МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1989

УДК 539.374

Э. И. СТАРОВОЙТОВ

ТЕРМОСИЛОВОЕ НАГРУЖЕНИЕ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

Приведена постановка краевой задачи о совместном тепловом и силовом воздействии на трехслойную пологую оболочку, состоящую из керамического, полимерного и металлического слоев. Учтен эффект уноса вещества с поверхности внешнего теплозащитного слоя. В качестве примера рассмотрена круглая пластинка.

1. Постановка задачи и методика решения. Рассмотрим квазистатическое термосиловое нагружение несимметричной по толщине пологой оболочки. Геометрические гипотезы примем в соответствии с моделью [1] в случае малых деформаций. Для внешних (теплозащитного керамического и несущего металлического) слоев с толщинами $\mathbf{h}_1$, $\mathbf{h}_2$ принимаются гипотезы Кирхгофа, для полимерного заполнителя ($\mathbf{h}_3=2\mathbf{c}$) — гипотеза о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали. Учтена работа заполнителя в тангенциальном направлении. Процесс уноса веществ с поверхности оболочки определяется величиной теплового потока, скоростью обдува набегающего потока газа, термомеханическими характеристиками керамического материала. Система координат $\mathbf{x}=\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ связана со срединной поверхностью заполнителя, ось $\mathbf{z}$ направлена в сторону теплозащитного слоя.

Для связи напряжений и деформаций в слоях используем физические уравнения состояния, введенные в [2]:

$$\mathbf{s}_{\alpha\beta}^{(k)}=2\mathbf{G}^{(k)}(\mathbf{T}^{(k)})\left[\mathbf{f}_1^{(k}(\varepsilon_u^{(k)}, T^{(k)})\mathbf{e}_{\alpha\beta}^{(k)}-\int_0^t \Gamma_k(\mathbf{t}-\tau)\mathbf{f}_2^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)}, \mathbf{T}^{(k)})\mathbf{e}_{\alpha\beta}(\tau)\,d\tau\right] \tag{1.1}$$

$$\sigma^{(k)}=3\mathbf{K}^{(k)}(\mathbf{T}^{(k)})(\varepsilon^{(k)}-\alpha_{0k}\Delta T^{(k)}),\qquad \mathbf{f}_1^{(1)}\equiv\mathbf{f}_2^{(1)}\equiv 1,\qquad \Gamma_1(\mathbf{t})\equiv 0\quad (\mathbf{k}=1,2)$$

$$\varphi_1(\sigma^{(3)})\mathbf{s}_{\alpha\beta}^{(3)}=2\mathbf{G}^{(3)}(\mathbf{T}^{(3)})\left[\mathbf{f}^{(3)}(\varepsilon_u^{(3)})\mathbf{e}_{\alpha\beta}-\int_0^t \Gamma_3(\mathbf{t}-\tau)\mathbf{f}^{(3)}(\varepsilon_u^{(3)})\mathbf{e}_{\alpha\beta}^{(3)}(\tau)\,d\tau\right] \tag{1.2}$$

$$\varphi_2(\sigma^{(3)})\sigma^{(3)}=3\mathbf{K}^{(3)}(\varepsilon^{(3)}-\alpha_{03}\Delta\mathbf{T}^{(3)})$$

где $\mathbf{s}_{\alpha\beta}^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$, $\mathbf{e}_{\alpha\beta}^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ — девиаторные и шаровые части тензоров напряжений и деформаций; $\mathbf{f}_1^{(2)}(\varepsilon_u^{(2)}, \mathbf{T}^{(2)})$ — функция пластичности, введенная для упругопластических сред в [3], которую при $\varepsilon_u^{(2)}\leqslant\varepsilon_s^{(2)}(\mathbf{T}^{(2)})$ следует положить $\mathbf{f}_1^{(2)}\equiv 1$; $f_2^{(2)}(\varepsilon_u^{(2)}, \mathbf{T}^{(2)})$ — функция нелинейной ползучести металлов, также $\mathbf{f}_2^{(2)}\equiv 1$ при $\varepsilon_u^{(2)}\leqslant\varepsilon_{u0}^{(2)}(T^{(2)})$; $f^{(3)}(\varepsilon_u^{(3)})$, $\varphi_1(\sigma^{(3)})$, $\varphi_2(\sigma^{(3)})$ — универсальные функции, описывающие физическую нелинейность полимерного заполнителя, причем $f^{(3)}\equiv 1$ при $\varepsilon_u^{(3)}\leqslant\varepsilon_0^{(3)}$; $\Gamma_k(t)$ — ядра релак-

