

УДК 539.376

Л. Г. КОРЗУНИН

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПРОГИБА ПЛАСТИНЫ, ОБЛАДАЮЩЕЙ СВОЙСТВОМ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ

Исследуется уравнение для скорости прогиба пластины в условиях ползучести под действием распределенной нагрузки, перпендикулярной плоскости пластины. Показано, что это нелинейное уравнение в частных производных четвертого порядка является уравнением эллиптического типа. Ставится краевая задача для пластины с заземленными краями. Эта задача возникает, в частности, при изучении выпучивания корки непрерывного слитка между роликами машины непрерывного литья заготовок под действием ферростатического давления жидкой фазы. Краевая задача сводится к вариационной задаче второго порядка, которая решается методом Ритца. Предложен быстро сходящийся метод минимизации конечномерного функционала. Результаты расчетов показывают существенное различие в свойствах решений нелинейного уравнения и линейного уравнения прогиба пластин. Полученные результаты используются для определения напряженно-деформированного состояния непрерывного слитка.

1. Краевая задача. Предполагается, что материал пластины однороден и удовлетворяет известному степенному закону установившейся высокотемпературной ползучести

$$\sigma = A \varepsilon^\alpha \quad (0 < \alpha \leq 1) \quad (1.1)$$

где σ — напряжение, ε — скорость деформации, A — константы, характеризующие свойства материала пластины. После обобщения этого закона на пространственное напряженно-деформированное состояние, в [1] выводится уравнение для скорости прогиба пластины. Принимая условия заземления вдоль прямогоугольного контура, получим краевую задачу

$$\begin{aligned} [\kappa^{\alpha-1} (w_{xx} + w_{yy}/2)]_{xx} + [\kappa^{\alpha-1} w_{xy}]_{xy} + [\kappa^{\alpha-1} (w_{xx}/2 + w_{yy})]_{yy} &= (3/4) p(x, y)/D \quad (1.2) \\ \kappa &= (2/\sqrt{3}) (w_{xx}^2 + w_{yy}^2 + w_{xx}w_{yy} + w_{xy}^2)^{1/2} \\ w &= 0, \quad \partial w/\partial n = 0 \quad \text{на } \Gamma \end{aligned}$$

где Γ — граница прямоугольника $\{x = \pm d/2, y = \pm d\beta/2\}$, d — длина короткой стороны прямоугольника, $\beta \geq 1$ — отношение длинной и короткой сторон прямоугольника, $w(x, y)$ — скорость прогиба пластины в точке (x, y) , w_{xx} , w_{xy} , w_{yy} — вторые производные функции $w(x, y)$, $p(x, y)$ — плотность распределенной нагрузки, $D = 2^{-\alpha-1} (\alpha+2)^{-1} A h^{\alpha+2}$ — интегральная характеристика жесткости при ползучести нормального элемента пластины, h — толщина пластины.

Отметим, что уравнение (1.2) имеет эллиптический тип во всех точках (x, y) , где хотя бы одна из величин $w_{xx}(x, y)$, $w_{xy}(x, y)$, $w_{yy}(x, y)$ отлична от нуля. Если же $w_{xx}(x_0, y_0) = w_{xy}(x_0, y_0) = w_{yy}(x_0, y_0) = 0$, то в точке (x_0, y_0) любое направление является характеристическим.

Действительно, выписав слагаемые в левой части уравнения (1.2), в которые входят старшие (четвертые) производные функции $w(x, y)$, получим

$$\begin{aligned} (4/3) \kappa^{\alpha-3} \{ & [(w_{xx}^2 + w_{yy}^2 + w_{xx}w_{yy} + w_{xy}^2) (w_{xxxx} + 2w_{xxyy} + w_{yyyy})] + \\ & + (\alpha-1) [(w_{xx}w_{xxxx} + w_{yy}w_{yyyy} + w_{xy}w_{xxxx}/2 + w_{xx}w_{xxyy}/2 + \\ & + w_{xy}w_{xxyy}) (w_{xx} + w_{yy}/2) + (w_{xx}w_{xxyy} + w_{yy}w_{xyyy} + \\ & + w_{xx}w_{xyyy}/2 + w_{yy}w_{xxxx}/2 + w_{xy}w_{xxyy}) w_{xy} + \\ & + (w_{xx}w_{xxyy} + w_{yy}w_{yyyy} + w_{xx}w_{yyyy}/2 + w_{yy}w_{xxyy}/2 + \\ & + w_{xy}w_{xyyy}) (w_{xx}/2 + w_{yy}) \} \}. \end{aligned}$$

