^{pt}\, dp
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

при этом в силу сформулированных ограничений на функции внешних усилий функции $\Phi_0^{(l)}$, $\Psi_{j0}^{(l)}$ пренебрежимо малы вне области $|k|\leqslant k_0$, $|q|\leqslant q_0$, $|\mathrm{Im}\, p|\leqslant \omega_0$ и выражения (2.1) можно дифференцировать под знаком интеграла [3].

Подставляя (2.1) в уравнения движения (1.2), для $\Phi_0^{(l)}$, $\Psi_{j0}^{(l)}$ получаем уравнения

$$
\begin{gathered}
d^2\Phi_0^{(l)}/dz^2 - \alpha_l^2 \Phi_0^{(l)} = 0, \qquad d^2\Psi_{j0}^{(l)}/dz^2 - \beta_l^2 \Psi_{j0}^{(l)} = 0\\
\alpha_l^2 = k^2+q^2+\rho_l p^2 N_{l0}^{-1}(p), \quad \beta_l^2 = k^2+q^2+\rho_l p^2 M_{l0}^{-1}(p)
\end{gathered}
\tag{2.2}
$$

где N_{l0} и M_{l0} — преобразованные по Лапласу операторы N_l, M_l.

Общие решения уравнений (2.2) есть

$$
\begin{aligned}
\Phi_0^{(l)} &= A_1^{(l)} \operatorname{ch}(\alpha_l z) + A_2^{(l)} \operatorname{sh}(\alpha_l z), & \Psi_{10}^{(l)} &= B_{11}^{(l)} \operatorname{sh}(\beta_l z) + B_{12}^{(l)} \operatorname{ch}(\beta_l z)\\
\Psi_{20}^{(l)} &= B_{21}^{(l)} \operatorname{sh}(\beta_l z) + B_{22}^{(l)} \operatorname{ch}(\beta_l z), & \Psi_{30}^{(l)} &= B_{31}^{(l)} \operatorname{ch}(\beta_l z) + B_{32}^{(l)} \operatorname{sh}(\beta_l z)
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

При этом $B_{ij}^{(l)}$ в силу (1.1) связаны зависимостью $kB_{1j}^{(l)} + qB_{2j}^{(l)} + \beta_l B_{3j}^{(l)} = 0$.

Зная общие решения (2.3), для преобразованных величин перемещений точек пластинки $u_0^{(l)}$, $v_0^{(l)}$, $w_0^{(l)}$ получаем выражения

$$
\begin{gathered}
u_0^{(l)}=\sum_{n=0}^{\infty}\Big\{\left[kA_1^{(l)}\alpha_l^{2n}-\beta_l^{2n}(\beta_l B_{21}^{(l)}+qB_{31}^{(l)})\right]\frac{z^{2n}}{(2n)!}+ \\
+\left[kA_2^{(l)}\alpha_l^{2n+1}-\beta_l^{2n+1}(\beta_l B_{22}^{(l)}+qB_{32}^{(l)})\right]\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\Big\} \\
v_0^{(l)}=\sum_{n=0}^{\infty}\Big\{\left[qA_1^{(l)}\alpha_l^{2n}+\beta_l^{2n}(\beta_l B_{11}^{(l)}+kB_{31}^{(l)})\right]\frac{z^{2n}}{(2n)!}+ \\
+\left[qA_2^{(l)}\alpha_l^{2n+1}+\beta_l^{2n+1}(\beta_l B_{12}^{(l)}+kB_{32}^{(l)})\right]\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\Big\} \qquad (2.4)\\
w_0^{(l)}=\sum_{n=0}^{\infty}\Big\{\left[A_1^{(l)}\alpha_l^{2n+2}+\beta_l^{2n+1}(qB_{11}^{(l)}-kB_{21}^{(l)})\right]\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+ \\
+\left[A_2^{(l)}\alpha_l^{2n+1}+\beta_l^{2n}(qB_{12}^{(l)}-kB_{22}^{(l)})\right]\frac{z^{2n}}{(2n)!}\Big\}
\end{gathered}
$$

при этом гиперболические функции представлялись в виде степенных рядов по аргументу.

