

УДК 533.6.013.42

Д. Г. МАРКУШЕВИЧ

КОЛЕБАНИЯ ДВОЙНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ЖИДКОСТЬЮ

Асимптотическим методом исследуется задача об определении формы вынужденных установившихся колебаний пары соосных цилиндрических оболочек, между которыми находится тонкий слой жидкости. Колебания возбуждаются нормальной силой, приложенной к параллели одной из оболочек. Выявляются асимптотические особенности поведения колеблющейся системы. Исследуется вопрос о взаимном влиянии оболочек и жидкости. В области низких частот формулируются приближенные методы расчета колебаний.

1. Постановка задачи. Рассматривается задача об определении формы вынужденных установившихся колебаний пары соосных цилиндрических оболочек, пространство между которыми заполнено идеальной сжимаемой жидкостью. Вынуждающая сила распределена вдоль кругового сечения одной из оболочек, направлена по нормали к ней и имеет вид $F = A \exp i(m\theta + \omega t)$, где ω — круговая частота, θ — координата в поперечном направлении. Расстояние между оболочками считается малым по сравнению с их радиусами. Задача зависит от многих параметров, которые удобно задать следующим образом:

$$\begin{aligned} \eta &= h_1/R_1, \quad h_2/R_2 \sim \eta^a, \quad \rho_l/\rho_j \sim \eta^a \\ c_l/c_j &\sim \eta^b, \quad l = |R_2 - R_1|/R_1 \sim \eta^c \\ \lambda_j &= \omega^2 \rho_j R_j^2 / E_j \sim \eta^{2r}, \quad m \sim \eta^{-p} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь индекс $j=1, 2$ — номер оболочки (сила приложена к первой оболочке); $h_j, R_j, \rho_j, c_j, E_j$ — полутолщина, радиус, плотность, скорость звука и модуль Юнга материала j -ой оболочки, ρ_l, c_l — плотность и скорость звука в жидкости. За основной малый параметр задачи принята относительная полутолщина первой оболочки. Предполагается, что порядки величин ρ_j, c_j, λ_j одинаковы для обеих оболочек; в формулах (1.1) это выражается в отсутствии у показателей a, b, r индекса j . Для сокращения числа вариантов делаются следующие предположения: 1) сила приложена к внутренней оболочке ($R_2 > R_1$); 2) вторая оболочка тоньше первой ($d > 1$); 3) толщина слоя жидкости больше, чем толщина оболочек ($c < 1$); 4) $a = 0,5$; $b = 0,25$, что соответствует комбинации сталь — вода при $\eta = 0,01$; 5) $0 < p < 0,5$; $r > 0$. Последнее предположение означает, что число волн по параллели m не очень велико, а частота мала, т. е. безразмерные частотные параметры $\lambda_j \ll 1$.

Цель работы состоит в том, чтобы выявить асимптотические особенности поведения колеблющейся системы и сформулировать возможные приближенные методы расчета в зависимости от пределов, в которых изменяются параметры (1.1). Особый интерес представляет вопрос о взаимном влиянии оболочек и жидкости. Для того, чтобы изучить этот эффект, мы не ставим между оболочками никаких связей и считаем, что оболочки могут взаимодействовать только через жидкость.

Движение цилиндрических оболочек будем описывать стандартными уравнениями линейной теории (см., например, [1]) с динамическими членами, учитывая давление жидкости в правой части третьего уравнения

равновесия. В пространстве, занятом жидкостью, должны выполняться соотношения

$$\Delta_3 \varphi + (\omega^2/c_l^2) \varphi = 0 \quad (1 \leq \xi \leq 1+l)$$

$$\frac{1}{R_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} = -w_1, \quad \frac{1}{R_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1+l} = -w_2 \quad (1.2)$$

где Δ_3 — трехмерный оператор Лапласа в безразмерных (по длине R_1) цилиндрических координатах (ξ, θ, ζ) . Через w_j обозначаются нормальные прогибы оболочек; последние два равенства (1.2) выражают условие непротекания жидкости на лицевых поверхностях оболочек.

