

УДК 539.3:534.1

С. Б. ФИЛИПОВ

НИЗКОЧАСТОТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ,
ПОДКРЕПЛЕННОЙ ДИСКРЕТНО РАСПОЛОЖЕННЫМИ
ШПАНГОУТАМИ

В большинстве работ, посвященных теоретическим исследованиям колебаний подкреплённых конических оболочек, например в [1, 2], используется замена подкреплённой оболочки конструктивно ортотропной. Дискретное расположение ребер учитывалось в [3], где для определения частот применялся вариационный метод.

В данной работе для определения нижней части спектра конической оболочки, подкреплённой дискретно расположенными шпангоутами, используется асимптотический метод [4, 5]. При этом основная трудность состоит в выделении граничных условий краевой задачи нулевого приближения на подкреплённой параллели. Для цилиндрической оболочки аналогичная задача рассмотрена в [6].

1. Систему уравнений свободных колебаний конической оболочки после разделения переменных запишем в безразмерном виде

$$\begin{aligned} (BT_1)' - B'T_2 + mT_{12} + \lambda Bu &= 0 \\ (BT_{12})' + BT_{12} - mT_2 + BR_2^{-1}N_2 + \lambda Bv &= 0 \\ (BN_1)' + mN_2 - BR_2^{-1}T_2 + \lambda Bw &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

где штрихом обозначено дифференцирование по безразмерной длине образующей конуса s , m — число волн по параллели, $B(s) = s \sin \varphi$, $R_2(s) = B(s) \cos^{-1} \varphi$, φ — угол полураствора конуса. Параметр частоты $\lambda = (1 - \nu^2) \rho \omega^2 r_0 E^{-1}$ выражается через коэффициент Пуассона ν , плотность материала ρ , модуль Юнга E , характерный размер r_0 и частоту колебаний ω .

Безразмерные усилия $T_1, T_2, T_{12}, N_1, N_2$ связаны с деформациями срединной поверхности формулами

$$\begin{aligned} BN_1 &= (BM_1)' - B'M_2 + mM_{12}, & BN_2 &= (BM_{12})' + B'M_{12} - mM_2 \\ M_1 &= \mu^4 (\kappa_1 + \nu \kappa_2), & M_2 &= \mu^4 (\kappa_2 + \nu \kappa_1), & M_{12} &= \mu^4 (1 - \nu) \kappa_{12} \\ T_1 &= \varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2, & T_2 &= \varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1, & T_{12} &= (1 - \nu) \varepsilon_{12}/2 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь $\mu^4 = h^2/12$, h — безразмерная толщина оболочки.

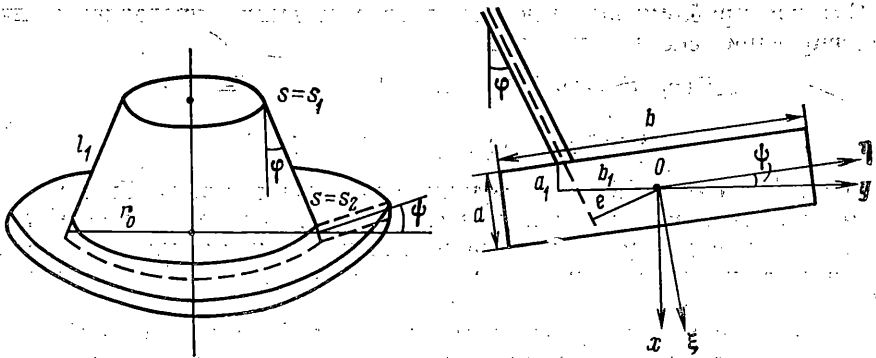
Деформации выражаются через перемещения срединной поверхности u, v, w и угол поворота ϑ :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= u', & B\varepsilon_2 &= mv + B'u + BR_2^{-1}w, & B\varepsilon_{12} &= Bv' - B'v - mu \\ \kappa_1 &= \vartheta', & B\kappa_2 &= m\eta + B'\vartheta, & \kappa_{12} &= \eta', & \vartheta &= -w', & \eta &= R_2^{-1}v + mB^{-1}w \end{aligned} \quad (1.3)$$

Пусть на краю оболочки $s = s_1$ заданы какие-либо четыре однородных граничных условия, а край $s = s_2$ подкреплён круговым стержнем (шпангоутом) с прямоугольным поперечным сечением. На фигуре ось Ox параллельна оси симметрии конуса, $O\xi, O\eta$ — главные центральные оси инерции поперечного сечения стержня.

