**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 · 1989**

УДК 539.3:534.1

И. А. КИЙКО, О. Б. РУДАКОВА

СВЯЗАННАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОСТИ О СВОБОДНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ

Для изготовления тонкостенных элементов конструкций в машиностроении широко применяются композитные материалы на полимерной основе, обладающие свойством наследственной упругости. Актуальной является задача об исследовании колебаний таких конструкций, особенно с учетом термомеханической связанности. Вопросу о колебаниях пластин с учетом тепловыделения посвящены публикации [1, 2]. В настоящей работе рассматриваются нелинейные колебания пластины в рамках связанной теории термовязкоупругости, развитой в исследованиях [3–5].

Рассмотрим прямоугольную пластину со сторонами a, b и толщиной h. Считаем, что срединная плоскость пластины до деформации совмещена с плоскостью XoY, а ось Z направлена перпендикулярно к ней. По краям пластина шарнирно оперта. Материал пластины — линейно вязкоупругий, ядро релаксации зависит от температуры через функцию температурно-временной редукции $a_T(T)$. Коэффициент Пуассона ν — константа материала.

Исследуем нелинейные колебания пластины в неоднородном и нестационарном температурном поле, созданном теплообразованием за счет рассеяния энергии и теплопроводностью. Общая постановка связанной задачи имеет вид

$$\nabla^4\Phi(x,y,t)=-E\alpha\Gamma^{\smile}\left[\nabla^2\left(\int_{-h/2}^{h/2}T(x,y,z,t)\,dz\right)\right]-{}^1/_2E\Gamma^{\smile}[L(w,w)] \tag{1}$$

$$\Gamma^{\smile}[\nabla^4 w(x,y,t)]=-(\rho h/D)(\partial^2 w/\partial t^2)-12\alpha h^{-3}(1+\nu)\times$$

$$\times\Gamma^{\smile}\left[\nabla^2\left(\int_{-h/2}^{h/2}T(x,y,z,t)\,z\,dz\right)\right]+(h/D)L(\Phi,w) \tag{2}$$

$$c(\partial T/\partial t)=\lambda\Delta T+W^* \tag{3}$$

Уравнения (1)—(3) решаются при следующих начальных и граничных условиях:

$$w(x,\ y,\ 0)=w_0(x,\ y),\quad (\partial w(x,\ y,\ t)/\partial t)\,|_{t=0}=0 \tag{4}$$

$$x=0,\ a:\quad w=0,\quad M_{11}=0,\quad N_{11}=0,\quad N_{12}=0 \tag{5}$$

$$y=0,\ b:\quad w=0,\quad M_{22}=0,\quad N_{22}=0,\quad N_{12}=0$$

$$T(x,\ y,\ z,\ 0)=T_0(x,\ y) \tag{6}$$

$$x=0,\ a;\quad y=0,\ b;\quad z=\pm h/2:\quad \partial T/\partial z=0 \tag{7}$$

В (1)—(7) введены следующие обозначения:

$$L(f_1,f_2)=\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 f_1}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 f_2}{\partial x\,\partial y}$$

$$\Gamma^{\sim}[f(t)] = f(t) - \int_0^t \Gamma(t-\tau) f(\tau)\, d\tau, \quad D = Eh^3/12(1-\nu^2)$$

где $w(x, y, t)$ — прогиб пластины; $\Phi(x, y, t)$ — функция напряжений; $T_0(x, y)$ и $T(x, y, z, t)$ — начальное и текущее значения температуры; $\Theta(x, y, z, t) = T(x, y, z, t) - T_0(x, y)$; N_{ij}, M_{ij} $(i, j = 1, 2)$ — усилия и моменты, W^* — функция рассеяния энергии, ρ — плотность, E — мгновенный модуль упругости, α — коэффициент температурного расширения, λ — коэффициент теплопроводности, c — теплоемкость единицы объема в начальном ненапряженном состоянии при $T = T_0$.

Для решения связанной задачи термовязкоупругости (1)—(7) воспользуемся методом последовательных приближений [3]. В качестве первого приближения следует взять решение соответствующей задачи вязкоупругости при стационарной температуре. Это решение, как частный случай полученного в [2], имеет вид

$$\Phi = {}^1/_{32} E \Gamma^{\sim}[f^2(t)]\,[(a/b)^2 \cos(2\pi x/a) + (b/a)^2 \cos(2\pi y/b)] \tag{8}$$

$$w(x, y, t) = f(t) \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/b)$$

$$f(t) = \gamma \cos \{[1 - (\varepsilon R_c/2)]t + ([3 - \varepsilon(2\Omega + R_{c2})]/2\varepsilon R_{s2}) \ln [1 - {}^1/_8 \gamma_0 \beta \varepsilon R_{s2} \times$$

$$\times \exp(-\varepsilon R_s t)] + \varphi\} \exp\{-{}^1/_2 \varepsilon R_s t - {}^1/_2 \ln[1 - {}^1/_8 \gamma_0 \beta \varepsilon R_{s2} \exp(-\varepsilon R_s t)]\} \tag{9}$$