сации материалов; α_{0k} — коэффициент линейного температурного удлинения; $T^{(k)}$ — неоднородное и нестационарное температурное поле; $G^{(k)}(T^{(k)})$, $K^{(k)}(T^{(k)})$ — модули сдвига и объемной деформации; $\Delta T^{(k)}=T^{(k)}-T_0^{(k)}$, $T_0^{(k)}$ — начальная температура k-го слоя. Греческие индексы принимают значения 1, 2.

В соответствии с (1.1), (1.2) материал керамического слоя деформируется нелинейно упруго за счет влияния температурного поля; заполнитель — нелинейно вязкоупругий, параметры физической нелинейности — интенсивность деформаций, гидростатическое давление $p=-\sigma$ и температура; несущий металлический слой — вязкоупругопластический. Соотношения $\sigma_{\alpha z}^{(3)} \sim \varepsilon_{\alpha z}^{(3)}$ принимаются в форме (1.2).

Согласно принятым выше гипотезам перемещения и деформации в слоях линейно выражаются через тангенциальные перемещения координатной поверхности $u_\alpha(x, t)$, относительные сдвиги в заполнителе $\psi_\alpha(x, t)=2\varepsilon_{\alpha z}^{(3)}$ и прогиб оболочки $w(x, t)$ [4].

Из вариационного принципа [1, 4] следуют уравнения равновесия:

$$T_{\alpha\beta,\beta}+p_\alpha=0, \quad H_{\alpha\beta,\beta}-Q_\alpha=0, \quad M_{\alpha\beta,\alpha\beta}-k_{\alpha\beta}T_{\alpha\beta}+q=0 \tag{1.3}$$

где $k_{\alpha\beta}$ — главные кривизны координатной поверхности.

Силовые граничные условия в этом случае, например, вдоль линии $x_1=x_1^0$ имеют вид

$$\{T_{\alpha 1}; H_{\alpha 1}; M_{11}\}=\{T_{\alpha 1}^p; H_{\alpha 1}^p; M_{11}^p\}, \quad M_{11,1}+2M_{12,2}=Q_1^p \tag{1.4}$$

где введены обобщенные усилия и моменты

$$T_{\alpha\beta}=\sum_{k=1}^{3} T_{\alpha\beta}^{(k)}=\sum_{k=1}^{3}\int_{h_k}\sigma_{\alpha\beta}^{(k)}\,dz, \quad M_{\alpha\beta}=\sum_{k=1}^{3} M_{\alpha\beta}^{(k)}=\sum_{k=1}^{3}\int_{h_k}\sigma_{\alpha\beta}^{(k)}z\,dz$$

$$H_{\alpha\beta}=M_{\alpha\beta}^{(3)}+c(T_{\alpha\beta}^{(1)}-T_{\alpha\beta}^{(2)}), \quad Q=\int_{h_3}\sigma_{\alpha z}^{(3)}\,dz \tag{1.5}$$

$p_\alpha(x, t)$, $q(x, t)$ — проекции внешней поверхностной нагрузки на оси координат; $T_{\alpha 1}^p$, $H_{\alpha 1}^p$, M_{11}^p, Q_1^p — контурная нагрузка; $\sigma_{\alpha\beta}^{(k)}=s_{\alpha\beta}^{(k)}+\delta_{\alpha\beta}\sigma^{(k)}$ — компоненты тензора напряжений; $\delta_{\alpha\beta}$ — символы Кронекера; нижний индекс после запятой означает дифференцирование по соответствующей координате; по повторяющимся греческим индексам производится суммирование.