2. Расчленение на краевой эффект и полубезмоментную задачу с присоединенной массой жидкости. Известно, что расчет оболочки в вакууме на действие нормальной распределенной вдоль линии силы можно приближенно выполнить следующим образом [2]: рассечь оболочку вдоль загруженной параллели $\xi=0$ и решить задачи однородной задачи при $\xi>0$ и $\xi<0$, выполнив соответствующие условия стыка. При этом можно сначала выполнить нетангенциальные условия стыка, а затем ставить вопрос об устранении тангенциальных невязок.

В области невысоких частот и не слишком больших m ($r>0, p<1/2$) расчет можно производить по следующей схеме: а) создать заданный разрыв в нетангенциальных условиях стыка, исходя из уравнений простого краевого эффекта и б) устранить разрывы в тангенциальных условиях стыка, исходя из безмоментных или полубезмоментных уравнений.

Быстро затухающее напряженно-деформированное состояние, являющееся решением задачи (а), можно строить без учета граничных условий; при решении задачи (б), дающей медленно меняющуюся компоненту напряженно-деформированного состояния, граничные условия надо учитывать. Для конкретности будем ставить условие излучения на бесконечности, вытекающее из принципа предельного поглощения.

Эта схема расчета оказывается применимой и в более общей ситуации — когда оболочка контактирует с акустической средой. Ранее рассматривался¹ случай оболочки вращения, погруженной в бесконечную жидкость. Наиболее явное решение задача допускает для цилиндрической оболочки, поскольку в этом случае удается исключить входящее в третьем полубезмоментное уравнение равновесия давление жидкости введением коэффициента присоединенной массы.

Возможность исключения давления жидкости основана на следующем характеристическом свойстве полубезмоментного напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки: его изменчивость в продольном направлении асимптотически меньше, чем в поперечном. В силу условия непротекания, тем же свойством должен обладать потенциал перемещений жидкости вблизи оболочки. Поэтому для определения давления в пристеночном слое жидкости можно решать упрощенное уравнение Гельмгольца, в котором опущена производная $\partial^2 \varphi / \partial \xi^2$. Это уравнение является обыкновенным дифференциальным по переменной ζ , поскольку оно не содержит производных по ξ , и очевидным образом решается в функциях Бесселя. Оставляя лишь решение, убывающее на бесконечности, мы сможем удовлетворить условию непротекания на оболочке и получить искомое выражение для $\varphi|_{\xi=1}$ через $(\partial \varphi / \partial \zeta)|_{\xi=1} = -Rw$.

Область применимости указанного метода несколько уже, чем в «сухом» случае; она ограничена неравенствами

$$p < 1/2, \quad r > (1-a-p)/2 \quad (2.1)$$

Ниже этот метод распространяется на двойную цилиндрическую оболочку, заполненную жидкостью.

3. Коэффициенты присоединенной массы в полубезмоментной задаче. Соображения, высказанные в п. 2, сохраняют силу и в случае, когда жид-

¹ Гольденвейзер А. Л., Радовинский А. Л. Асимптотический анализ колебаний и излучение оболочки вращения в жидкости: Препринт № 275. М.: ИПМ АН СССР, 1986.

кость не бесконечна; а заполняет слой между двумя оболочками. Разница состоит в том, что вместо убывающего в пристеночном слое решения следует строить решение, удовлетворяющее условиям непротекания на обеих оболочках. Приближенное уравнение имеет вид:

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d\varphi}{d\xi} + \left(\frac{R^2\omega^2}{c_1^2} - \frac{m^2}{\xi^2} \right) \varphi = 0 \quad (3.1)$$