$$\gamma = h[(f_0)^2 + (f_0')^2]^{1/2} \exp\{{}^1/_2 \ln(1 - {}^1/_8 \gamma_0 \beta \varepsilon R_{s2})\}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}[(f_0 \sin C - f_0' \cos C)/(f_0 \cos C + f_0' \sin C)]$$

$$C = -[3 - \varepsilon(2\Omega + R_{c2})]\,(2\varepsilon R_{s2})^{-1} \ln(1 - {}^1/_8 \gamma_0 \beta \varepsilon R_{s2})$$

$$\gamma_0 = [(f_0)^2 + (f_0')^2]\,\{{}^1/_8 [(f_0)^2 + (f_0')^2] \beta \varepsilon R_{s2} + {}^1/_2 \varepsilon R_s\}^{-1}$$

$$\beta = {}^1/_{16} E \pi^4 \rho^{-1} (a^{-4} + b^{-4})$$

$$R_c = \int_0^{+\infty} R(\tau) \cos[\omega_0 \tau]\, d\tau, \qquad R_s = \int_0^{+\infty} R(\tau) \sin[\omega_0 \tau]\, d\tau$$

$$R_{c2} = \int_0^{+\infty} R(\tau) \cos[2\omega_0 \tau]\, d\tau, \quad R_{s2} = \int_0^{+\infty} R(\tau) \sin[2\omega_0 \tau]\, d\tau$$

$$\Omega = \int_0^{+\infty} R(\tau)\, d\tau, \quad \omega_0 = {}^1/_2 [E/3\rho(1-\nu^2)]^{1/2} h \pi^2 (a^{-2} + b^{-2})$$

где f_0 и f_0' — заданные в начальный момент времени $t=0$ амплитуда и скорость прогиба, $\Gamma(t) = \varepsilon R(t)$.

Функция рассеяния W^* записывается через напряжения и деформации для вязкоупругих сред типа материала Максвелла в виде [3]:

$$W^* = s_{ij} \frac{\partial e_{ij}}{\partial t} - \frac{\sigma_u}{\Gamma(0)} \frac{\partial \sigma_u}{\partial t}$$

где $\sigma_u^2 = s_{ij} s_{ij}$, e_{ij} — девиатор деформаций.

Отметим, что существуют и другие гипотезы для подсчета функции рассеяния W^* в задачах о колебаниях вязкоупругих элементов [1]. Положим $T(x, y, z, t) = T^*(z, t) \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/b)$ и применим к (3) процедуру Бубнова — Галеркина. Получим следующее уравнение для $T^*(z, t)$:

$$[\partial^2 T^*(z, t)/\partial z^2] - k^2 T^*(z, t) = r[\partial T^*(z, t)/\partial t] - f(z, t) \tag{10}$$

$$f(z, t) = f_0(t) + z f_1(t) + z^2 f_2(t)$$

$$k = \pi(a^2 + b^2)^{1/2}/ab, \quad r = c/\lambda$$

Выражения для функций $f_i(t)$ ($i=0, 1, 2$) не выписываем; их точный вид в дальнейшем нами не используется, поскольку будем исследовать асимптотическое поведение решения для начальных моментов времени. В дальнейшем в (10) звездочку будем опускать.

Методом преобразования Лапласа по времени для начальных моментов получим следующее асимптотическое представление $T(z, t)$:

$$T(z, t) = (\varkappa_1 + t\varkappa_{11}) \exp(-k^2 t/r) + \sum_{n=2}^{4} (\varkappa_n + t\varkappa_{n1}) \exp(-n\varepsilon R_s t/2)$$

где $\varkappa_n$, $\varkappa_{n1}$ ($n=1, \ldots, 4$) — зависящие от z коэффициенты, выражающиеся через параметры из (9), (10).

При известной температуре решение динамической задачи вязкоупругости записывается формулами (8)÷(9), где оператор $\Gamma^{\sim}$ подсчитывается в соответствии с гипотезой температурно-временной аналогии через функцию $a_T(T)$ [6] (b_0 — константа материала): $1/a_T(T) = \exp\{b_0 T_0^{-2} \Theta(x, y, z, t)[1+\Theta(x, y, z, t)/T_0]^{-1}\}$.