Используя соотношения связи деформаций с перемещениями [4], можно выразить все усилия и моменты, входящие в уравнения равновесия (1.3) и граничные условия (1.4), через перемещения u_α, w и сдвиги ψ_α. В результате получим краевую задачу для этих пяти неизвестных функций. Конечная система нелинейных интегродифференциальных уравнений здесь не приводится ввиду ее громоздкости. Рассмотрим один метод линейных приближений для ее решения.

Учитывая (1.1), (1.2), выделим в тензоре напряжений упругие (с индексом 0 вверху) и дополнительные (индекс ω) слагаемые:

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(k)}=\sigma_{\alpha\beta}^{(k)0}-\sigma_{\alpha\beta}^{(k)\omega}, \quad \sigma_{\alpha\beta}^{(k)0}=2G^{(k)}e_{\alpha\beta}^{(k)}+3K^{(k)}(\varepsilon^{(k)}-\alpha_{0k}\Delta T^{(k)})\delta_{\alpha\beta} \tag{1.6}$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(2)\omega}=2G^{(2)}\left(e_{\alpha\beta}^{(2)}\,\omega_1^{(2)}+\int_0^t \Gamma_2(t-\tau)\,(1-\omega_2^{(2)})\,e_{\alpha\beta}^{(2)}\,d\tau\right)$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(3)\omega}=2G^{(3)}\left(e_{\alpha\beta}^{(3)}\,\omega_0^{(3)}+\int_0^t \Gamma_3(t-\tau)\,(1-\omega_0^{(3)})\,e_{\alpha\beta}^{(3)}(\tau)\,d\tau\right)+\omega_1^{(3)}s_{\alpha\beta}^{(3)}+\omega_2^{(3)}\sigma^{(3)}$$

$$\omega_\alpha^{(2)}=1-f_\alpha^{(2)}, \quad \omega_0^{(3)}=1-f^{(3)}, \quad \omega_\alpha^{(3)}=\varphi_\alpha-1$$

Проведя подобную операцию с обобщенными внутренними усилиями и моментами, получим

$$\mathbf{T}_{\alpha\beta}=\mathbf{T}_{\alpha\beta}{}^{0}-\mathbf{T}_{\alpha\beta}{}^{\omega},\quad \mathbf{M}_{\alpha\beta}=\mathbf{M}_{\alpha\beta}{}^{0}-\mathbf{M}_{\alpha\beta}{}^{\omega}$$
$$\mathbf{H}_{\alpha\beta}=\mathbf{H}_{\alpha\beta}{}^{0}-\mathbf{H}_{\alpha\beta}{}^{\omega},\quad \mathbf{Q}_{\alpha}=\mathbf{Q}_{\alpha}{}^{0}-\mathbf{Q}_{\alpha}{}^{\omega} \tag{1.7}$$

Линейные и нелинейные составляющие в (1.7) определяются через $\overset{(k)0}{\sigma}_{\alpha\beta}$ и $\overset{(k)\omega}{\sigma}_{\alpha\beta}$, соответственно, с помощью формул типа (1.5) и (1.6).

Предположим, что правые части в (1.1), (1.2) имеют малый параметр, например, $\omega_{\alpha}^{(k)}<1$. Тогда возможен следующий метод итераций — для любого **n**-го приближения получаем задачу

$$\mathbf{T}_{\alpha\beta,\beta}^{0n}+\mathbf{p}_{\alpha}-\mathbf{T}_{\alpha\beta,\beta}^{\omega n-1}=0,\quad \mathbf{H}_{\alpha\beta,\beta}^{0n}-\mathbf{Q}_{\alpha}{}^{0n}-\mathbf{H}_{\alpha\beta,\beta}^{\omega n-1}+\mathbf{Q}_{\alpha}^{\omega n-1}=0$$
$$\mathbf{M}_{\alpha\beta,\alpha\beta}^{0n}-\mathbf{M}_{\alpha\beta,\alpha\beta}^{\omega n-1}-\mathbf{k}_{\alpha\beta}(\mathbf{T}_{\alpha\beta}^{0n}-\mathbf{T}_{\alpha\beta}^{\omega n-1})+\mathbf{q}=0 \tag{1.8}$$

