

УДК 539.388.1

И. А. БИРГЕР

ВЕРОЯТНОСТЬ ХРУПКИХ И УСТАЛОСТНЫХ РАЗРУШЕНИЙ

На основе трехпараметрического распределения Вейбулла и метода конечных элементов определяется вероятность разрушения в элементах конструкций в условиях детерминированного и случайного нагружения.

1. Введение. Хрупкими разрушениями называют разрушения без заметной макропластической деформации. Они характерны, в первую очередь, для хрупких материалов (керамических, композиционных и других), обладающих низкими показателями пластичности при стандартных испытаниях на прочность. Усталостные разрушения возникают при циклических нагрузках и свойственны всем конструкционным материалам, в том числе металллическим, обнаруживающим при статических испытаниях высокую пластичность.

Однако усталостные и хрупкие разрушения имеют ряд общих черт, в частности, они проходят без следов макропластической деформации. Отсутствие пластических деформаций приводит к резкой локализации начала процесса разрушения и, как следствие, к существенной зависимости от местных дефектов, концентрации напряжений и т. п. Свойство локальности хрупких и усталостных разрушений приводит к большому рассеянию характеристик прочности, что предопределяет необходимость их статистического описания.

Построение статических моделей хрупкой прочности было начато в классических трудах Вейбулла. Не останавливаясь на ряде работ, отметим развитие проблемы в [1–2] и, применительно к усталостным разрушениям, в [3].

В настоящей работе рассматривается вероятность хрупких и усталостных разрушений в элементах конструкций, общие свойства масштабного эффекта, определение эффективного коэффициента концентрации напряжений.

2. Условия разрушения. Условие разрушения изотропных материалов можно представить в виде [4]:

$$\sigma_e = \lambda_0 \sigma_i + \lambda_1 \sigma_1 + \lambda_2 \sigma_2 + \lambda_3 \sigma_3 \geq \sigma_* \quad (2.1)$$

где σ_e — эквивалентное напряжение; $\sigma_i, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — интенсивность напряжения и главные напряжения ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$); $\lambda_0, \dots, \lambda_3$ — параметры материала; σ_* — разрушающее напряжение при одноосных статических или циклических испытаниях ($\sigma_* = \sigma_b$ — предел прочности при статических испытаниях или $\sigma_* = \sigma_{-1N}$ — предел выносливости при N циклах нагружения)

Наиболее широкое распространение при статическом нагружении получили: условия разрушения Мора

$$\sigma_e = \sigma_1 - \chi \sigma_3 \geq \sigma_b \quad (\lambda_0 = 0, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -\chi) \quad (2.2)$$

где $\chi = \sigma_b / \sigma_c$ — отношение пределов прочности при растяжении и сжатии; и условие Писаренко — Лебедева

$$\sigma_e = \chi \sigma_1 + (1 - \chi) \sigma_1 \geq \sigma_b \quad (\lambda_0 = \chi, \lambda_1 = 1 - \chi, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0) \quad (2.3)$$

Условие разрушения при усталостном нагружении можно принять в виде

$$\sigma_e = \sigma_{ia} + (\sigma_{-1N}/\sigma_b) \sigma_{1m} \geq \sigma_{-1N} \quad (\lambda_0=1, \lambda_1=\sigma_{-1N}/\sigma_b, \lambda_2=0, \lambda_3=0) \quad (2.4)$$

где индекс a относится к амплитудным значениям переменных напряжений, индекс m — к постоянным напряжениям.

В некоторых случаях целесообразно использовать деформационные критерии разрушения. Условие разрушения по наибольшим деформациям растяжения

$$\varepsilon_e = \varepsilon_1 \geq \varepsilon_* = \sigma_b/E \quad (2.5)$$

или в эквивалентной форме (μ — коэффициент Пуассона):

$$\sigma_e = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \geq \sigma_b \quad (\lambda_0=0, \lambda_1=1, \lambda_2=-\mu, \lambda_3=-\mu)$$

Для малоцикловой усталости условие разрушения имеет вид $\varepsilon_e = \varepsilon_{ia} \geq \varepsilon_{-1N}$, где ε_{ia} — интенсивность амплитуд циклических деформаций. По формуле Мэнсона [5]:

$$\varepsilon_{-1N} = (1/2) [\ln(1-\psi)^{-1}]^{0,6} N^{-0,6} + 1,75 (\sigma_b/E) N^{-0,12}$$

где ψ — поперечное сужение материала при разрыве. Не останавливаясь на анизотропных материалах, приведем условия разрушения для композитов: Для волокон

$$\sigma_e = \sigma_1 \geq \sigma_{b1}$$

где σ_1 — наибольшее растягивающее напряжение вдоль волокна, σ_{b1} — предел прочности волокна; и для материала матрицы

$$\sigma_e = \sigma_1 - \chi \sigma_3 \geq \sigma_{b2}$$

где σ_{b2} — предел прочности материала матрицы. Отметим, что при эквивалентных напряжениях

$$\sigma_e < 0$$

разрушения не наступает.