Чтобы выявить качественный характер влияния температурного поля, воспользуемся разложением ядра релаксации по входящему туда малому параметру χ [4]:

$$\chi = \sup_{x, y, z, t} |(\Theta_1 - \Theta)/(\Theta_1 + \Theta)|$$

$$\Theta_1(t) = \sup |\Theta(x, y, z, t)|, \quad x \in [0, a], \quad y \in [0, b], \quad z \in [-h/2, h/2]$$

Ограничившись главным членом разложения, получим

$$R = R(t + {}^1/_2 b_0 v T_0^{-2} t^2)$$
$$v = \sum_{n=1}^{4} \varkappa_{n1} - (k^2 \varkappa_1/r) - (\varepsilon R_s/2) \sum_{n=2}^{4} n\varkappa_n \tag{11}$$

В качестве численного примера возьмем полиметилметакрилат [7], который характеризуется значениями параметров: $\lambda=0{,}0017$ кг(см·с·град)$^{-1}$, $T_0=20°$ С, $c=0{,}4$ кг(см^2·град)$^{-1}$, $\rho=1{,}18\cdot10^{-3}$ кг/см^3, $E=6{,}24\cdot10^7$ кг(см·с^2)$^{-1}$, $\nu=0{,}3$, $b_0=2754$. Функция скорости релаксации [8] имеет вид: $\Gamma(t) = 0{,}0442e^{-\beta_0 t}$, $\beta_0=1{,}3$. Для квадратной пластины со стороной $a=0{,}4$ м, толщиной $h=0{,}002$ м, полагая начальным амплитуде и скорости прогиба значения $f_0=10^{-3}$ м и $f_0'=0$, получим: $R=R(t+0{,}011t^2)$.

Подставляя ядро (11) в формулы (8) и (9), получим асимптотическое представление решения связанной задачи термовязкоупругости для начальных моментов времени. Входящие в (8)—(9) параметры, подсчитанные для ядра (11), имеют вид

$$\Omega = [1 - (2M/\beta_0)]/\beta_0$$

$$R_c = \beta_0(\beta_0^2 + \omega_0^2)^{-1}[1 - 2\beta_0 M(\beta_0^2 - 3\omega_0^2)(\beta_0^2 + \omega_0^2)^{-2}]$$

$$R_s = \omega_0(\beta_0^2 + \omega_0^2)^{-1}[1 - 2\beta_0 M(3\beta_0^2 - \omega_0^2)(\beta_0^2 + \omega_0^2)^{-2}]$$

$$R_{c2} = \beta_0(\beta_0^2 + 4\omega_0^2)^{-1}[1 - 2\beta_0 M(\beta_0^2 - 12\omega_0^2)(\beta_0^2 + 4\omega_0^2)^{-2}]$$

$$R_{s2} = 2\omega_0(\beta_0^2 + 4\omega_0^2)^{-1}[1 - 2\beta_0 M(3\beta_0^2 - 4\omega_0^2)(\beta_0^2 + 4\omega_0^2)^{-2}]$$

$$M = b_0 v/2(T_0)^2$$

Эти параметры отличаются от соответствующих им параметров стационарной задачи, имеющей решение (8)—(9), наличием вторых слагаемых в квадратных скобках. Указанные слагаемые приводят к некоторому увеличению амплитуды и частоты колебаний пластины, уменьшению затухания и сдвигу по частоте.

Для полиметилметакрилата получаем

$$\Omega=0{,}7692307\,[1-0{,}016923]=0{,}756213$$

$$R_c=4{,}40938\cdot10^{-5}\,[1-2{,}9099724\cdot10^{-6}]=4{,}4093671\cdot10^{-5}$$

$$R_s=5{,}82377\cdot10^{-3}[1-9{,}6984251\cdot10^{-7}]=5{,}8237643\cdot10^{-3}$$

$$R_{c2}=1{,}10239\cdot10^{-5}\,[1-7{,}2756902\cdot10^{-7}]=1{,}1023892\cdot10^{-5}$$

$$R_{s2}=2{,}91201\cdot10^{-3}[1-2{,}4251373\cdot10^{-7}]=2{,}9120093\cdot10^{-3}$$

Видно, что в начальные моменты времени, для которых справедлив проведенный анализ, основное влияние термомеханической связанности прослеживается на параметре Ω, который определяет сдвиг по фазе колебаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф.* Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек. Киев: Наук. думка, 1986. 221 с.
2. *Кийко И. А., Рудакова О. Б.* Несвязанная задача термовязкоупругости о свободных нелинейных колебаниях прямоугольной пластины // Вестн. МГУ. Сер. Математика, механика. 1988. № 3. С. 95–99.
3. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязко-упругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
4. *Победря Б. Е.* О решении задач термовязкоупругости с неоднородным полем температур // Упругость и неупругость. М.: Изд-во МГУ, 1971. Вып. 1. С. 172–201.
5. *Гасанов А. Б., Ильясов М. Х., Кийко И. А.* Распространение нестационарных волн в вязкоупругом полупространстве с учетом внутреннего теплообразования и зависимости свойств материала от температуры // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 1. С. 124–130.
6. *Ферри Дж.* Вязкоупругие свойства полимеров. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 535 с.
7. Физическая акустика/Под ред. Мэзона У. П. М.: Мир, 1966. Т. 1. Ч. А. 592 с.
8. *Иванов Н. Н., Музыченко В. П.* Определение параметров ядер релаксации по результатам волнового эксперимента // ПМТФ. 1983. № 1. С. 121–127.

Москва

Поступила в редакцию 29.II.1988