с граничными условиями

$$\mathbf{T}_{\alpha 1}^{0n}=\mathbf{T}_{\alpha 1}{}^{p}+\mathbf{T}_{\alpha 1}^{\omega n-1},\quad \mathbf{H}_{\alpha 1}^{0n}=\mathbf{H}_{\alpha 1}{}^{p}+\mathbf{H}_{\alpha 1}^{\omega n-1},\quad \mathbf{M}_{11}^{0n}=\mathbf{M}_{11}{}^{p}+\mathbf{M}_{11}^{\omega n-1}$$
$$\mathbf{M}_{11,1}^{0n}+2\mathbf{M}_{12,2}^{0n}=\mathbf{Q}_{1}{}^{p}+\mathbf{M}_{11,1}^{\omega n-1}+2\mathbf{M}_{12,2}^{\omega n-1}$$

Величины $\mathbf{T}_{\alpha\beta}^{\omega n-1}$ и т. д. при $\mathbf{n}=1$ принимаются равными нулю. В дальнейшем они вычисляются по результатам предыдущего приближения. Усилия и моменты считаются выраженными через $\mathbf{u}_{\alpha}{}^{n}$, $\psi_{\alpha}{}^{n}$ и $\mathbf{w}^{n}$.

Применение рассмотренного метода последовательных приближений позволяет сводить на каждом шаге приближения задачу (1.1)—(1.8) к линейной однородной нестационарной задаче термоупругости с дополнительными «внешними» усилиями. Для обеспечения сходимости достаточно потребовать, чтобы функции $\omega_{\alpha}^{(k)}$ были малы по сравнению с единицей, как это показано в [5] для однородной несжимаемой среды, обладающей нелинейными вязкоупругими свойствами. Подобный метод итераций был применен для исследования напряженно-деформированного состояния двухслойных пластин при изотермическом нагружении в работе [6]. В случае отсутствия интегральных составляющих в физических уравнениях состояния он совпадает с методом упругих решений [3].

2. Пример расчета. Исследуем термосиловой изгиб круглой трехслойной несимметричной по толщине пластинки под действием осесимметричной нагрузки $\mathbf{p}(\mathbf{r},\mathbf{t})$, $\mathbf{q}(\mathbf{r},\mathbf{t})$ с учетом возможности уноса части вещества внешнего теплозащитного слоя.

Температурный режим пластинки предполагается следующим: тепловой поток интенсивности $\mathbf{q}_t$ падает на внешнюю поверхность слоя 1 перпендикулярно к ней; вся теплота, полученная пластинкой, реализуется в керамическом слое и в заполнителе. Считая пластинку теплоизолированной по контуру и проведя осреднение теплофизических характеристик материалов по толщине пластинки, получим в результате решение соответствующей задачи теплопроводности

$$\Delta\mathbf{T}=\frac{\mathbf{q}_t\mathbf{h}}{\lambda}\left\{\tau-\frac{1}{2\mathbf{h}^2}(\mathbf{z}+\mathbf{c})^2-\frac{1}{6}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{\mathbf{n}=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}^2}\cos\left[\frac{\pi\mathbf{n}}{\mathbf{h}}(\mathbf{z}+\mathbf{c})\right]\times\right.$$
$$\left.\times\exp(-\pi^2\mathbf{n}^2\tau)\right\},\quad \tau=\mathbf{a}\mathbf{t}/\mathbf{h}^2,\quad \mathbf{a}=\lambda/\rho\mathbf{c}_0,\quad \mathbf{h}=\mathbf{h}_1+\mathbf{h}_3 \tag{2.1}$$
$$\lambda=(\lambda_1\mathbf{h}_1+\lambda_3\mathbf{h}_3)/\mathbf{h},\quad \rho\mathbf{c}_0=(\rho_1\mathbf{c}_1\mathbf{h}_1+\rho_3\mathbf{c}_3\mathbf{h}_3)/\mathbf{h}$$

Здесь λ_k, $\mathbf{c}_k$, $\mathbf{a}$ — удельные теплопроводность, теплоемкость и температуропроводность; ρ_k — плотность. Если в (2.1) положить $h_1=0$, то получим

точную формулу для температурного поля однослойной пластинки, приведенную в [7].