$$(1 \leq \xi \leq 1+l)$$

Его решение с краевыми условиями (1.2) дает выражения для членов с давлением жидкости в уравнениях оболочек вида $(-1)^{j+1} R_j \rho_l \omega^2 \varphi|_{\xi=R_j/R_1} = a_{j1} w_1 + a_{j2} w_2$; числа a_{jk} будем называть коэффициентами присоединенной массы. Поскольку для асимптотических рассмотрений важно иметь представления входящих величин в виде степеней основного малого параметра η , мы выведем более простые формулы для главных частей коэффициентов a_{jk} , чем те, которые дает (3.1). Для этого произведем дальнейшие упрощения. Во-первых, в (3.1) можно пренебречь переменностью коэффициентов $1/\xi$ и $-m^2/\xi^2$. Во-вторых, можно пренебречь динамическим членом, так как $R^2\omega^2/c_1^2 \sim \eta^{2r-2b} \ll \eta^{-2p} \sim m^2$, т. е. $p+r-b > 0$. Это неравенство вытекает из (2.1); ниже будет показано, что в области применимости нашего метода оно также выполняется. В-третьих, поскольку $d^2\varphi/d\xi^2$ и $m^2\varphi$ — величины одного порядка, и $m^2 \gg 1$, мы можем опустить член $d\varphi/d\xi$. Окончательно вместо (3.1) получим: $d^2\varphi/d\xi^2 - m^2\varphi = 0$. Главные части коэффициентов a_{jk} имеют вид

$$a_{11} = a_{22} = (R_1^2 \rho_l \omega^2 / m) \operatorname{cth} ml, \quad a_{12} = a_{21} = -a_{11} / \operatorname{sh} ml \quad (3.2)$$

Из этих формул видно, что перекрестные члены a_{12} и a_{21} , вводящие в уравнения динамическую связь между оболочками, пренебрежимо малы, если $ml \gg 1$, т. е. $p > c$. В этом случае задача тривиальна, поскольку оболочки работают независимо. Поэтому в дальнейшем мы предполагаем, что $p < c$. Физически это означает, что длина волны по параллели превышает расстояние между оболочками.

4. Акустическое поле краевого эффекта. Исследуем теперь вопрос о роли акустического поля в межоболочечном слое жидкости для компоненты решений задачи, соответствующей простому краевому эффекту внутренней оболочки. В соответствии с общими принципами асимптотического метода, мы в первом приближении пренебрежем обратным влиянием жидкости и внешней оболочки на внутреннюю оболочку; затем проверим, что учет отброшенных членов ведет к асимптотически малым поправкам. Для этой проверки придется решать уравнение Гельмгольца в межоболочечном слое с условиями непротекания на оболочках. Эта задача в свою очередь будет подвергнута упрощению с последующей проверкой законности этого упрощения.

Для простоты будем предполагать, что ширина зоны краевого эффекта, имеющая порядок $\eta^{1/2}$, асимптотически меньше, чем расстояние между оболочками $l \sim \eta^c$, т. е. $c < 1/2$. При таком предположении акустическое поле вблизи внешней оболочки имеет вид цилиндрической волны $\varphi \approx \varphi \left([(\xi-1)^2 + \xi^2]^{1/2} \right)$ и возбуждает колебания оболочки изменяемостью порядка $1/l \sim \eta^{-c} \sim \eta_2^{-c/d}$. Асимптотический анализ уравнений внешней оболочки показывает, что для внешней нагрузки такой изменчивости главную часть нормального прогиба w_2 можно определять по формуле

$$w_2 = -\lambda_2 \rho_l (2\rho_2 h_2)^{-1} \varphi|_{\xi=1+l} \quad (4.1)$$

соответствующей задаче о прогибе пластины под действием медленно меняющейся по координате динамической нагрузки.

Итак, для первой оболочки пользуемся формулами простого краевого эффекта без учета жидкости [2]:

$$w_1(\xi) = - \sum_{n=1}^2 D_n \exp(\xi_n' / f \xi) \quad (\xi \leq 0)$$

$$w_2(\xi) = - \sum_{n=3}^4 D_n \exp(\zeta_n' f \xi) \quad (\xi \geq 0)$$

$$f = [3R^2(1-\nu^2)/h^2]^{1/4}, \quad \zeta_n' = \exp[(2n-3)i\pi/4] \quad \zeta_n'^4 = -1, \quad (4.2)$$

$$D_n = (RfA/8Eh)\zeta_n' \quad (n=1, \dots, 4)$$

Константы D_n определены из нетангенциальных условий стыка при $\xi=0$: $[N_1]=A$, $[G_1]=[w]=[y_1]=0$, где квадратные скобки обозначают скачок функции в нуле: $[F]=F(+0)-F(-0)$. Величины N_1 , G_1 , y_1 выражаются через $w=w_1$ формулами простого краевого эффекта [2].