В классической постановке исследование колебаний пластин сводят к определению смещений точек срединной плоскости пластинки. В нашей задаче такая плоскость отсутствует. Поэтому в качестве искомых величин будем рассматривать смещения и деформации точек плоскости контакта $z=0$ как верхней, так и нижней частей пластинки, что кажется наиболее целесообразно и будет показано ниже. Поэтому вместо постоянных $A_i^{(l)}, B_{ij}^{(l)}$ введем новые

$$
\begin{gathered}
U_{10}^{(l)}=kA_1^{(l)}-(\beta_l B_{21}^{(l)}+qB_{31}^{(l)}),\qquad V_{10}^{(l)}=qA_1^{(l)}+(\beta_l B_{11}^{(l)}+kB_{31}^{(l)}) \\
U_{20}^{(l)}=k\alpha_l A_2^{(l)}-\beta_l(\beta_l B_{22}^{(l)}+qB_{32}^{(l)}),\qquad V_{20}^{(l)}=q\alpha_l A_2^{(l)}+\beta_l(\beta_l B_{12}^{(l)}+kB_{32}^{(l)}) \qquad (2.5)\\
W_{10}^{(l)}=\alpha_l^2 A_1^{(l)}+\beta_l(qB_{11}^{(l)}-kB_{21}^{(l)}) \\
W_{20}^{(l)}=\alpha_l A_2^{(l)}+(qB_{12}^{(l)}-kB_{22}^{(l)})\qquad (l=0,1)
\end{gathered}
$$

При этом $U_{10}^{(l)}, V_{10}^{(l)}, W_{20}^{(l)}$ являются преобразованными величинами смещений точек на контакте, а $U_{20}^{(l)}, V_{20}^{(l)}, W_{10}^{(l)}$ — преобразованные составляющие деформаций по направлению z при $z=0$.

Через $U_i^{(l)}$, $V_i^{(l)}$, $W_i^{(l)}$ для величин $u^{(l)}$, $v^{(l)}$, $w^{(l)}$ получим после обращения $u_0^{(l)}, v_0^{(l)}, w_0^{(l)}$ по k, q, p выражения

$$
\begin{gathered}
u^{(l)}=\sum_{n=0}^{\infty}\Big\{\Big[\Big(\lambda_{2l}^{(n)}+C_lQ_{nl}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big)U_1^{(l)}+C_lQ_{nl}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial V_1}{\partial y}+W_1^{(l)}\Big)\Big]\frac{z^{2n}}{(2n)!}+ \\
+\Big[\Big(\lambda_{2l}^{(n)}-D_lQ_{nl}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big)U_2^{(l)}-D_lQ_{nl}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial V_2^{(l)}}{\partial y}+\lambda_{2l}^{(1)}W_2^{(l)}\Big)\Big]\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\Big\} \qquad (2.6)\\
v^{(l)}=\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\Big[\Big(\lambda_{2l}^{(n)}+C_lQ_{nl}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)V_1^{(l)}+C_lQ_{nl}\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial U_1^{(l)}}{\partial x}+W_1^{(l)}\Big)\Big]\frac{z^{2n}}{(2n)!}+ \\
+\Big[\Big(\lambda_{2l}^{(n)}-D_lQ_{nl}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)V_2^{(l)}-D_lQ_{ln}\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial U_2^{(l)}}{\partial x}+\lambda_{2l}^{(1)}W_2^{(l)}\Big)\Big]\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\Big\}
\end{gathered}
$$

$$w^{(l)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[C_lQ_{nl}\lambda_{1l}^{(1)}\left(\frac{\partial U_1^{(l)}}{\partial x}+\frac{\partial V_1^{(l)}}{\partial y}\right)+(\lambda_{2l}^{(n)}+C_lQ_{nl}\lambda_{1l}^{(1)})W_1^{(l)}\right]\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\right.$$

$$\left.+\left[-D_lQ_{nl}\left(\frac{\partial U_2^{(l)}}{\partial x}+\frac{\partial V_2^{(l)}}{\partial y}\right)+(\lambda_{2l}^{(n)}-D_lQ_{nl}\lambda_{2l}^{(1)})W_2^{(l)}\right]\frac{z^{2n}}{(2n)!}\right\}$$

$$C_l=(1-M_l^{-1}N_l),\quad D_l=(1-M_lN_l^{-1}),\quad Q_{nl}=\sum_{m=0}^{n-1}\lambda_{1l}^{(n-m-1)}\lambda_{2l}^{(m)}$$

$$\lambda_{1l}^{(1)}=\left[\rho_lN_l^{-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]$$

$$\lambda_{2l}^{(1)}=\left[\rho_lM_l^{-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]$$