Система уравнений равновесия в цилиндрической системе координат для рассматриваемого случая принимает вид

$$\begin{gathered}\mathbf{L}_2(\mathbf{a}_1\mathbf{u}^n+\mathbf{a}_2\psi^n-\mathbf{a}_3\mathbf{w}_{,r}{}^n)=-\mathbf{p}+p_\omega^{n-1}\\ \mathbf{L}_2(\mathbf{a}_2u^n+\mathbf{a}_4\psi^n-\mathbf{a}_5\mathbf{w}_{,r}{}^n)-2\mathbf{c}\mathbf{G}_3\psi^n=\mathbf{h}_\omega^{n-1}\\ \mathbf{L}_3(\mathbf{a}_3\mathbf{u}^n+\mathbf{a}_5\psi^n-\mathbf{a}_6\mathbf{w}_{,r}{}^n)=-\mathbf{q}+\mathbf{q}_\omega^{n-1}\end{gathered}\tag{2.2}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{a}_1=\sum_{k=1}^{3}\mathbf{K}_{k0},\quad \mathbf{a}_2=\mathbf{c}(\mathbf{K}_{10}-\mathbf{K}_{20}),\quad \mathbf{a}_3=\sum_{k=1}^{3}\mathbf{K}_{k1}\\ \mathbf{a}_4=\mathbf{K}_{32}+\mathbf{c}^2(\mathbf{K}_{10}+\mathbf{K}_{20}),\quad \mathbf{a}_5=\mathbf{K}_{32}+\mathbf{c}(\mathbf{K}_{11}-\mathbf{K}_{21})\\ \mathbf{a}_6=\sum_{k=1}^{3}\mathbf{K}_{k2},\quad \mathbf{K}_{km}=\int_{h_k}\left(\mathbf{K}^{(k)}+\frac{4}{3}\mathbf{G}^{(k)}\right)\mathbf{z}^m d\mathbf{z}\quad (\mathbf{m}=0,1,2)\end{gathered}\tag{2.3}$$

где $\mathbf{u}^n$ — радиальное перемещение срединной плоскости заполнителя; $\psi^n=2\varepsilon_{rz}^{(3)n}$ — относительный сдвиг; $\mathbf{L}_2$, $\mathbf{L}_3$ — линейные дифференциальные операторы: $\mathbf{L}_2(\mathbf{u})\equiv(r^{-1}(r\mathbf{u})_{,r})_{,r}$, $\mathbf{L}_3(\mathbf{u})\equiv r^{-1}(r\mathbf{L}_2(\mathbf{u}))_{,r}$. Величины $\mathbf{p}_\omega^{n-1}$, $\mathbf{q}_\omega^{n-1}$, $\mathbf{h}_\omega^{n-1}$ определяются по результатам предыдущего приближения с помощью формул типа (1.6), (1.7). Перемещения и линейные размеры пластинки отнесены к ее радиусу, нагрузка и параметры упругости — к единице давления 1 Па.

Решение системы (2.2) имеет следующий итерационный вид (с учетом гладкости в начале координат):