Четыре условия сопряжения оболочки и стержня в точке $s = s_2$ запишем в виде

$$Z + nT_c - \lambda_c r_c^{-1} m(mv_c - w_c) = 0, \quad Y + b_1 Z + nM_x - \lambda_c(mv_c - v_c) = 0$$



$$\begin{aligned}
 m(X+M_1) + a_1 Z + nM_y - \lambda_c m \dot{u}_c &= 0 \\
 -(r_c + b_1 m^2)X - m^2 M_1 + a_1 m Y + nM_k + \lambda_c u_c &= 0
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned}
 X &= T_1 \cos \varphi - Q \sin \varphi, \quad Y = mQ \cos \varphi + mT_1 \sin \varphi - S \\
 Z &= m(mS - Q \cos \varphi - T_1 \sin \varphi)
 \end{aligned}$$

$$S = T_{12} + M_{12}/R_2, \quad Q = N_1 + mM_{12}/B$$

$$T_c = F_c \varepsilon_c, \quad M_x = J_x \kappa_x + J_{xy} \kappa_y, \quad M_y = J_y \kappa_y + J_{xy} \kappa_x, \quad M_k = J_k \kappa_k$$

$$\varepsilon_c = (m v_c + w_c) / r_c, \quad \kappa_x = m(v_c + m w_c) / r_c^2$$

$$\kappa_y = (m^2 u_c / r_c - \vartheta) / r_c, \quad \kappa_k = m(u_c / r_c - \vartheta) / r_c$$

$$u_c = u \cos \varphi - w \sin \varphi - b_1 \vartheta, \quad w_c = w \cos \varphi + u \sin \varphi + a_1 \vartheta$$

$$v_c = r_c v - m(d_1 u - e w)$$

$$d_1 = a_1 \cos \varphi + b_1 \sin \varphi, \quad e = a_1 \sin \varphi - b_1 \cos \varphi$$

$$\{F_c, J_x, J_y, J_{xy}\} = \sigma E_c (hE)^{-1} \{F_c', J_x', J_y', J_{xy}'\}, \quad J_k = \sigma G_c J_k' (hE)^{-1}$$

$$\lambda_c = \sigma \rho_c F_c (r_c r_0 \omega)^2 / (hE), \quad \sigma = 1 - \nu^2, \quad n = m(m^2 - 1)$$

r_c и $F_c' = ab$ — безразмерный радиус и площадь поперечного сечения стержня; E_c, G_c — модули упругости, ρ_c — плотность материала стержня. Моменты инерции поперечного сечения J_x', J_y', J_{xy}' могут быть выражены через главные моменты J_ξ, J_η по формулам

$$J_x' = J_\xi' \cos^2 \psi + J_\eta' \sin^2 \psi, \quad J_y' = J_\xi' \sin^2 \psi + J_\eta' \cos^2 \psi$$

$$J_{xy}' = 0,5(J_\eta' - J_\xi') \sin 2\psi, \quad J_\xi' = ab^3/12, \quad J_\eta' = a^3 b/12$$

Для вычисления J_k' можно пользоваться приближенной формулой $J_k' \approx 4J_\xi' J_\eta' (J_\xi' + J_\eta')^{-1}$. Пусть $a \sim \mu^\alpha, b \sim \mu^\beta$, а отношения $\rho_c/\rho, E_c/E, G_c/E$ имеют порядок единицы. Тогда

$$F_c \sim \mu^{\alpha+\beta-2}, \quad J_\xi \sim \mu^{\alpha+3\beta-2}, \quad J_\eta \sim \mu^{3\alpha+\beta-2}, \quad J_k \sim \mu^{3\alpha+3\beta-2-2\omega}$$

$$\{J_\xi, J_\eta\} = \sigma E_c (hE)^{-1} \{J_\xi', J_\eta'\}, \quad \omega = \alpha (\alpha \geq \beta), \quad \omega = \beta (\alpha < \beta)$$

Будем считать, что $e \sim \mu^\omega, a_1 \sim \mu^\omega, b_1 \sim \mu^\omega$. Ограничимся исследованием значений α и β из отрезка (1,2).