При этом операторы $\lambda_{1l}^{(1)}$ и $\lambda_{2l}^{(1)}$ являются двумерными интегродифференциальными уравнениями распространения продольных и поперечных волн в плоскости $z=0$.

В общем случае имеем двенадцать неизвестных $U_i^{(l)}, V_i^{(l)}, W_i^{(l)}$,шесть из которых описывают смещения точек контакта, а другие шесть — безразмерны и являются составляющими деформаций в направлении z.

Однако благодаря условиям (1.6) на контакте, среди этих двенадцати величин лишь шесть независимы и эти зависимости в силу (1.6) имеют вид

$$\begin{gathered}U_1^{(0)}=U_1^{(1)},\quad V_1^{(0)}=V_1^{(1)},\quad W_2^{(0)}=W_2^{(1)}\\ U_2^{(1)}=M_0M_1^{-1}[U_2^{(0)}+\partial W_2^{(0)}/\partial x]-\partial W_2^{(0)}/\partial x\\ V_2^{(1)}=M_0M_1^{-1}[V_2^{(0)}+\partial W_2^{(0)}/\partial y]-\partial W_2^{(0)}/\partial y\\ W_1^{(1)}=N_1^{-1}\{N_0W_1^{(0)}-[M_0(1+C_0)-M_1(1+C_1)](\partial U_1^{(0)}/\partial x+\partial V_1^{(0)}/\partial y)\}\end{gathered}\tag{2.7}$$

что уменьшает вдвое число искомых величин.

Таким образом, задача свелась к определению шести искомых функций, которыми могут быть любые шесть из введенных. В качестве этих шести искомых функций возьмем шесть величин, например, характеризующих смещения и деформации точек верхней составляющей пластинки по линии контакта. Для нахождения этих шести искомых функций имеем шесть граничных условий (1.4) и (1.5), которые и дают общие уравнения колебаний кусочно-однородной пластинки переменной толщины. Выражения перемещений точек пластинки имеют вид (2.6) через искомые функции, а напряжения вычисляются после подстановки (2.6) в зависимости (1.3).

3. Анализ общих уравнений колебания. Общие уравнения колебаний, получаемые из граничных условий (1.4) и (1.5), сложны по структуре и содержат производные любого порядка по координатам и времени и мало пригодны для решения прикладных задач. Поэтому проанализируем эти общие уравнения при некоторых упрощениях и предположениях.

Однородная пластинка постоянной толщины. Это наиболее простой случай. Вначале рассмотрим продольные колебания, которые возможны, когда $F_0=F_1=h$ и функции внешних усилий симметричны относительно срединной плоскости $z=0$. В этом случае отличны от нуля лишь три искомые функции U_1, V_1, W_1, которые удовлетворяют трем граничным условиям (1.4) или (1.5).

При продольном колебании пластинки главными искомыми функциями являются смещения U_1, V_1 точек срединной плоскости $z=0$. Если вместо U_1, V_1 ввести плоские потенциалы $U_1=\partial\varphi/\partial x+\partial\psi/\partial y$, $V_1=\partial\varphi/\partial y-$ $-\partial\psi/\partial x$, то из граничных условий получим точные уравнения относительно потенциалов φ и ψ:

$$
\begin{gathered}
\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\{4CQ_m\Delta\lambda_1^{(1)}\lambda_2^{(n)}+CQ_n\lambda_2^{(m)}(\lambda_2^{(1)}-\Delta)^2+ \\
+[(1+C)^2\Delta+(1-C)^2\lambda_1^{(1)}]\lambda^{2(n+m)}\}(\varphi)\frac{h^{2(n+m)+1}}{(2n)!(2m+1)!}= \\
=M^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}[2CQ_n\lambda_1^{(1)}+(1+C)\lambda_2^{(n)}](f_z)\frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!}+ \\
+M^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\Delta^{-1}[CQ_n(\lambda_2^{(1)}-\Delta)+(1-C)\lambda_2^{(n)}]\left(\frac{\partial f_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial f_{yz}}{\partial y}\right)\frac{h^{2n}}{(2n)!} \\
\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_2^{(n+1)}\psi\frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!}=M^{-1}\Delta^{-1}\left(\frac{\partial f_{xz}}{\partial y}-\frac{\partial f_{yz}}{\partial x}\right)
\end{gathered}
\qquad (3.1)
$$

которые также содержат производные любого порядка. Если в суммах левых и правых частей уравнений (3.1) ограничиться первыми слагаемыми, то для φ и ψ получим приближенные уравнения

$$
\begin{gathered}
\rho NM^{-1}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)-4(N-M)\Delta\varphi=-(1+C)f_z-\frac{1}{h}NM^{-1}\Delta^{-1}(F_{xy}) \\
\rho M^{-1}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)-\Delta\psi=\frac{1}{h}M^{-1}\Delta^{-1}\left(\frac{\partial f_{xz}}{\partial y}-\frac{\partial f_{yz}}{\partial x}\right)
\end{gathered}
\qquad (3.2)
$$

которые для упругой пластинки переходят в хорошо известные волновые уравнения, описывающие плоское обобщенное напряженное состояние.

Таким образом, теория плоского обобщенного напряженного состояния является нулевым приближением из точных уравнений продольного колебания пластинки постоянной толщины.

В случае, если функции внешних усилий антисимметричны относительно срединной плоскости $z=0$, то имеем чисто поперечное колебание пластинки и в этом случае отличны от нуля U_2, V_2, W_2.

Приняв за основную искомую величину поперечное смещение W_2 точек срединной плоскости пластинки, для W_2 получим точное уравнение

$$
\begin{gathered}
\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\Big\{[\lambda_2^{(1)}-\Delta]DQ_m\lambda_1^{(n)}+[\lambda_2^{(1)}+\Delta]\lambda_1^{(n+m)}+ \\
+4\Delta\lambda_2^{(1)}DQ_n\lambda_1^{(m)}\Big\}(W_2)\frac{h^{2(n+m)+1}}{(2n+1)!(2m)!}= \\
=-M^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}[\lambda_1^{(n)}+DQ_n(\lambda_2^{(1)}-\Delta)](f_z)\frac{h^{2n}}{(2n)!}\qquad (f_{xz}=f_{yz}=0)
\end{gathered}
\qquad (3.3)
$$

Ограничиваясь в суммах (3.3) первыми двумя слагаемыми, содержащими производные не выше четвертого порядка, для W_2 получим приближенное уравнение

$$
\begin{gathered}
\rho\frac{\partial^2W_2}{\partial t^2}+\frac{h^2}{6}\Big[\rho^2(N^{-1}+3M^{-1})\frac{\partial^4W_2}{\partial t^4}-4\rho(3-2MN^{-1})\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta W_2+ \\
+8M(1-MN^{-1})\Delta^2W_2\Big]=\frac{1}{h}f_z+\frac{h}{2}\Big[\rho M^{-1}\left(\frac{\partial^2f_z}{\partial t^2}\right)-(3-2MN^{-1})\Delta f_z\Big]
\end{gathered}
\qquad (3.4)
$$

которое по виду совпадает с уравнением, полученным на основе модели Тимошенко для упругой пластинки, но с другими коэффициентами при операторах $\partial^4/\partial t^4$ и $(\partial^2/\partial t^2)\Delta$.

Ограничиваясь в уравнениях (3.1) или (3.3) большим числом слагаемых, получим приближенные уравнения, обобщающие или теорию плоского обобщенного напряженного состояния, или теорию поперечного колебания, основанную на модели Тимошенко.