Для получения характеристического уравнения четвертые производные $\partial^4 w(x, y)/\partial x^2 \partial y^2$ заменим выражениями $\xi^2 \eta^2$ от характеристических переменных ξ, η , а для коэффициентов при них введем обозначения $a = w_{xx}$, $b = w_{xy}$, $c = w_{yy}$. Тогда после алгебраических преобразований выражение в фигурных скобках приобретает вид

$$\begin{aligned} H(\xi, \eta, a, b, c) + \alpha G(\xi, \eta, a, b, c) &= 0, \\ H(\xi, \eta, a, b, c) &= (c\xi^2 - a\eta^2)^2/4 + \\ &+ (\xi^2/2 + \eta^2)(c\xi - b\eta)^2 + (\xi^2 + \eta^2/2)(a\eta - b\xi)^2 \\ G(\xi, \eta, a, b, c) &= [(a+c/2)\xi^2 + b\xi\eta + (a/2+c)\eta^2]^2 \end{aligned}$$

Если хотя бы одна из величин a, b, c отлична от нуля, то, как нетрудно проверить, полученное характеристическое уравнение не имеет нетривиальных вещественных решений (ξ, η) . Учитывая, что при $a=b=c=0$ левая часть уравнения тождественно обращается в нуль, получим нужное утверждение.

2. Вариационная задача. Предлагаемый подход состоит в сведении краевой задачи (1.2) к вариационной задаче с последующим применением метода Ритца. Возникающая при этом конечномерная задача минимизации решается методом градиентного спуска. В связи со сложностью многократного вычисления градиента потребовалась существенная модификация метода градиентного спуска, позволившая в десятки раз сократить необходимое число шагов.

Уравнение (1.2) является условием экстремали (уравнением Эйлера — Остроградского) для вариационной задачи, которая после масштабных преобразований переменных x, y, w имеет вид

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [(v_{xx}^2 + \beta^{-4} v_{yy}^2 + \beta^{-2} v_{xx} v_{yy} + \beta^{-2} v_{xy}^2)^{(\alpha+1)/2} - v] dx dy \rightarrow \min \quad (2.1)$$

$v=0, \quad \partial v/\partial n=0$ на Γ_1

Здесь функция $v(x, y)$ определена на квадрате с границей $\Gamma_1: \{x=\pm 1, y=\pm 1\}$.

Для решения задачи (2.1) применяется метод Ритца с системой базисных функций (a_{mn} — неопределенные коэффициенты):

$$\varphi^{mn}(x, y) = (1 - (-1)^m \cos(\pi m x)) (1 - (-1)^n \cos(\pi n y)) \quad (2.2)$$

$(m=1, \dots, M; n=1, \dots, N)$

Функция $v(x, y)$ ищется в виде

$$v(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N a_{mn} \varphi^{mn}(x, y) \quad (2.3)$$

Краевые условия в (2.1) при этом выполняются автоматически.

После подстановки представления (2.3) в функционал задачи (2.1) приходим к задаче минимизации в $M \cdot N$ -мерном пространстве коэффициентов a_{mn} :

$$\begin{aligned} f(a_{11}, \dots, a_{MN}) &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [S(x, y)]^{(\alpha+1)/2} dx dy - \\ &- \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N a_{mn} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \varphi^{mn}(x, y) dx dy \rightarrow \min \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь функция $S(x, y)$ представляет собой симметричную квадратичную форму от переменных a_{mn} :

$$S(x, y) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \sum_{r=1}^M \sum_{s=1}^N a_{ij} a_{rs} T_{ijrs}(x, y)$$

$$T_{ijrs}(x, y) = \varphi_{xx}^{ij} \varphi_{xx}^{rs} + \beta^{-4} \varphi_{yy}^{ij} \varphi_{yy}^{rs} + \beta^{-2} \varphi_{xy}^{ij} \varphi_{xy}^{rs} + \beta^{-2} (\varphi_{xx}^{ij} \varphi_{yy}^{rs} + \varphi_{yy}^{ij} \varphi_{xx}^{rs}) / 2 \quad (2.5)$$