Предположим, что оболочка имеет среднюю длину μ , в частности

$$s_2 - s_1 \gg \mu \tag{1.5}$$

Рассмотрим свободные колебания с частотами, для которых

$$\lambda \sim \mu^2, \quad m \sim \mu^{-1/2} \tag{1.6}$$

Приближенное решение системы (1.1) — (1.3) будем искать в виде сумм переменных основного состояния с нулевым показателем изменчивости и функций краевого эффекта следующего вида:

$$x = \mu^r x_0 + \mu^q x_k \tag{1.7}$$

Нулевое приближение для основного состояния определяется путем интегрирования системы уравнений

$$\begin{aligned} B(v_0/B)' &= \delta u_0/B, & \sigma u_0' &= T_{10}, & (BT_{10})' &= -\delta S_0 \\ \delta^2 B^{-2} \cos^2 \varphi (S_0 B^2)' &= (\delta^8/B^4 - \lambda m^4) v_0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

где $\delta = m\mu^{1/2}$ в силу (1.6) есть величина порядка единицы. Систему (1.8) можно получить, используя гипотезы полубезмоментной теории оболочек. Значения r и q для различных переменных и выражения для главных членов интегралов основного состояния и краевого эффекта имеются в [5].

Чтобы приближенно определить частоты и формы колебаний необходимо произвести разделение граничных условий на главные и дополнительные. Четыре главных условия удовлетворяются интегралами системы (1.8), а невязки, возникающие в четырех дополнительных условиях ликвидируются соответствующим выбором интегралов краевого эффекта. Дальнейшее уточнение решения можно провести с помощью итерационного процесса, описанного в [5].

Рассмотрим однородное граничное условие

$$U_i = \sum_{j=1}^8 b_{ij} x_j \quad (1.9)$$

где x_j представляют собой значения перемещений, угла поворота, усилий и изгибающего момента на краю оболочки. Пусть $b_{ij} = \mu^{p_{ij}} b_{ij}^*$, где $b_{ij}^* \sim 1$. Представим каждую переменную x_{ij} в виде суммы (1.7), тогда

$$U_i = \sum_{j=1}^8 b_{ij}^* \mu^{p_{ij}} (\mu^{r_{ij}} x_{j0} + \mu^{q_{ij}} x_{jk})$$

Обозначим $r_i^* = \min_j (p_{ij} + r_j)$, $q_i^* = \min_j (p_{ij} + q_j)$, $\Delta_i = r_i^* - q_i^*$. Величины r_i^* и q_i^* — это порядки главных членов в (1.9), содержащих соответственно интегралы основного состояния и краевого эффекта.

Для того, чтобы последующие приближения уточняли предыдущие, необходимо выполнение следующих условий: 1. величины для главных граничных условий строго меньше, чем для дополнительных; 2. в нулевом приближении в главных условиях независимы интегралы основного состояния, а в дополнительных условиях — интегралы краевого эффекта.

Так, например, зависимы интегралы основного состояния v_0 и w_0 в виду того, что $w_0 \cos \varphi + \delta v_0 = 0$ и интегралы краевого эффекта Q_k и S_k , ибо $\delta Q_k = S_k \cos \varphi$.

Если условия 1 и 2 выполняются, то относительная погрешность определения λ из нулевого приближения имеет порядок μ^ξ , где ξ — минимум разностей величин Δ_i , соответствующих дополнительным и главным условиям. Величина ξ будет иметь наибольшее значение $\xi=1$ в том случае, если для двух главных условий $\Delta_{i_1} = \Delta_{i_2} = 0$, а для двух дополнительных $\Delta_{i_3} = \Delta_{i_4} = 1$. Если хотя бы одно из условий 1 и 2 не выполнено, то необходимо переходить к рассмотрению линейных комбинаций граничных условий, причем следует стремиться получить такие линейные комбинации, для которых ξ имеет максимально возможное значение.