Однородная пластинка переменной толщины. При произвольной геометрии пластинки переменной толщины не существуют ни чисто продольные, ни чисто поперечные колебания. Однако, если геометрия пластинки симметрична относительно срединной плоскости $z=0$, т. е. когда $F_0(x, y)=F_1(x, y)=F(x, y)$, можно получить уравнения продольного или поперечного колебаний пластинки.

Если функции внешних усилий симметричны относительно $z=0$, что подразумевает и симметрию геометрии пластинки, то вновь отличны от нуля U_1, V_1, W_1. Не выписывая общих уравнений для смещений U_1, V_1, приведем лишь приближенные для плоских потенциалов φ и ψ, аналогичные приближенным уравнениям (3.2)

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho M^{-1}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)-4(1-MN^{-1})\Delta\varphi\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\rho M^{-1}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)-\Delta\psi\right]+\\
+\frac{F_x'}{F}\left\{MN^{-1}\left[2C\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+(1+C)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right]-\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right\}-\\
-\frac{F_y'}{F}\left[2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right]=\frac{f_{ns_1}}{F}-(1-C^2)\frac{\partial f_n}{\partial x}\\
\frac{\partial}{\partial y}\left[\rho M^{-1}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)-4(1-MN^{-1})\Delta\varphi\right]-\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho M^{-1}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)-\Delta\psi\right]+\\
+\frac{F_y'}{F}\left\{MN^{-1}\left[2C\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+(1+C)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right]+\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right\}-\frac{F_x'}{F}\left[2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right]=\\
=\frac{f_{ns_2}}{F}-(1-C^2)\frac{\partial f_n}{\partial y}
\end{gathered}\tag{3.5}$$

Как видно из уравнений (3.5), эти уравнения относительно φ и ψ не раздельны в отличие от уравнений (3.2), т. е. теория плоского обобщенного напряженного состояния для пластинки переменной толщины более сложна и уравнения (3.5) уже в нулевом приближении учитывают геометрическую дисперсию за счет искривленности поверхностей пластинки. Однако, если форма поверхностей и внешние усилия не зависят от какой-либо из координат, то не зависят от этой координаты и потенциалы φ и ψ, и уравнения (3.5) оказываются разделенными относительно потенциалов.

Если геометрия пластинки также симметрична относительно $z=0$, а внешние усилия антисимметричны относительно $z=0$, то имеем чисто поперечные колебания пластинки и для поперечного смещения W_2 получим приближенное уравнение, обобщающее уравнение (3.4):

$$\begin{gathered}
\rho\frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2}-F(x,y)\left\{F_x'\frac{\partial}{\partial x}\left[3M(1+D)\lambda_2^{(1)}+M\frac{\partial^2}{\partial x^2}-N^{-1}M^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]+\right.\\
\left.+F_y'\frac{\partial}{\partial y}\left[3M(1+D)\lambda_2^{(1)}+M\frac{\partial^2}{\partial y^2}-N^{-1}M^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\right\}(W_2)+\\
+\frac{F^2(x,y)}{6}\left[\rho^2(N^{-1}+3M^{-1})\frac{\partial^4 W_2}{\partial t^4}-4\rho(3-2MN^{-1})\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta W_2+\right.\\
\left.+8M(1-MN^{-1})\Delta^2 W_2\right]=\frac{1}{F}\left\{\left[1-(5-2MN^{-1})F(x,y)\left(F_x'\frac{\partial f_n}{\partial x}+F_y'\frac{\partial f_n}{\partial y}\right)\right\}\right.\\
(f_{ns_1}=f_{ns_2}=0)
\end{gathered}\tag{3.6}$$

Как в случае пластинки постоянной толщины, так и переменной толщины при симметрии относительно $z=0$, если внешние усилия действуют только на одну из поверхностей, то пластинка будет совершать продольно-поперечное колебание, которое в силу линейности задачи может быть получено суммированием продольного и поперечного колебаний после разложения внешних усилий на симметричную и антисимметричную части относительно $z=0$.