$$(\varphi_{xx}^{ij} = \partial^2 \varphi^{ij} / \partial x^2)$$

Двойной интеграл в (2.4) приближенно вычисляется по формуле прямоугольников. С учетом $\iint \varphi^{mn}(x, y) dx dy = 1$ задача (2.4) принимает вид

$$F(a_{11}, \dots, a_{MN}) = \sum_{h=1}^K \sum_{l=1}^L \left[\sum_{ijrs} a_{ij} a_{rs} T_{ijrs}(x_h, y_l) \right]^{(\alpha+1)/2} - KL \sum_{mn} a_{mn} \rightarrow \min \quad (2.6)$$

$$(x_h = (h-1/2)/K; \quad y_l = (l-1/2)/L)$$

Для минимизации функционала (2.6) применялся модифицированный метод градиентного спуска. Компонента вектора $\mathbf{grad} F$ с номером (m, n) вычисляется по формуле

$$\partial F / \partial a_{mn} = (\alpha+1) \sum_{hl} \left\{ \left[\sum_{ijrs} a_{ij} a_{rs} T_{ijrs}(x_h, y_l) \right]^{(\alpha-1)/2} \sum_{ij} a_{ij} T_{ijmn}(x_h, y_l) \right\} - KL \quad (2.7)$$

3. Метод минимизации. Обычный метод градиентного (наискорейшего) спуска реализовался в следующем виде. Пусть $\mathbf{A}^v = (a_{11}^v, \dots, a_{MN}^v)$ — v -ое приближение при минимизации функционала $F(\mathbf{A})$, $\mathbf{B}(\lambda) = \mathbf{A}^v - \lambda \mathbf{grad} F(\mathbf{A}^v)$ — однопараметрическое множество точек, $g(\lambda) = (\mathbf{grad} F(\mathbf{A}^v), \mathbf{grad} F(\mathbf{B}(\lambda)))$ — скалярное произведение. Задавшись некоторым λ_1^v и вычислив $\mathbf{B}(\lambda_1^v)$ и $g(\lambda_1^v)$, с помощью линейной интерполяции находим λ^v , приближенно удовлетворяющее условию $g(\lambda^v) = 0$: $\lambda^v = \lambda_1^v g(0) / (g(0) - g(\lambda_1^v))$. Так как условие $g(\lambda^v) = 0$ является условием минимума $F(\mathbf{B}(\lambda))$ по λ , то полагаем $\mathbf{B}^{v+1} = \mathbf{B}(\lambda^v)$. Наблюдавшаяся при таком методе повторяемость значений λ^v через одно указала на целесообразность выбора $\lambda_1^v = \lambda^{v-2}$.

На каждом шаге описанного метода градиентного спуска дважды происходит вычисление $\mathbf{grad} F$, включающее многократное вычисление $T_{ijrs}(x_h, y_l)$ по формуле (2.5). Эта процедура отнимает большую часть машинного времени для $M=N=5$, $K=L=10$, вследствие чего метод градиентного спуска становится неэффективным. Попытки применения некоторых методов минимизации овражных функций также не привели к успеху. Был разработан следующий метод ускорения сходимости.

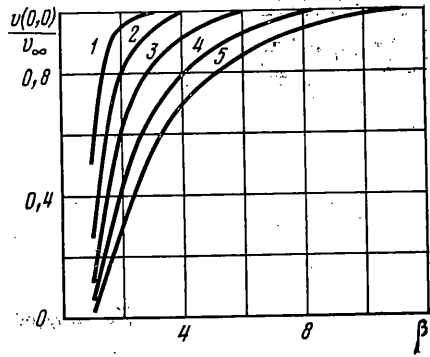
Пусть для v -го приближения заданы наборы чисел u_{mn}^v и σ_{mn}^v , определяемые ниже. Координаты $(v+1)$ -го приближения \mathbf{A}^{v+1} вычисляются по формуле $a_{mn}^{v+1} = b_{mn}^{v+1} (1 + u_{mn}^v)^{\sigma_{mn}^v}$, $\sigma_{mn}^v = \text{sign}(\partial F(\mathbf{A}^v) / \partial a_{mn}) \text{sign} a_{mn}^v$.