2. Трудности разделения условий (1.4) связаны как с их громоздкостью, так и с тем обстоятельством, что величины p_{ij} , а следовательно и Δ_i зависят от параметров α и β , т. е. от относительных размеров поперечного сечения шпангоута. Несколько облегчает исследование условий (1.4) переход к новым переменным

$$\begin{aligned} \varepsilon &= (w \cos \varphi + mv)/m^3, & \kappa &= (mw \cos \varphi + v)/m^2 \\ P &= m^2 S - mQ/\cos \varphi, & R &= mQ/\cos \varphi - S \end{aligned} \quad (2.1)$$

Отбросив в (1.4) члены порядка μ и выше по сравнению с единицей, получим

$$\begin{aligned}
 U_1 &= P - mX \operatorname{tg} \varphi + m^3 F_c \varepsilon_k = 0, & (2.2) \\
 U_2 &= R + mX \operatorname{tg} \varphi + b_1 P + m^3 (J_x \kappa_x + J_{xy} \kappa_y) - \lambda_c m^2 \kappa = 0, \\
 U_3 &= m(M_1 + X) + a_1 P + m^3 (J_y \kappa_y + J_{xy} \kappa_x) = 0 \\
 U_4 &= (em^2 \cos^{-1} \varphi - 1) X - m^2 M_1 + a_1 m R + m^3 J_k \kappa_k = 0 \\
 \varepsilon_k &= m^3 \varepsilon + m^3 e \kappa \cos^{-1} \varphi + (\sin \varphi - m^2 d_1) u + a_1 \vartheta \\
 \kappa_x &= m^3 \kappa - a_1 m^3 \varepsilon \operatorname{tg} \varphi + m^2 u \sin \varphi + a_1 m^2 \vartheta \\
 \kappa_y &= -m^3 \operatorname{tg} \varphi (\kappa + \varepsilon) + m^2 u \cos \varphi - (1 - b_1 m^2) \vartheta \\
 \kappa_k &= m^2 \operatorname{tg} \varphi (\varepsilon - \kappa) + m(u \cos \varphi - \vartheta)
 \end{aligned}$$

Переменные $x_1 = X$, $x_2 = R$, $x_3 = \kappa$, $x_4 = u$ будем называть основными, а переменные $x_5 = P$, $x_6 = M_1$, $x_7 = \varepsilon$, $x_8 = \vartheta$ — дополнительными. Для основных переменных в представлении (1.7) $r = q$, для дополнительных $r = q + 1$, поэтому каждое из условий (2.2) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 U_i &= \sum_{j=1}^4 b_{ij}^* \mu^{p_{ij}+q_j} (x_{j_0} + x_{j_k}) + \sum_{j=5}^8 b_{ij}^* \mu^{p_{ij}+q_j} (\mu x_{j_0} + x_{j_k}) \\
 q_1 = q_4 &= 1, \quad q_2 = q_7 = 3/2, \quad q_3 = 1/2, \quad q_5 = -1/2, \quad q_6 = 2, \quad q_8 = -1
 \end{aligned}$$

Обозначим

$$r_i' = \min_{1 \leq j \leq 4} (p_{ij} + q_j), \quad q_i' = \min_{5 \leq j \leq 8} (p_{ij} + q_j) \quad (2.3)$$

Величины r_i' и q_i' представляют собой порядки главных членов, содержащих основные и дополнительные переменные в условии $U_i = 0$. Очевидно

$$r_i^* = \min(r_i', q_i' + 1), \quad q_i^* = \min(r_i', q_i') \quad (2.4)$$

$$\Delta_i = 0 \quad (r_i' < q_i'), \quad \Delta_i = q_i' - r_i' \quad (q_i' \leq r_i' \leq q_i' + 1), \quad \Delta_i = 1 \quad (r_i' > q_i' + 1) \quad (2.5)$$

Формулы (2.4), (2.5) показывают, что использование переменных (2.1) позволяет при нахождении Δ_i не прибегать к представлению каждой переменной в виде суммы (1.7). Благодаря этому в два раза уменьшается число слагаемых, порядки которых нужно рассматривать. Кроме того, независимость X_0 , R_0 , κ_0 , u_0 и P_k , M_{1k} , ε_k , ϑ_k дает возможность проверять выполнение условия 2 также без использования (1.7).