Кусочно-однородная пластинка переменной толщины. В данном случае пластинка всегда совершает комбинированное или продольно-поперечное колебание и отличны от нуля все шесть искомых функций. Общие уравнения для этих шести искомых функций сложны. Поэтому ограничимся задачей в плоской постановке, т. е. при независимости всех входящих величин от одной из координаты, например y, и тогда для искомых функций $U_1^{(0)}, W_1^{(0)}, U_2^{(0)}, W_2^{(0)}$ получаем общие уравнения

$$\begin{gathered}
M_{1n}(U_1)+M_{2n}(W_1)+M_{3n}(U_2)+M_{4n}(W_2)=M_0^{-1}(f_n^{(0)}) \\
K_{1n}(U_1)+K_{2n}(W_1)+K_{3n}(U_2)+K_{4n}(W_2)=M_0^{-1}(f_{ns_1}^{(0)}) \\
H_{1n}(U_1)+H_{2n}(W_1)+H_{3n}(U_2)+H_{4n}(W_2)=M_1^{-1}(f_n^{(1)}) \\
E_{1n}(U_1)+E_{2n}(W_1)+E_{3n}(U_2)+E_{4n}(W_2)=M_1^{-1}(f_{ns_1}^{(1)}) \\
U_1=U_1^{(0)}, \quad W_1=W_1^{(0)}, \quad U_2=U_2^{(0)}, \quad W_2=W_2^{(0)}
\end{gathered} \tag{3.7}$$

где операторы $M_{jn}, K_{jn}, H_{jn}, E_{jn}$ имеют вид

$$\begin{aligned}
M_{1n}=\sum_{n=0}^{\infty}\Big\{\Big[&\frac{F_0^{2n}}{(2n)!}\frac{\partial}{\partial x}\Big[C_0Q_{n0}\Big(\lambda_{20}^{(1)}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big)-(1+C_0)\lambda_{20}^{(n)}\Big]- \\
&-2\frac{F_{0x}'F_0^{2n+1}}{(2n+1)!}\Big[2C_0Q_{n0}\lambda_{10}^{(1)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+(1-C_0)\lambda_{10}^{(1)}\lambda_{20}^{(n)}\Big]\Big\} \\
M_{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\Big\{&\frac{F_0^{2n}}{(2n)!}\Big[C_0Q_{n0}\Big(\lambda_{20}^{(1)}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big)+(1-C_0)\lambda_{20}^{(n)}\Big]- \\
&-2\frac{F_{0x}'F_0^{2n+1}}{(2n+1)!}\Big[2C_0Q_{n0}\lambda_{10}^{(1)}+(1+C_0)\lambda_{20}^{(n)}\Big]\frac{\partial}{\partial x}\Big\} \\
M_{3n}=\sum_{n=0}^{\infty}\Big\{&-\frac{F_0^{2n+1}}{(2n+1)!}\frac{\partial}{\partial x}\big[2D_0Q_{n0}\lambda_{20}^{(1)}+\lambda_{10}^{(n)}\big]- \\
&-2\frac{F_{0x}'F_0^{2n}}{(2n)!}\Big[D_0Q_{n0}\Big(\lambda_{20}^{(1)}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big)+\lambda_{10}^{(n)}\Big]\Big\} \\
M_{4n}=\sum_{n=0}^{\infty}\Big\{&\frac{F_0^{2n+1}}{(2n+1)!}\lambda_{20}^{(1)}\Big[2D_0Q_{n0}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\lambda_{10}^{(n)}\Big]+ \\
&+2\frac{F_{0x}'F_0^{2n}}{(2n)!}\frac{\partial}{\partial x}\Big[D_0Q_{n0}\Big(\lambda_{20}^{(1)}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big)-\lambda_{10}^{(n)}\Big]\Big\} \\
K_{1n}=\sum_{n=0}^{\infty}\Big\{&\frac{F_0^{2n+1}}{(2n+1)!}\lambda_{10}^{(1)}\Big[2C_0Q_{n0}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+(1-C_0)\lambda_{20}^{(n)}\Big]+ \\
&+2\frac{F_{0x}'F_0^{2n}}{(2n)!}\frac{\partial}{\partial x}\Big[C_0Q_{n0}\Big(\lambda_{10}^{(1)}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big)-\lambda_{20}^{(1)}\Big]\Big\}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$K_{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{F_0^{2n+1}}{(2n+1)!}\frac{\partial}{\partial x}\left[2C_0Q_{n0}\lambda_{10}^{(1)}+(1+C_0)\lambda_{20}^{(n)}\right]+\right.$$