Как в п. 3 подвергнем уравнение Гельмгольца некоторым упрощениям. Мы интересуемся поведением жидкости в небольшой области вблизи нагруженной параллели, линейный размер которой порядка l . В указанной области изменяемость решений уравнения Гельмгольца велика по обеим координатам (ξ, ζ) , поэтому как и в п. 3 $|\partial^2\varphi/\partial\xi^2| \gg |\partial\varphi/\partial\xi|$. С учетом этого и сделанных в п. 3 замечаний пристеночное уравнение Гельмгольца можно записать в виде (для удобства вместо ζ введена координата $\alpha=\zeta-1$):

$$(\partial^2/\partial\xi^2 + \partial^2/\partial\alpha^2 - m^2)\varphi(\xi, \alpha) = 0 \quad (4.3)$$

В качестве первого приближения ищем решение (4.3) с условием непротекания при $\alpha=0$ и свободной границей при $\alpha=l$. Оно имеет вид

$$\varphi(\xi, \alpha) = - \frac{R}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} w_1(\tau) \{G(\tau-\xi, \alpha) - G(\tau-\xi, 2l-\alpha)\} d\tau$$

$$G(\xi, \alpha) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} K_0(m[\xi^2 + (4jl+\alpha)^2]^{1/2}) \quad (4.4)$$

где K_0 — модифицированная функция Бесселя. Амплитудное значение $\varphi_0 = \varphi(0, 0) = \sum \varphi_{0,j}$ ($j=-\infty, \dots, \infty$) можно оценить, учитывая, что при $z \rightarrow 0$ $K_0(z) \sim \ln(1/z)$, а при $z \rightarrow \infty$ $K_0(z) \sim (\pi/2z)^{1/2} e^{-z}$. Таким образом, оценкой для φ_0 может служить конечная сумма $\varphi_0 \sim \sum \varphi_{0,j}$ ($j=-n, \dots, n$), $n = [1/4ml]$. Для вычисления $\varphi_{0,0}$ можно применить формулу [3]:

$$\int_0^{\infty} e^{-k\tau} K_0(m\tau) d\tau = \frac{\text{Arth}[(k^2 - m^2)^{1/2}/k]}{(k^2 - m^2)^{1/2}} \quad (4.5)$$

для $k = \pm \zeta_n' f$. Учитывая, что $|k/m| \gg 1$ $\arg k = \pm \pi/4$, получаем

$$\text{Arth}[(k^2 - m^2)^{1/2}/k] \approx \text{Ln}(2k/m), \quad (k^2 - m^2)^{1/2} \approx k$$

$$\varphi_{0,0} = (2\pi E h)^{-1} R^2 A \ln(2f/m)$$

$$\varphi_0 \sim \sum_{j=-n}^n \varphi_{0,j} \sim \frac{R^2 A}{2\pi E h} \left(\ln \frac{2f}{m} + O(1) \right) \quad (4.6)$$

Условие, при котором член с добавлением жидкости в уравнениях краевого эффекта первой оболочки пренебрежимо мал, имеет вид

$$|\lambda \rho_1 \varphi(\xi, 0) / 2\rho_1 h| \ll |w(\xi)| \quad (4.7)$$

Подставляя вместо значения $\varphi(\xi, 0)$, заданного формулой (4.4), его амплитудное значение φ_0 из (4.6), а вместо $w(\xi)$ амплитудное значение $w(0)$, определяемое из (4.2), мы сможем перейти к асимптотикам (1.1)

и перепишем условие (4.7) в виде неравенства $2r^{-1/2} + a > 0$, которое при сделанных в п. 1 предположениях выполняется автоматически.