Граничные условия (2.2), вообще говоря, не удовлетворяют условиям 1 и 2. Например, при $\alpha = \beta = 1$ имеем $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$, $\Delta_4 = 1$, и условие 1 не выполняется. Составим линейную комбинацию условий $U_1 = 0$ и $U_2 = 0$, исключив из них переменную κ . Левую часть нового граничного условия обозначим U_5 , а способ получения его запишем так: $U_5 \rightarrow (1, 2; \kappa)$. Тогда $\Delta_5 = 1$ и условия $U_4 = 0$, $U_5 = 0$ можно взять в качестве дополнительных, так как главные члены в них содержат разные дополнительные переменные ε и ϑ .

Однако никакие два из условий $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$ не могут быть выбраны в качестве главных, так как во всех трех условиях главные члены, содержащие основную переменную, пропорциональны κ . Для получения второго главного условия составим следующие линейные комбинации: $U_6 \rightarrow (2, 3; \kappa)$, $U_7 \rightarrow (2, 4; \kappa)$, $U_8 \rightarrow (6, 7; \vartheta)$. Главные члены, содержащие основные переменные в условии $U_8 = 0$, пропорциональны u и X , а $\Delta_8 = 0$. Набор двух главных условий $U_1 = 0$, $U_8 = 0$ и двух дополнительных $U_4 = 0$, $U_5 = 0$ при $\alpha = \beta = 1$ обеспечивает максимальный порядок погрешности нулевого приближения $\xi = 1$.

Условие $U_8 = 0$ является универсальным в том смысле, что оно может быть использовано в качестве главного при любых значениях α и β из интервала (1, 2). Вторым главным при $\alpha + \beta \leq 2$ будет условие $U_6 = 0$, а при

$\alpha + \beta > 2 - U_{10} = 0$, где $U_9 \rightarrow (2, 3; X)$, $U_{10} \rightarrow (9, 11; P)$, $U_{11} \rightarrow (1, 3; X)$. Универсальным дополнительным является условие $U_{12} = 0$ где $U_{12} \rightarrow (6, 7; X)$. Условие $U_{11} = 0$ в случае $\psi = \varphi$ следует использовать в качестве второго дополнительного при $\alpha + 3\beta > 6$, а в случае $\psi \neq \varphi$ — при $\alpha + 3\beta > 6$ если $\alpha < \beta$ и при $3\alpha + \beta > 6$ если $\alpha > \beta$. Для остальных допустимых значений α и β в качестве дополнительного надо взять условие $U_{13} = 0$ где $U_{13} \rightarrow (9, 11; \kappa)$.

Следовательно систему (1.8) надо решать при следующих граничных условиях в точке $s = s_2$ сопряжения оболочки со шпангоутом

$$S_0 + c_s v_0 = 0, \quad T_{10} = c_n u_0 = 0 \quad (2.6)$$

$$c_s = (J + \lambda_c m^4) m^6 \mu^{-1} (\alpha + \beta < 3), \quad c_s = (J + e^2 F_c) m^6 \mu^{-1} (\alpha + \beta \geq 3)$$

$$c_n = m^6 J_{\xi} J_{\eta} J_k (m^2 J + e^2 J_{\xi} J_{\eta})^{-1} \quad (2.7)$$

$$J = [J_{\xi} \cos^2(\varphi - \psi) + J_{\eta} \sin^2(\varphi - \psi)] \cos^{-2} \varphi, \quad e_2 = \cos \varphi - e m^2$$

В формуле для c_s можно пренебречь слагаемым $\lambda_c m^4$, связанным с учетом инерции стержня. При этом будет допущена погрешность порядка μ^1 , где $\gamma \geq 2/3$.

Если шпангоут установлен без эксцентриситета, т. е. $e = 0$, то граничные условия (2.6) обеспечивают равенство $\xi = 1$ для всех α и β на отрезке (1, 2). При $e \neq 0$ путем исключения переменных из условий (2.2) нельзя получить линейные комбинации, обеспечивающие максимальный порядок погрешности нулевого приближения $\xi = 1$ при всех α и β . Нетрудно убедиться, что $\xi < 1$ в случае $\psi = \varphi$ при $4 < \alpha + 2\beta < 5$, а в случае $\psi \neq \varphi$ — при $4 < \alpha + 2\beta < 5$, если $\alpha < \beta$ и при $4 < 2\alpha + \beta < 5$, если $\alpha > \beta$, причем в обоих случаях имеется единственная точка $\alpha = \beta = 3/2$, в которой $\xi = 0$.