Тем самым координаты b_{mn}^{v+1} промежуточного $(v+1)$ -го приближения \mathbf{B}^{v+1} , полученного градиентным спуском, либо уменьшаются, либо увеличиваются в $(1+u_{mn}^v)$ раз, в зависимости от знака (m, n) -ой компоненты $\mathbf{grad} F(\mathbf{A}^v)$. Положим

$$u_{mn}^v = \begin{cases} u_{mn}^{v-1} \cdot 1,3 & (\sigma_{mn}^v = \sigma_{mn}^{v-1}) \\ u_{mn}^{v-1} \cdot 0,3 & (\sigma_{mn}^v \neq \sigma_{mn}^{v-1}) \end{cases}$$

Такое определение позволяет быстро увеличивать числа u_{mn}^v , для которых соответствующая координата a_{mn} имеет тенденцию к росту или убыванию на нескольких последовательных шагах. Это способствует ускоренному сдвигу a_{mn}^v в нужном направлении. И наоборот, если такой тенденции у некоторой координаты a_{mn} нет, то u_{mn}^v быстро убывает. В частности, если тенденции к постоянному росту или убыванию нет ни у одной координаты a_{mn} , то за несколько шагов установится $u_{mn}^v \approx 0$ и метод ускорения сходимости вырождается в описанный выше метод градиентного спуска: $\mathbf{A}^{v+1} = \mathbf{B}^{v+1}$. Вводится также не требующий дополнительных вычислений контроль за невозрастанием минимизируемого функционала $F(\mathbf{A}^v)$ на случай, если слишком большие u_{mn}^v начнут оказывать негативное влияние на сходимость метода.

α	1	$1/2$	$1/3$	$1/4$	$1/5$
v_∞	2,029	3,474	6,793	14,112	30,363
v_1	0,985	0,836	0,740	0,663	0,600



Метод ускорения сходимости позволяет за 30 шагов прийти к меньшему значению $F(A)$, чем полученное методом градиентного спуска за 3000 шагов. Более того, в нашем случае основным критерием точности метода является значение $v(0, 0) = \sum a_{mn} \varphi^{mn}(0, 0)$, которое определяется, в первую очередь, коэффициентом a_{11} . Но a_{11} вносит малый вклад в $\text{grad } F(A)$, так как $T_{ij11}(x_i, y_i)$ сравнительно малы (см. (2.5)). В результате приблизить a_{11} достаточно хорошо методом градиентного спуска вообще не удается из-за ограниченной машинной точности. Метод же ускорения сходимости позволяет за 30 шагов получить погрешность $v(0, 0)$ менее 1%.

4. Результаты расчетов. При $\beta \rightarrow \infty$ задача (3) становится одномерной. Тогда для $\alpha = 1/n$, где n — целое, имеются точные решения в виде полиномиальных сплайнов. Ниже приведены точные значения $v_\infty = v(0, 0)$ для некоторых значений α и $\beta \rightarrow \infty$, а также приближенные значения $v_1 = v(0, 0)$ при $\beta = 1$.

Приближенные значения отношения $v(0, 0)$ к v_∞ при $1 \leq \beta \leq 11$ приведены на фигуре (кривые 1, 2, 3, 4, 5 соответствуют $\alpha = 1, \alpha = 1/2, \alpha = 1/3, \alpha = 1/4, \alpha = 1/5$).

Расчет показал существенное отличие результатов для нелинейного случая ($\alpha < 1$) от линейного случая ($\alpha = 1$). Для пластин с линейным законом ползучести скорость прогиба практически не меняется при $\beta > 3$. Уравнение (1.2) при $\alpha = 1$ совпадает с бигармоническим уравнением для упругой пластины, поэтому результаты соответствуют данным [2]. В то же время при нелинейной ползучести скорость прогиба в центре стабилизируется при значительно больших значениях β . Эти значения тем больше, чем меньше α (см. фигуру). Отметим, что экспериментальным данным свойств материала для условий непрерывной разливки стальных заготовок соответствует $\alpha = 1/3 - 1/5$.

Это свидетельствует о существенной двумерности задачи при больших β , но малых α , и опровергает распространенное в технических расчетах предположение о том, что влиянием заземления вдоль коротких сторон прямоугольной пластины можно пренебречь.

Результаты расчетов с $\alpha = 1/5$ удовлетворительно согласуются с данными экспериментов, проведенных на действующих машинах непрерывного литья заготовок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
2. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 635 с.

Свердловск

Поступила в редакцию
15.V.1987