Теперь оценим прогиб w_2 . В начальном приближении (см. формулу (4.1)) $w_2 = 0$. Вычисляем следующее приближение

$$w_2 = -\frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=l} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} w_1(\tau) \frac{d}{d\alpha} \{G(\tau - \xi, \alpha) - G(\tau - \xi, 2l - \alpha)\} \Big|_{\alpha=l} d\tau \quad (4.8)$$

Учитывая асимптотики $K_0(z)$ при $z \rightarrow 0, \infty$ и то обстоятельство, что вклад в интеграл (4.8) дает зона краевого эффекта шириной $2/f$, получаем оценку $w_2 \sim w_1(0) \cdot 2 \ln(1/ml)/(fl)$, из которой видно, что $w_2 \ll w_1$.

Последнее, что осталось проверить — это малость поправки, обусловленной давлением на жидкость со стороны внешней оболочки. В начальном приближении предполагалось $\varphi_2 = \varphi|_{\alpha=l} = 0$ (условие свободной границы). Теперь можно определить порядок поправки следующего приближения, решая для поправочного поля φ' смешанную граничную задачу: $(\partial \varphi' / \partial \alpha)_{\alpha=0} = 0$, $\varphi'|_{\alpha=l} = -(2\rho_2 h_2 / (\lambda_2 \rho_l)) w_2$. Решение этой задачи записывается формулой, аналогичной (4.4). Опуская выкладки, приведем лишь результат: условие малости поправки $\varphi'(\xi, 0)$ к полю $\varphi(\xi, 0)$ на внутренней оболочке имеет вид

$$\varphi' \sim \frac{2\rho_2 h_2}{\lambda_2 \rho_l fl} w_1(0) \ll \varphi \sim \frac{2\rho_1 h_1}{\lambda_1 \rho_l} w_1(0) \quad (4.9)$$

что заведомо верно, поскольку $h_2 \ll h_1, fl \gg 1$.

5. Решение полубезмоментной задачи. Перейдем теперь к анализу тангенциальной задачи. Она сводится к решению полубезмоментных систем для двух цилиндрических оболочек, все уравнения которых тождественны уравнениям [2], кроме третьего уравнения равновесия. Для j -ой оболочки оно имеет вид

$$T_2^{(j)} + \partial N_2^{(j)} / \partial \theta + a_{j1} w_1 + a_{j2} w_2 = 0 \quad (j=1, 2) \quad (5.1)$$

где a_{ji} — коэффициенты присоединенной массы, заданные формулами (3.2). Эта система решается методом введения двух потенциальных функций Φ_j ($j=1, 2$), через которые все компоненты напряженно-деформированного состояния оболочек можно выразить с помощью следующих расчетных формул [2]:

$$\begin{aligned} u_1^{(j)} &= -\frac{\partial^3 \Phi_j}{\partial \xi \partial \theta^2}, & u_2^{(j)} &= \frac{\partial^3 \Phi_j}{\partial \theta^3}, & w_j &= \frac{\partial^4 \Phi_j}{\partial \theta^4} \\ T_1^{(j)} &= -\frac{2E_j h_j}{R_j} \frac{\partial^4 \Phi_j}{\partial \xi^2 \partial \theta^2}, & T_2^{(j)} &= -\frac{2E_j h_j}{R_j} \left\{ \frac{\partial^4 \Phi_j}{\partial \xi^4} + \right. \\ &+ \left. \frac{h_j^2}{3R_j^2 (1-\nu_j^2)} \left(\frac{\partial^6 \Phi_j}{\partial \theta^6} + \frac{\partial^4 \Phi_j}{\partial \theta^4} \right) \right\}, & S_j &= \frac{2E_j h_j}{R_j} \frac{\partial^4 \Phi_j}{\partial \xi \partial \theta^3} \end{aligned} \quad (5.2)$$

и т. д. Подстановка формул (5.2) во все полубезмоментные уравнения, кроме (5.1), обращает их в тождество, а (5.1) дает систему двух уравнений на Φ_1 и Φ_2 :

$$\frac{\partial^4 \Phi_i}{\partial \xi^4} + \frac{h_i^2}{3R_i^2 (1-\nu_i^2)} \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 1 \Phi_i - \frac{1}{2E_i h_i} \sum_{j=1}^2 a_{ij} \frac{\partial^4 \Phi_j}{\partial \theta^4} = 0 \quad (i=1, 2) \quad (5.3)$$