Рассмотрим точку $\alpha = \beta = 3/2$. Чтобы получить для нее линейные комбинации, обеспечивающие выполнение условий 1 и 2, необходимо использовать явные выражения для интегралов краевого эффекта. Представим каждое слагаемое в выражениях для U_9, U_{10}, U_{12} в виде суммы (1.7) и сохраним лишь главные члены. С точностью до величин $O(\mu^{1/2})$ получим

$$U_9 \approx R_0 \delta^4 \cos^2 \varphi + m^6 J \delta^2 \kappa_0 - e P_k \cos \varphi = 0$$

$$U_{10} \approx R_0 \delta^2 \cos^2 \varphi + m^6 (J + e^2 F_c) + e m^6 \delta^2 F_c e_k \cos \varphi = 0$$

$$U_{12} \approx \delta^6 M_{1k} + m^2 J_k \vartheta_k = 0$$

С учетом результатов [5] и формул (2.1) имеем

$$P_k(s_2) = -2q^3 \delta^3 (C_2 - C_1), \quad e_k(s_2) = C_1 \delta^{-3} \cos \varphi$$

$$M_k(s_2) = -2q^2 \delta^4 C_1, \quad \vartheta_k(s_2) = -q \delta^2 (C_1 + C_2), \quad q = (\sigma \cos^2 \varphi)^{1/4}$$

Ввиду (1.5) интегралы краевого эффекта зависят только от двух произвольных постоянных C_1 и C_2 , поэтому P_k можно исключить из условия $U_9 = 0$ при помощи двух других условий. Полученное таким способом условие

$$U_{14} \approx S_0 + c_s^* v_0 = 0 \quad (2.8)$$

$$c_s^* = m^6 \mu^{-1} (J + e^2 F_c (1 + p)^{-1})$$

$$p = F_c (J_k m^2 + 2q \mu^3) (J_k m^2 + q \mu^3)^{-1} / (4q^3 \mu) \quad (2.9)$$

можно использовать в качестве главного наряду с условием $U_8 = 0$. Добавив два дополнительных условия $U_{10} = 0$ и $U_{12} = 0$, получим набор, обеспечивающий в точке $\alpha = \beta = 3/2$ порядок погрешности нулевого приближения $\xi = 1/2$.

При $\alpha + \beta > 3$ имеем $p \ll 1$, при $\alpha + \beta < 3$ будет $p \gg 1$, и условие (2.8) переходит в первое условие (2.6), если пренебречь в выражении для c_s слагаемым $\lambda_c m^4$. Поэтому условием (2.8) можно пользоваться при всех α и β на отрезке (1, 2).

φ	m	1	2	3	4	5
0°	5	1,02	1,15	1,15	1,33	1,33
	6	0,70	0,96	0,96	1,34	1,34
	7	0,73	1,21	1,21	1,86	1,86
15°	5	1,01	1,13	1,14	1,29	1,31
	6	0,72	0,97	1,00	1,31	1,35
	7	0,79	1,24	1,30	1,83	1,90
30°	5	0,99	1,08	1,15	1,20	1,26
	6	0,83	1,03	1,18	1,28	1,42
	7	0,95	1,34	1,62	1,81	2,07
45°	5	1,04	1,10	1,16	1,17	1,30
	6	0,99	1,14	1,28	1,30	1,58
	7	1,00	1,28	1,53	1,57	2,05

Если шпангоут расположен на внутренней параллели $s=s_2$, оболочки с краями $s=s_1$ и $s=s_3$ ($s_1 < s_2 < s_3$), то условия (2.6) надо заменить следующими:

$$S_0^{(1)} + c_s^* v_0^{(1)} = S_0^{(2)}, \quad T_{10}^{(1)} + c_n u_0^{(1)} = T_{10}^{(2)}, \quad s=s_2 \quad (2.10)$$