3. Трехпараметрическое распределение Вейбулла и его параметры. Рассмотрим распределение Вейбулла для предела прочности (или другого критического параметра) с функцией распределения

$$F(\sigma_b) = 0 \quad (\sigma_b \leq \sigma_l), \quad F(\sigma_b) = 1 - \exp\{-[(\sigma_b - \sigma_l)/\sigma_0]^m\} \quad (\sigma_b > \sigma_l) \quad (3.1)$$

где m , σ_0 , σ_l — параметры распределения ($m > 0$, $\sigma_0 > 0$, $\sigma_l > 0$). Параметр m будем называть модулем Вейбулла; параметр σ_l — пороговым значением; параметр σ_0 , имеющий размерность напряжения, близок к среднему значению разности $\sigma_b - \sigma_l$. Равенство (3.1) можно представить в эквивалентной форме

$$F(\sigma_b) = 1 - \exp\{-[(\sigma_b - \sigma_l + |\sigma_b - \sigma_l|)/2\sigma_0]^m\} \quad (3.2)$$

Если известны n экспериментальных значений пределов прочности $\sigma_{b1}, \dots, \sigma_{bn}$, то параметры распределения могут быть найдены методом максимального правдоподобия из системы уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial m} = \frac{n}{m} + \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{\sigma_{bi} - \sigma_l}{\sigma_0}\right) \left[1 - \left(\frac{\sigma_{bi} - \sigma_l}{\sigma_0}\right)^m \right] \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma_0} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\sigma_{bi} - \sigma_l}{\sigma_0}\right)^m - n = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma_l} = m \sum_{i=1}^n \left(\frac{\sigma_{bi} - \sigma_l}{\sigma_0}\right)^{m-1} - (m-1) \sum_{i=1}^n \left(\frac{\sigma_{bi} - \sigma_l}{\sigma_0}\right)^{-1} = 0 \quad (3.5)$$

где функция правдоподобия

$$L = \ln \prod_{i=1}^n f(\sigma_{bi}) = \sum_{i=1}^n \ln \left\{ \frac{m}{\sigma_0} \left(\frac{\sigma_{bi} - \sigma_l}{\sigma_0} \right)^{m-1} \exp \left[- \left(\frac{\sigma_{bi} - \sigma_l}{\sigma_0} \right)^m \right] \right\} \quad (3.6)$$

Другой способ — метод центральных моментов — приводит к системе уравнений

$$\langle \sigma_b \rangle = \sigma_l + \sigma_0 \Gamma \left(1 + \frac{1}{m} \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma_{bi} \quad (3.7)$$

$$S_b^2 = \sigma_0^2 \left[\Gamma \left(1 + \frac{2}{m} \right) - \Gamma^2 \left(1 + \frac{1}{m} \right) \right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\sigma_{bi} - \langle \sigma_b \rangle)^2 \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} (\sigma_l - \langle \sigma_b \rangle)^3 + 3(\sigma_l - \langle \sigma_b \rangle)^2 \Gamma \left(1 + \frac{1}{m} \right) + 3(\sigma_l - \langle \sigma_b \rangle) \sigma_0^2 \Gamma \left(1 + \frac{2}{m} \right) + \\ + \sigma_0^3 \Gamma \left(1 + \frac{3}{m} \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\sigma_{bi} - \langle \sigma_b \rangle)^3 \end{aligned} \quad (3.9)$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция. Уравнения (3.3)–(3.5) и (3.7–3.9) могут быть решены методом Ньютона — Рафсона.

4. Вероятность разрушения при детерминированных внешних силах.

В соответствии с концепцией слабого звена, тело рассматривается как последовательное соединение «элементарных объемов». Разрушение любого из элементарных объемов приводит к разрушению всей цепочки (тела). Рассмотрим вероятность разрушения объема ΔV , содержащего ν элементарных объемов.

$$\nu = \Delta V / V_0$$

Будем считать, что статистическое распределение предела прочности (или другого критического параметра) для элементарного объема соответствует распределению (3.2).