Заменяя $\partial^2 / \partial \theta^2$ на $-m^2$ и выражая в первом уравнении (5.3) Φ_1 через Φ_2 с помощью второго, приходим к одному разрешающему уравнению для

потенциала $\Phi = \Phi_2$ вида

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + \frac{h_1^2 m^4 (m^2 - 1)^2}{3R_1^2 (1 - \nu_1^2)} - \frac{R_1 a_{11} m^4}{2E_1 h_1} \right) \left(\frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + \frac{h_2^2 m^4 (m^2 - 1)^2}{3R_2^2 (1 - \nu_2^2)} - \frac{R_2 a_{22} m^4}{2E_2 h_2} \right) \Phi - \frac{a_{21} m^4}{2E_2 h_2} \frac{a_{12} m^4}{2E_1 h_1} \Phi = 0 \quad (5.4)$$

Решения (5.4) являются линейными комбинациями решений вида $\Phi = e^{k\xi}$, где k — корень характеристического уравнения

$$k^8 + (f_1^4 - g_2^4)k^4 + f_1^4(f_2^4 - g_2^4) + (ml)^2 g_1^4 g_2^4 = 0$$

$$f_j^4 = \frac{h_j^2 m^4 (m^2 - 1)^2}{3R_j^2 (1 - \nu_j^2)}, \quad g_j^4 = \frac{R_j a_{jj} m^4}{2E_j h_j} \approx \frac{R_j R_1^2 \rho_1 \omega^2 m^2}{2E_j h_j l} \quad (5.5)$$

Уравнение (5.5) получено из (5.4) заменой $\partial/\partial \xi$ на k и отбрасыванием заведомо второстепенных членов. Поскольку корни k_j уравнения (5.5) определяют характер волнообразования на оболочках, определенный интерес представляет их классификация и построение их асимптотик.

Задавая их асимптотику в виде $k \sim \eta^{-q}$, можно найти все возможные варианты для значений q . Главные части корней могут быть четырех типов: большие жидкостные (B_i): $k = \xi_n g_2$, $q = (d + c - a)/4 + (p - r)/2$; малые жидкостные (S_i): $k = \xi_n g_1 (ml)^{1/2}$, $q = (1 - c - a)/4 + p - r/2$; большие оболочечные (B_s): $k = \xi_n f_1$, $q = 2p - 1/2$; малые оболочечные (S_s): $k = \xi_n f_2$, $q = 2p - d/2$ ($n = 1, \dots, 4$; $\xi_n = \exp[(n-1)i\pi/2]$). При фиксированных асимптотических соотношениях между параметрами g_j^4 , f_j^4 , $g_1^4 g_2^4 (ml)^2$ могут реализовываться какие-либо две из этих четверок. В каждом из случаев помимо упомянутых асимптотических соотношений в условия существования рассматриваемой комбинации корней следует включать неравенство $q < p$, выражающее собой характеристическое свойство полубезмоментного напряженно-деформированного состояния (см. п. 2). Необходимо также учитывать наложенные в п. 3, 4 ограничения: $0 < p < c < 1/2$.

Возникающие таким образом варианты перечислены ниже:

(1) $g_2 \ll f_2$. Имеются корни B_s и S_s . Условия существования: $r > (3d + c - a - 6p)/2$;

(2) $f_2 \ll g_2 \ll f_1$. Имеются корни B_s и B_i , причем $B_i \ll B_s$. Условия существования: $1 < r + (a - d - c)/2 + 3p < d$;

(3) $f_1 \ll g_2$. Возможные два подслучая: (3а) B_s и B_i , причем $B_s \ll B_i$. Условия существования:

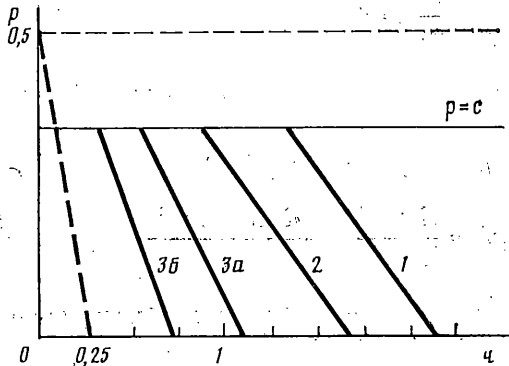
$$0 < p + (a - c - d)/2 + r < 1 - 2p < r + (a - 1 - c)/2 \quad (5.6)$$

(3б) S_i и B_i . Условия существования: $0 < p + (a - c - d)/2 + r < 1 - 2p$, $r + (a - 1 - c)/2 < 1 - 2p$.

Если как-то зафиксировать значения параметров c и d , зависящих от геометрии конструкции, то останутся свободными параметры r и p , характеризующие порядок частоты и изменяемость вынуждающей силы в поперечном направлении. Тогда области существования перечисленных вариантов можно представить в виде диаграммы на плоскости (r, p) . В качестве примера рассмотрим случай, когда $c = 1/3$, $d = 3/2$ (при радиусе $R_1 = 1$ м и $\eta = 10^{-2}$ это соответствует значениям $h_1 = 10^{-2}$ м, $h_2 = 10^{-3}$ м, $R_2 = 1,2$ м). Расположение вариантов отмечено на диаграмме (фигура). Следует иметь в виду, что движение по диаграмме вправо соответствует уменьшению частоты, а вверх — увеличению числа волн по параллели m . Штриховой линией для сравнения показана область применимости излагаемого метода в случае одной цилиндрической оболочки в жидкости (см. п. 2).

Таким образом, областью применимости описанного метода является область низких частот и небольших m , которая на диаграмме изображается объединением областей (1), (2), (3а), (3б). Для точек (r, p) из этого объединения решение задачи расчленяется на два этапа: 1) Производится расчет внутренней оболочки на действие нормальной сосредоточенной

силы по формулам статической теории простого краевого эффекта. Соответствующий прогиб w_1 задается формулами (4.2), а w_2 — формулой (4.8) (приближенно можно полагать $w_2=0$). В указанном решении при $\xi=0$ выполнены все нетангенциальные условия стыка, но в тангенциальных имеются невязки. 2) Строится решение двух связанных полубезмоментных систем цилиндрических оболочек с уравнением (5.4) вместо третьего уравнения равновесия, снимающее невязки в тангенциальных условиях стыка на загруженной параллели.



Можно показать, что полученное таким образом решение является начальным приближением некоторого асимптотического итерационного процесса, сходящегося к точному решению задачи.

6. Пример. В качестве примера применим предлагаемый метод в случае, когда точка (r, p) попадает в область (3а) и доведем решение задачи до расчетных формул. Потенциал $\Phi = \Phi_2$ представляется в виде линейной комбинации экспонент $\exp k\xi$, где k пробегает восемь корней B_s, B_l . Каждая из этих экспонент определяет свое напряженно-деформированное состояние второй оболочки. Напряженно-деформированное состояние первой оболочки определяется потенциалом Φ_1 , который может быть найден из уравнений (5.3). Оставляя главные члены, можем написать

$$\Phi_1 = g_2^{-4} (\partial^4 \Phi_2 / \partial \xi^4 + f_2^4 \Phi_2 - g_2^4 \Phi_2) \quad (6.1)$$

Если k — корень типа B_s , то полагая $\Phi = e^{k\xi}$, для соответствующих амплитудных значений перемещений из формул (5.2) получаем (удерживаем только главные члены):

$$u_{01}^{(j)} = km^2, \quad u_{02}^{(j)} = im^3, \quad w_{0j} = m^4 \quad (j=1, 2) \quad (6.2)$$

Если же k жидкостный корень, то для $j=2$ снова получаем (6.2), а при переходе к первой оболочке главные члены в (6.1) сокращаются, так что необходимо учитывать второстепенные. Окончательно получаем

$$u_{01}^{(1)} = -\kappa km^2, \quad u_{02}^{(1)} = -\kappa im^3, \quad w_{01} = -\kappa m^4$$

$$\kappa = (E_2 h_2 / E_1 h_1) \operatorname{ch} ml \approx E_2 h_2 / E_1 h_1 \quad (6.3)$$