$$\left.+2\frac{F_{0x}'F_0^{2n}}{(2n)!}\left[C_0Q_{n0}\left(\lambda_{10}^{(1)}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)+\lambda_{20}^{(n)}\right]\right\}$$

$$K_{3n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{F_0^{2n}}{(2n)!}\left[D_0Q_{n0}\left(\lambda_{20}^{(1)}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)+\lambda_{10}^{(n)}\right]-\right.$$

$$\left.-2\frac{F_{0x}'F_0^{2n+1}}{(2n+1)!}\frac{\partial}{\partial x}\left[2D_0Q_{n0}\lambda_{20}^{(1)}+(1+D_0)\lambda_{10}^{(n)}\right]\right\}$$

$$K_{4n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{-\frac{F_0^{2n}}{(2n)!}\left[D_0Q_{n0}\left(\lambda_{20}^{(1)}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)-\lambda_{10}^{(n)}\right]\frac{\partial}{\partial x}+\right.$$

$$\left.+\frac{F_{0x}'F_0^{2n+1}}{(2n+1)!}\left[4D_0Q_{n0}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-D_0\lambda_{10}^{(n)}\right]\lambda_{20}^{(1)}\right\}$$

$$H_{1n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{F_1^{2n}}{(2n)!}\frac{\partial}{\partial x}\left[C_1Q_{n1}\left(\lambda_{21}^{(1)}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)(1-P_0)-\right.\right.$$

$$-\left[(1+C_1)+(1-C_1)P_0\right]\lambda_{21}^{(n)}\Big]-2\frac{F_{1x}'F_1^{2n+1}}{(2n+1)!}\left[2C_1Q_{n1}\lambda_{11}^{(1)}(1-P_0)\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\right.$$

$$\left.\left.+\left[(1-C_1)\lambda_{11}^{(1)}-(1+C_1)P_0\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\lambda_{21}^{(n)}\right]\right\}$$

$$H_{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{F_1^{2n}}{(2n)!}P_1\left[C_1Q_{n1}\left(\lambda_{21}^{(1)}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)+(1-C_1)\lambda_{21}^{(n)}\right]-\right.$$

$$\left.-2\frac{F_{1x}'F_1^{2n+1}}{(2n+1)!}P_1\frac{\partial}{\partial x}\left[2C_1Q_{n1}\lambda_{11}^{(1)}+(1+C_1)\lambda_{21}^{(n)}\right]\right\}$$

$$H_{3n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{F_1^{2n+1}}{(2n+1)!}P_2\frac{\partial}{\partial x}\left[2D_1Q_{n1}\lambda_{21}^{(1)}+\lambda_{11}^{(n)}\right]+\right.$$

$$\left.+2\frac{F_{1x}'F_1^{2n}}{(2n)!}P_2\left[D_1Q_{n1}\left(\lambda_{21}^{(1)}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)+\lambda_{11}^{(n)}\right]\right\}$$

$$H_{4n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{F_1^{2n+1}}{(2n+1)!}\left[(1-P_2)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(2D_1Q_{n1}\lambda_{21}^{(1)}+\lambda_{11}^{(n)}\right)+\right.\right.$$

$$\left.+\lambda_{21}^{(1)}\left(2D_1Q_{n1}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\lambda_{11}^{(n)}\right)\right]+2\frac{F_{1x}'F_1^{2n}}{(2n)!}\frac{\partial}{\partial x}\Big[-(1-P_2)\times$$

$$\left.\times\left[D_1Q_{n1}\left(\lambda_{21}^{(1)}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)+\lambda_{11}^{(n)}\right]-\left[D_1Q_{n1}\left(\lambda_{21}^{(1)}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)-\lambda_{11}^{(n)}\right]\Big]\right\}$$