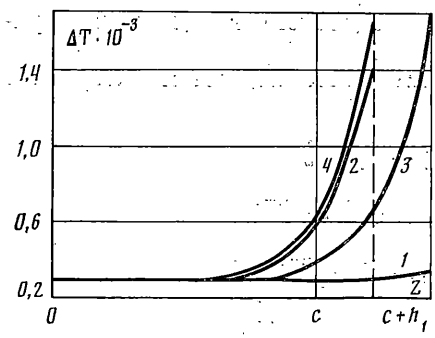
$$\begin{gathered}\psi^n=C_1{}^n\mathbf{I}_1(\beta r)+\psi_0{}^n,\quad \mathbf{u}^n=a_3(\mathbf{L}_3{}^{-1}(\mathbf{q}-\mathbf{q}_\omega^{n-1})-\mathbf{a}_6\mathbf{L}_2{}^{-1}(\mathbf{p}-\mathbf{p}_\omega^{n-1})/\mathbf{a}_3+\\ +(\mathbf{a}_5\mathbf{a}_3-\mathbf{a}_2\mathbf{a}_6)\psi^n/\mathbf{a}_3+\mathbf{C}_2{}^n r)/(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_6-\mathbf{a}_3{}^2)\\ \mathbf{w}^n=\left(\mathbf{b}_2\left(C_1{}^n\mathbf{I}_0(\beta r)/\beta+\int\psi_0{}^n\,dr\right)-\int(\mathbf{a}_3\mathbf{L}_2{}^{-1}(\mathbf{p}-\mathbf{p}_\omega^{n-1})/\mathbf{a}_1-\right.\\ \left.-\mathbf{L}_3{}^{-1}(\mathbf{q}-\mathbf{q}_\omega^{n-1}))\,dr+\mathbf{C}_3{}^n r^2+\mathbf{C}_4{}^n\right)\Big/\mathbf{b}_3\\ \mathbf{b}_1=\mathbf{a}_4-\mathbf{a}_2{}^2/\mathbf{a}_1,\quad \mathbf{b}_2=\mathbf{a}_5-\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3/\mathbf{a}_1,\quad \mathbf{b}_3=\mathbf{a}_6-\mathbf{a}_3{}^2/\mathbf{a}_1\end{gathered}\tag{2.4}$$

где $\mathbf{I}_n$, $\mathbf{K}_1$ — модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда, $\mathbf{L}_2{}^{-1}$, $\mathbf{L}_3{}^{-1}$ — интегральные операторы, обратные операторам $\mathbf{L}_2$ и $\mathbf{L}_3$. $\psi_0{}^n$ — частное решение модифицированного неоднородного уравнения Бесселя, выделяемого из системы (2.2) для функции ψ^n:

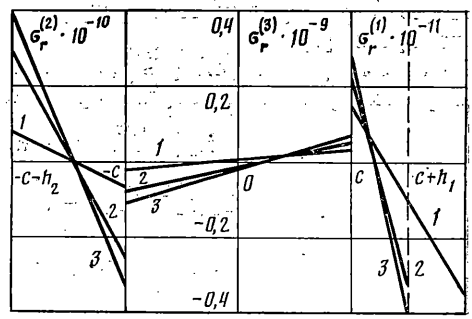
$$\begin{gathered}\psi_0{}^n=\mathbf{I}_1(\beta r)\int\mathbf{K}_1(\beta r)\mathbf{f}^{n-1}r\,dr-\mathbf{K}_1(\beta r)\int\mathbf{I}_1(\beta r)\mathbf{f}^{n-1}r\,dr\\ \mathbf{f}^{n-1}=\mathbf{b}_3(\mathbf{h}_\omega^{n-1}+\mathbf{a}_2(\mathbf{p}-\mathbf{p}_\omega^{n-1})/\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_3\mathbf{b}_2(\mathbf{p}-\mathbf{p}_\omega^{n-1})/\mathbf{a}_1\mathbf{b}_3+\\ +\mathbf{b}_2\int(\mathbf{q}-\mathbf{q}_\omega^{n-1})r\,dr/\mathbf{b}_3r)/(\mathbf{b}_1\mathbf{b}_3-\mathbf{b}_2{}^2)\\ \beta^2=2\mathbf{c}\mathbf{b}_3\mathbf{G}^{(3)}/(\mathbf{b}_1\mathbf{b}_3-\mathbf{b}_2{}^2)\end{gathered}\tag{2.5}$$