Вероятность разрушения элементарного объема.

$$P_{f\Delta V} = 1 - [1 - F(\sigma_e)]^\nu = 1 - \exp \left\{ - (\Delta V / V_0) [(\sigma_e - \sigma_l + |\sigma_e - \sigma_l|) / 2\sigma_0]^m \right\} \quad (4.1)$$

Важно, что параметры распределения m , σ_0 , σ_l отнесены к объему V_0 . Представим теперь элемент конструкции состоящим из последовательно соединенных N объемов ΔV_i . Вероятность разрушения элемента конструкции

$$P_f = 1 - \prod_{i=1}^N (1 - P_{f\Delta V_i}) \quad (4.2)$$

$$P_{f\Delta V_i} = 1 - \exp \left\{ - (\Delta V_i / V_{0i}) [(\sigma_e - \sigma_{li} + |\sigma_e - \sigma_{li}|) / 2\sigma_{0i}]^{m_i} \right\} \quad (4.3)$$

Предполагается, что параметры распределения Вейбулла могут быть различными в различных точках тела. Представим эквивалентное напряжение в элементе конструкции в виде

$$\sigma_e = \sigma_n \varphi(x, y, z) \quad (4.4)$$

где σ_n — некоторое (номинальное) напряжение. Вероятность разрушения из равенств (4.2)–(4.4) будет

$$P_f(\sigma_n) = 1 - \exp \left\{ - \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{V_{0i}} \left(\frac{\sigma_n \varphi - \sigma_{li} + |\sigma_n \varphi - \sigma_{li}|}{2\sigma_{0i}} \right)^{m_i} \Delta V_i \right] \right\}$$

Переходя при достаточно большом N , от суммирования к интегрированию, получим основную зависимость

$$P_f(\sigma_n) = 1 - \exp \left\{ - \int_V (1/V_0) [(\sigma_n \varphi - \sigma_i + |\sigma_n \varphi - \sigma_i|) / 2\sigma_0]^m dV \right\} \quad (4.5)$$

Параметры распределения m , σ_0 , σ_i и единичный объем V_0 могут зависеть от координат точки. В качестве объема V_0 можно принять величину объема рабочей части образцов, для которых получено распределение Вейбулла с параметрами m , σ_0 и σ_i .

5. Теорема о масштабном эффекте. Масштабный эффект свойственен хрупким и усталостным разрушениям — при увеличении размеров тела его прочность падает. Предполагается, что вероятность разрушения определяется в соответствии с концепцией слабого звена. Теорема о масштабном эффекте состоит в следующем.

Рассматриваются два геометрически подобных тела, у которых в сходственных точках одинаковое напряженное состояние и физико-механические свойства материала. Вероятность неразрушения преобразованного тела равна вероятности неразрушения исходного тела в степени, равной отношению их объемов

$$1 - P_{f2}(\sigma_n) = [1 - P_{f1}(\sigma_n)]^{V_2/V_1} \quad (5.1)$$

Для доказательства запишем для тела с объемом V_1 вероятность неразрушения конкретно по формуле (4.5):

$$1 - P_{f1}(\sigma_n) = e^{-G_1} \quad (5.2)$$

$$G_1 = \int_{V_1} (1/V_0) [(\sigma_n \varphi - \sigma_i + |\sigma_n \varphi - \sigma_i|) / 2\sigma_0]^m dV_1$$

соответственно, для преобразованного тела

$$1 - P_{f2}(\sigma_n) = e^{-G_2} \quad (5.3)$$

$$G_2 = \int_{V_2} (1/V_0) [(\sigma_n \varphi - \sigma_i + |\sigma_n \varphi - \sigma_i|) / 2\sigma_0]^m dV_2$$

Пусть при геометрически подобном преобразовании линейные размеры увеличиваются в K раз.

Так как напряжения и параметры статистического распределения в сходственных точках одинаковы, то $G_2 = K^3 G_1$. Логарифмируя равенства (5.2), (5.3) и составляя их отношение, находим,

$$\ln(1 - P_{f2}(\sigma_n)) / \ln(1 - P_{f1}(\sigma_n)) = K^3 = V_2/V_1$$

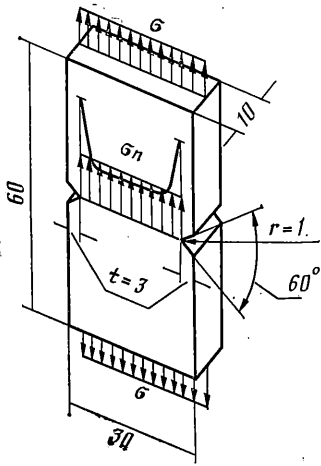
откуда и следует зависимость (5.1). Вероятность разрушения после преобразования подобия и сохранения напряжений в сходственных точках $P_{f2}(\sigma_n) = 1 - [1 - P_{f1}(\sigma_n)]^{V_2/V_1}$, что эквивалентно последовательному соединению исходных объемов. При малых вероятностях разрушения $P_{f2}(\sigma_n) = (V_2/V_1) P_{f1}(\sigma_n)$, т. е. вероятность разрушения возрастает пропорционально увеличению объемов. Отношение средних значений номинальных напряжений