где величины с индексами 1 и 2 наверху представляют собой решения системы (1.8) на отрезках (s_1, s_2) и (s_2, s_3) . Еще два главных условия следуют из непрерывности перемещений в точке $s=s_2$:

$$v_0^{(1)} = v_0^{(2)}, \quad u_0^{(1)} = u_0^{(2)} \quad (2.11)$$

3. В качестве примера рассмотрим задачу об определении наименьших частот колебаний усеченной конической оболочки, подкрепленной по параллели $s=s_2$ одним шпангоутом. Пусть на краях оболочки $s=s_1$ и $s=s_3$ выполнены условия шарнирного опирания. Тогда главные условия на этих краях имеют вид [5]:

$$v_0 = T_0 = 0 \quad (3.1)$$

В качестве характерного размера r_0 выберем радиус параллели $s=s_2$.

В результате численного решения системы (1.8) с граничными условиями (2.10), (2.11), (3.1) получены приведенные в таблице наименьшие значения величины $\lambda' = \lambda \cdot 10^2$ для подкрепленной оболочки со следующими безразмерными параметрами: $l_1 = l_2 = 1$, $h = a = 1/200$, $b = 0,03$; $\rho_c/\rho = E_c/E = 1$, $\nu = 0,3$. В первом столбце даны значения λ' для соответствующей гладкой оболочки, в остальных — для подкрепленной. Результаты, приведенные во втором столбце получены при $e=0$, $\psi=0$, в третьем — при $e=0$, $\psi=\varphi$, в четвертом — при $e=b/2$, $\psi=0$, в пятом — при $e=b/2$, $\psi=\varphi$.

Выбранные значения параметров отвечают конструкциям, которые часто используются на практике. Для таких значений и близких к ним $c_n \ll 1$ и главный вклад шпангоута в изменение собственной частоты определяется значением величины c_s^* . Как видно из (2.8), c_s^* имеет смысл жесткости упругого подкрепления, поэтому с увеличением c_s^* собственная частота растет. Из (2.9) следует, что c_s^* увеличивается при возрастании эксцентриситета подкрепления e по абсолютной величине (влияние знака e нулевое приближение асимптотики не улавливает). Результаты, приведенные в таблице, показывают, что влияние эксцентриситета возрастает с увеличением числа волн по параллели m и убывает с увеличением угла конусности φ . При $b > a$, $J_s > J_n$ и из формул (2.7), (2.9) следует, что наибольшего значения величина c_s^* достигает при $\psi=\varphi$. Результаты расчетов свидетельствуют о том, что увеличение угла ψ от нуля до φ приводит к более существенному возрастанию собственной частоты при больших m и φ .

Для оценки погрешности асимптотических формул проведено численное интегрирование полной системы уравнений (1.1)–(1.3) методом ортогональной прогонки. В случае $\varphi=15^\circ$, $e=0$ получены следующие значения величины $\lambda'=\lambda'(m, \varphi)$: $\lambda'(6, 0)=0,84$; $\lambda'(7, 0)=1,11$; $\lambda'(6, \varphi)=0,85$; $\lambda'(7, \varphi)=1,13$. Для гладкой оболочки $\lambda'(6, \dots)=0,64$; $\lambda'(7, \dots)=0,74$. Погрешность результатов расчетов по асимптотическим формулам для данного примера составляет 10–15%.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вайнгарген*. Свободные колебания подкрепленных кольцами конических оболочек // Ракетн. техника и космонавтика. 1965. Т. 3. № 8. С. 129–136.
2. *Лесничая В. А., Писанко А. Н.* Собственные колебания эксцентрично подкрепленных конических оболочек // Строит. механика и расчет сооружений. 1980. № 2. С. 52–57.
3. *Амиро И. Я., Заруцкий В. А., Паламарчук В. Г.* Динамика ребристых оболочек. Киев: Наук. думка, 1983. 204 с.
4. *Поверус Л. Ю., Ряляят Р. К.* Малые неосесимметричные собственные колебания упругих тонких конических и цилиндрических оболочек вращения // Тр. Таллин. политехн. ин-та. 1958. Сер. А. № 147. С. 31–64.
5. *Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е.* Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 383 с.
6. *Филиппов С. Б.* Свободные колебания и устойчивость круговой цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами // Динамика и устойчивость механических систем. Л., 1984. Прикладная механика; Вып. 6. С. 153–160.

Ленинград

Поступила в редакцию
13.I.1988