Константы интегрирования $\mathbf{C}_i$ $(i=1,\ldots,4)$ определяются на каждом шаге приближения из граничных условий. Например, при $\mathbf{p}=0$ и жестко заделанном контуре пластинки ($\mathbf{u}=\psi=\mathbf{w}=\mathbf{w}_{,r}=0$ при $r=1$) получаем:

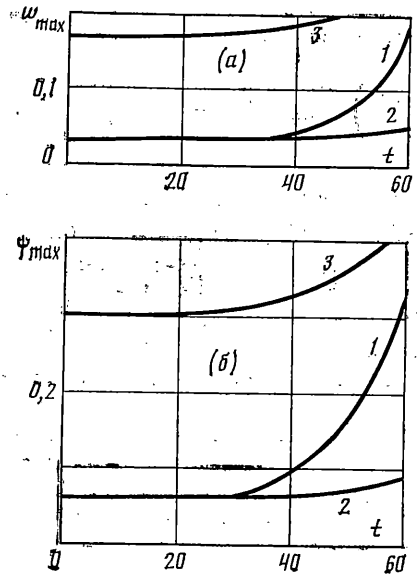
$$\mathbf{C}_1{}^n=[-\psi_r{}^n/\mathbf{I}_1(\beta)]_{r=1};\quad \mathbf{C}_2{}^n=[-(\mathbf{q}/16-\mathbf{L}_3{}^{-1}(\mathbf{q}_\omega^{n-1})+$$



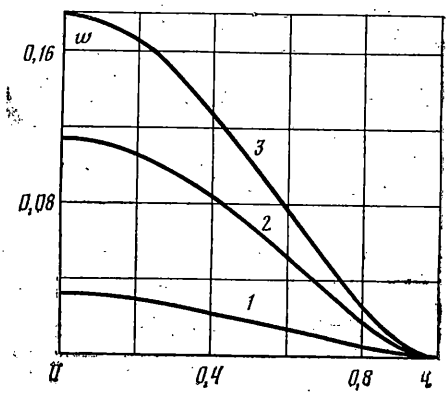
Фиг. 1



Фиг. 3



Фиг. 2



Фиг. 4

$$+a_6L_2^{-1}(p_\omega^{n-1})/a_3)\,]_{r=1},\quad C_3^n=[-2(a_3L_2^{-1}(p_\omega^{n-1})/a_1-$$
$$-q/16+L_3^{-1}(q_\omega^{n-1}))\,]_{r=1},\quad C_4^n=\Big[-b_2\Big(C_1^nI_0(\beta)/\beta+\int\psi_r^n\,dr\Big)-$$
$$-\int a_3L_2^{-1}(p_\omega^{n-1})/a_1-L_3^{-1}(q_\omega^{n-1})\Big)\,dr-q/64-C_3^n\Big]_{r=1} \tag{2.6}$$

При $n=1$ из (2.4) следует точное решение задачи термоупругости.

Для численной реализации решения величина нагрузки $q=0{,}3\cdot10^8$, $p=0$, интенсивность теплового потока $q_t=2{,}5\cdot10^4$ Вт/м, время их воздействия $t_0=60$ минут и относительные толщины слоев ($h_1=0{,}04\to0{,}02$, $h_2=0{,}04$, $h_3=0{,}2$) подбирались таким образом, чтобы нелинейные, теплофизические и реономные свойства материалов проявились в достаточной степени. В качестве материалов слоев принимались нитридкремниевая керамика, сплав Д16Т и фторопласт-4. Соответствующие термомеханические характеристики приведены в [8].

Закон изменения толщины внешнего теплофизического слоя во времени в процессе уноса вещества можно определять теоретически или экспериментально. В первом случае получаем сложную теплофизическую задачу для многофазной среды [9], во втором – зависимость $h_1(t)$ определяется из известных экспериментальных исследований [10]. Так как соответствующие данные для нитридкремниевой керамики в литературе отсутствуют, то при рассмотрении примера, считалось, что унос материала равномерный и его начало соответствует моменту $t=t_0/2$ (после достаточного разогрева поверхности): $h_1=h_1^0$ при $t\leqslant t_0/2$; $h_1=h_1^0\,(3/2-t/t_0)$ при $t_0/2<t\leqslant t_0$. При численном расчете температурного поля, для частичного учета теплоты, пошедшей на нагревание унесенного вещества, в формулу (2.1) необходимо подставлять осредненную толщину $h_1=(h_1(t_n)+h_1(t_{n-1}))/2$ (t_i – узловые точки по времени).