$$\langle \sigma_{n2} \rangle / \langle \sigma_{n1} \rangle = \left(\int_0^\infty \exp[-G_1(\sigma_{n1})] d\sigma_{n1} \right) \left(\int_0^\infty \exp[-G_2(\sigma_{n2})] d\sigma_{n2} \right)^{-1}$$

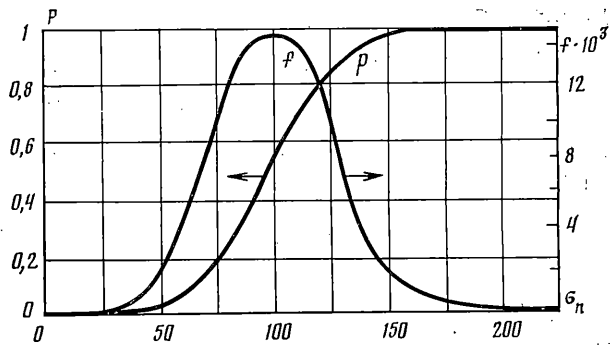
В частном случае, когда пороговое значение $\sigma_i = 0$, $\varphi = 1$ и величина m постоянна, получаем известное соотношение $\langle \sigma_{n2} \rangle / \langle \sigma_{n1} \rangle = (V_1/V_2)^{1/m}$.

6. Расчет вероятности разрушения и эффективного коэффициента концентрации напряжений. Наиболее важное применение модели Вейбулла — оценка влияния зон концентрации напряжений на прочность. В прежних работах для решения задачи приходилось использовать ряд упрощающих предположений: замена объемного распределения напряжений распределением по площади, предположение о линейном распределении напряжений в зонах концентрации и т. д.

Новые возможности открывают метод конечных элементов. Пример рас-



Фиг. 1



Фиг. 2

чета относится к растяжению пластинки с надрезом (фиг. 1, размеры в мм). Были взяты следующие значения параметров распределения: $m=3$, $\sigma_0=100$ МПа, $\sigma_l=25$ МПа, $V_0=5 \cdot 10^3$ мм³. В качестве номинального напряжения принято равномерно распределенное напряжение в зоне концентрации напряжений.

Эквивалентное напряжение определялось по (2.3) при $\chi=0,2$. Вероятность разрушения подсчитывалась по формуле (4.5); плотность распределения номинального предела прочности по соотношению

$$f(\sigma_n) = dP_f/d\sigma_n = [1 - P_f(\sigma_n)] \int_V (m\varphi/V_0\sigma_0) [(\sigma_n\varphi - \sigma_l + |\sigma_n\varphi - \sigma_l|)/2\sigma_0]^{m-1} dV \quad (6.1)$$

Величины $P_f(\sigma_n)$ и $f(\sigma_n)$ даны на фиг. 2, размерность в σ_n МПа. Теоретический коэффициент концентрации напряжений определяется зависимостью $\alpha_\sigma = \sigma_{e\max}/\sigma_n$, где $\sigma_{e\max}$ — максимальное (приведенное) напряжение в зоне концентрации напряжений в (идеально) упругом теле; σ_n — номинальное напряжение. В качестве номинального обычно принимается напряжение в опасной точке при линейном распределении напряжений по сечению, в соответствии с формулами сопротивления материалов (фиг. 1, $\alpha_\sigma=3,87$).

Рассмотрим усталостные разрушения и пусть переменное напряжение при симметричном цикле в образце соответствует значению σ_{n0} . Условие разрушения при заданном числе циклов N с вероятностью P будет: $\sigma_{n0} = \sigma_{-1N}(P)$, где $\sigma_{-1N}(P)$ — квантиль вероятности P случайной величины σ_{-1N} (предела выносливости на базе N циклов). Для детали с концентрацией напряжений условие разрушения представим в виде $K_{sd}\sigma_{ndk} = \sigma_{-1N}(P)$, где K_{sd} — эффективный коэффициент концентрации напряжений в детали; σ_{ndk} — номинальное напряжение в детали.