$$E_{1n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{F_1^{2n+1}}{(2n+1)!}\left[2C_1Q_{n1}(1-P_0)\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\right.\right.$$

$$\left.+\lambda_{21}^{(n)}\left[(1-C_1)\lambda_{11}^{(1)}-(1+C_1)P_0\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\right]+$$

$$+2\frac{F_{1x}'F_1^{2n}}{(2n)!}\frac{\partial}{\partial x}\left[(1-P_0)C_1Q_{n1}\left(\lambda_{11}^{(1)}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)-(1+P_0)\lambda_{21}^{(n)}\right]\right\}$$

$$E_{2n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{F_1^{2n+1}}{(2n+1)!}P_1\frac{\partial}{\partial x}[2C_1Q_{n1}\lambda_{11}^{(1)}+(1+C_1)\lambda_{21}^{(n)}]+\right.$$

$$\left.+2\frac{F_{1x}'F_1^{2n}}{(2n)!}P_1\left[C_1Q_{n1}\left(\lambda_{11}^{(1)}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)+\lambda_{21}^{(n)}\right]\right\}$$

$$E_{3n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{F_1^{2n}}{(2n)!}P_2\left[D_1Q_{n1}'\left(\lambda_{21}^{(1)}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)+\lambda_{11}^{(n)}\right]-\right.$$

$$\left.-2\frac{F_{1x}'F_1^{2n+1}}{(2n+1)!}P_2\frac{\partial}{\partial x}[2D_1Q_{n1}\lambda_{21}^{(1)}+(1+D_1)\lambda_{11}^{(n)}]\right\}$$

$$E_{4n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{F_1^{2n}}{(2n)!}(P_2-2)\frac{\partial}{\partial x}\left[D_1Q_{n1}\left(\lambda_{21}^{(1)}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)-\lambda_{11}^{(n)}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{F_{1x}'F_1^{2n+1}}{(2n+1)!}\left[(2-P_2)4D_1Q_{n1}\lambda_{21}^{(1)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]-\left[2(1+D_1)(P_2-1)\frac{\partial^2}{\partial x^2}+D_1\lambda_{21}^{(1)}\right]\lambda_{11}^{(n)}\right\}$$

$$P_0=N_1^{-1}[M_0(1+C_0)-M_1(1+C_1)]$$

$$P_1=N_0N_1^{-1},\quad P_2=M_0M_1^{-1}$$

Из уравнений (3.7) можно получить приближенное уравнение, если в суммах (3.8) ограничиться конечным числом первых слагаемых. Так как в данном случае имеем продольно-поперечное колебание, то в качестве основных величин можно взять продольное U_1 и поперечное смещения W_2 и из (3.7) получить систему приближенных уравнений относительно этих искомых величин.

Формулы (2.4) и (2.6) и аналогичные для напряжений получены из разложения гиперболических функций в степенные ряды по аргументу, причем эти ряды, как известно, сходящиеся.

Общие уравнения колебания кусочно-однородной пластинки переменной толщины получены из граничных условий после подстановки в них выражений для напряжений. Поэтому эти общие уравнения, представленные относительно искомых функций в виде бесконечных рядов, также сходящиеся и их можно считать точными уравнениями колебания кусочно-однородной пластинки переменной толщины с учетом вязких свойств материала пластинки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Григолюк Э. И., Селезов И. Т.* Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек // Механика деформируемого твердого тела. Итоги науки. Т. 5. М.: ВИНИТИ, 1973. 272 с.
2. *Морс Ф. М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 930 с.
3. *Петрашень Г. И.* Проблемы инженерной теории колебаний вырожденных систем // Исследования по теории упругости и пластичности. Л.: Изд-во ЛГУ, 1966. № 5. С. 3–33.
4. *Пшеничнов Г. И.* Теория тонких упругих сетчатых оболочек и пластинок. М.: Наука, 1982. 352 с.
5. *Филиппов И. Г., Чебан В. Г.* Математическая теория колебаний упругих и вязкоупругих пластин и стержней. Кишинев: «Штиинца», 1988. 189 с.

Москва

Поступила в редакцию
7.IV.1988