Числовые результаты показали практическую сходимость примененного метода последовательных приближений: максимальное отклонение 5-го приближения, которое принято за искомое решение, от предыдущего и последующего составляет соответственно 2,6 и 0,3%. Количество узлов по радиальной координате определялось из условия независимости от него численных значений. Вычисление квадратур (2.3), (2.5), (2.6) проводилось с использованием формул Ньютона – Котеса. В результате, максимальная погрешность при численном удовлетворении уравнениям равновесия не превышает 8%, граничные условия выполняются точно.

Необходимость учета нелинейных, пластических и реономных свойств конструкционных материалов при изотермических нагружениях показана в [6] на примере двухслойных пластин, поэтому остановимся в основном на влиянии температурного поля. Его изменение в верхней части поперечного сечения пластинки в различные моменты времени показано на фиг. 1 (кривая *1* – $t=0$; кривые *2–4* – t_0). Температура (в К) на поверхности при уносе вещества (кривая *2*) ниже, чем у пластин с постоянной толщиной $h_1=0{,}04$; 0,02 (кривые *3*, *4*) при тех же условиях нагрева. Фиг. 2 иллюстрирует рост максимального прогиба и сдвига во времени. В момент t_0 указанные параметры в случае уноса вещества (кривая *1*) примерно в 3,5 раза больше, чем у пластинки с постоянной толщиной теплозащитного слоя $h_1=0{,}04$ (кривая *2*) и на 30% меньше, чем при $h_1=0{,}02$ (кривая *3*). Изменение радиальных напряжений, которые являются наибольшими и достигают максимума в заделке, по толщине пластинки приведено на фиг. 3. Показанный на фиг. 4 прогиб свидетельствует о бо́льшем влиянии физической нелинейности на перемещения, чем на напряжения (*1* – термоупругость; *2* – линейная термовязкоупругость; *3* – общий случай физических уравнений состояния при t_0). Унос вещества с поверхности внешнего слоя вызывает рост напряжений в несущем металлическом слое.

Таким образом, воздействие теплового потока и унос вещества с поверхности внешнего теплозащитного слоя существенно изменяют всю картину напряженно-деформированного состояния в трехслойной пластинке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Григолюк Э. И., Чулков П. П.* Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. М.: Машиностроение, 1973. 170 с.
2. *Москвитин В. В.* Сопротивление вязко-упругих материалов применительно к зарядам ракетных двигателей на твердом топливе. М.: Наука, 1972. 327 с.
3. *Ильюшин А. А.* Пластичность. М.: Гостехиздат, 1948. 376 с.
4. *Старовойтов Э. И.* О переменном нагружении вязкопластических трехслойных оболочек // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1980. № 2. С. 92–96.
5. *Победря Б. Е.* Математическая теория нелинейной вязко-упругости // Упругость и неупругость. М.: Изд-во МГУ. 1973. № 3. С. 95–173.
6. *Москвитин В. В., Старовойтов Э. И.* К исследованию напряженно-деформированного состояния двухслойных металлополимерных пластин при циклических нагружениях // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 1. С. 116–121.
7. *Коваленко А. Д.* Термоупругость. Киев: Вища шк., 1975. 216 с.
8. *Старовойтов Э. И.* К описанию термомеханических свойств некоторых конструкционных материалов // Пробл. прочности. 1988. № 4. С. 11–14.
9. *Найт Ч. Дж.* Теоретическое моделирование быстрого поверхностного испарения при наличии противодавления // Ракетн. техника и космонавтика. 1979. Т. 17. № 5. С. 81–86.
10. *Реди Дж.* Промышленное применение лазеров. М.: Мир, 1981. 638 с.

Гомель

Поступила в редакцию 24.X.1986