Из (6.2) и (6.3) следует, что потенциалы Φ_j можно записать в виде:

$$\Phi_1 = \Phi_s - \kappa \Phi_l, \quad \Phi_2 = \Phi_s + \Phi_l$$

$$\Phi_s = - \sum_{n=1}^2 B_n \exp(\zeta_n' f_1 \xi), \quad \Phi_l = - \sum_{n=1}^2 C_n \exp(\zeta_n g_2 \xi) \quad (\xi < 0)$$

$$\Phi_s = - \sum_{n=3}^4 B_n \exp(\zeta_n' f_1 \xi), \quad \Phi_l = - \sum_{n=3}^4 C_n \exp(\zeta_n g_2 \xi) \quad (\xi > 0) \quad (6.4)$$

В (6.4) учтено, что при $\xi < 0$ ($\xi > 0$) в выражениях для Φ_j могут участвовать только те экспоненты $\exp k\xi$, для которых $-\pi/2 \leq \arg k < \pi/2$ ($\arg k \geq \pi/2$ или $\arg k < -\pi/2$ соответственно). Коэффициенты B_n, C_n подбираются таким образом, чтобы выполнялись следующие условия стыка при $\xi=0$, снимающие невязки краевого эффекта (4.1) — (4.2):

$$[2E_1 h_1 u_1^{(1)}] = -v_1 R A, \quad [S_1] = -i m A$$

$$[u_1^{(2)}] = [S_2] = [u_2^{(j)}] = [T_1^{(j)}] = 0 \quad (j=1, 2) \quad (6.5)$$

С помощью формул (5.2) условия (6.5) можно записать в виде системы из восьми линейных уравнений с восемью неизвестными B_n, C_n ($n=1, \dots, 4$). Ее решение дает:

$$B_n = \frac{R_1 A}{8E_1 h_1 f_1 (1+\kappa)} \left(\frac{\xi_n'}{f_1^2} + \frac{\xi_n' v_1}{m^2} \right)$$

$$C_n = \frac{R_1 A}{8E_1 h_1 g_2 (1+\kappa)} \left(\frac{\xi_n}{g_2^2} + \frac{\xi_n v_1}{m^2} \right) \quad (6.6)$$

Итак, в условиях существования варианта (3а) (неравенства (5.6) совместно с условием $0 < p < c < 1/2$), решение задачи (1.1)–(1.2) является суммой решений (4.1), (4.2), (4.9), (5.2), (6.4), (6.6). Анализ полученных формул позволяет сделать следующие выводы.

Основное напряженно-деформированное состояние имеет ярко выраженную длинноволновую составляющую, соответствующую корням B_n , которая возмущена мелкой рябью, более заметной на более тонкой оболочке. Отношение амплитуд ряби на двух оболочках равно κ (см. (6.3)), а отношение амплитуды ряби к амплитуде длинноволновой составляющей имеет порядок $|\Phi_i/\Phi_s| \sim |C_n/B_n| \sim f_1^3/g_2^3 \ll 1$. Длинноволновые части решения на обеих оболочках равны и совпадают в главных членах с решением задачи о действии нормальной сосредоточенной силы на первую оболочку в вакууме. Отметим также, что применение этого метода при $p=0$ (например, $m=2$) дает решения с $q < 0$, т. е. $f_1 \ll 1, g_2 \ll 1$. В этом случае краевой эффект окажется асимптотически малым по сравнению с основным напряженно-деформированным состоянием даже вблизи нагруженной параллели, что характерно для оболочек нулевой кривизны.

Автор признателен А. Л. Гольденвейзеру за постановку задачи, обсуждение работы и полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гольденвейзер А. Л., Лидский В. В., Товстик П. Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 383 с.
2. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
3. Грей Э., Мэтьюз Г. В. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. М.: Изд-во иностр. лит., 1953. 372 с.

Москва

Поступила в редакцию
16.II.1988