Из последних соотношений следует

$$K_{sd} = \sigma_{-1N}(P) / \sigma_{ndk} = \sigma_{n0} / \sigma_{ndk}$$

Величина K_{sd} учитывает одновременно масштабный эффект (отличие объема детали от объема образца) и собственно эффект концентрации напряжений. Отдельно влияние концентрации напряжений оценивается коэффициентом $K_\sigma = \sigma_{nd}/\sigma_{ndk}$, где σ_{nd} — номинальное напряжение в опасной точке детали при отсутствии концентрации напряжений. Масштабный эффект характеризуется коэффициентом $K_d = \sigma_{nd}/\sigma_{n0}$. Величину σ_{ndk} определяют из уравнения (4.5):

$$P_f(\sigma_{ndk}) = 1 - \exp\left\{-(1/V_0) [(\sigma_{ndk}\varphi - \sigma_l + |\sigma_{ndk}\varphi - \sigma_l|)/2\sigma_0]^m dV\right\} = P \quad (6.2)$$

где P — заданное значение вероятности разрушения (обычно принимают $P=0,5$).

Уравнение (6.2) решается методом Ньютона по схеме

$$\sigma_{ndk}^{(2)} = \sigma_{ndk}^{(1)} -$$

$- [P_f(\sigma_{ndk}^{(1)}) - P] / f(\sigma_{ndk}^{(1)})$, причем в качестве первого приближения можно принять $\sigma_{ndk}^{(1)} = \sigma_0 / \alpha_\sigma$.

Для детали (фиг. 1), выполненной из углеродистой стали, при $m=20$, $\sigma_0=180$ МПа, $\sigma_l=5$ МПа, $V_0=0,8 \cdot 10^3$ мм³ из (6.2) получены значения σ_{ndk} , соответствующие вероятности разрушения $P=0,5$ и величины σ_{nd} , σ_{n0} : $\sigma_{ndk}=74,6$ МПа, $\sigma_{nd}=201,3$ МПа, $\sigma_{n0}=226,7$ МПа, что дает $K_{od}=226,7/74,6=3,04$, $K_\sigma=201,3/74,6=2,70$, $K_d=201,3/226,7=0,89$.

Величина σ_{n0} определялась для образца из условия (3.2):

$$P_f(\sigma_{n0}) = F(\sigma_{n0}) = 1 - \exp\{-[(\sigma_{n0} - \sigma_l + |\sigma_{n0} - \sigma_l|) / 2\sigma_0]^m\} = P$$

При вычислении σ_{nd} принималось (фиг. 1) $\varphi(x, y, z) = \sigma / \sigma_n = (30 - 6) / 30 = 0,8$.

Отметим, что при более общем подходе к учету влияния концентрации напряжений, следует учесть особые свойства поверхности внешнего слоя. При определении вероятности разрушения по равенству (4.5) вводится слой толщиной δ с другими параметрами распределения m_1 , σ_{01} , σ_{11} . Толщина слоя и параметры распределения считаются зависящими от механических характеристик материала (σ_b , σ_T , ψ и т. д.), что позволяет обеспечить хорошее совпадение с экспериментальными данными.

7. Вероятность разрушения при случайных внешних силах. Вследствие неизбежного рассеяния внешних нагрузок, температурного состояния, геометрии деталей поле действующих напряжений является случайным. Допустим, что эквивалентное напряжение можно представить в виде

$$\sigma_\sigma = \sum_{j=1}^r \sigma_{nj} \varphi_j(x, y, z) \quad (7.1)$$

где σ_{nj} — случайное значение номинального напряжения от j -го силового фактора, $\varphi_j(x, y, z)$ — детерминированная функция, описывающая распределение напряжений. Внося (7.1) в равенство (4.5), получим вероятность разрушения при фиксированных значениях номинальных напряжений $P_{f*} = P_f^*(\sigma_{n1}, \dots, \sigma_{nr})$. Вероятность разрушения при случайных значениях номинальных напряжений по схеме полной вероятности равна

$$P_f = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_r}^{b_r} f(\sigma_{n1}, \dots, \sigma_{nr}) P_{f*}(\sigma_{n1}, \dots, \sigma_{nr}) d\sigma_{n1} \dots d\sigma_{nr}$$

где $f(\sigma_{n1}, \dots, \sigma_{nr})$ — плотность вероятности совместного распределения случайных величин σ_{nj} ; a_j , b_j — пределы их возможных значений. Рассмотрим частный случай, когда σ_n имеет нормальное распределение ($r=1$):

$$P_f = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma_n) \exp\left\{-\int_V [(\sigma_n \varphi - \sigma_l + |\sigma_n \varphi - \sigma_l|) / 2\sigma_0]^m dV\right\} d\sigma_n$$

$$f(\sigma_n) = \sigma_n^{-1} (2\pi)^{-1/2} \exp[-(\sigma_n - \langle \sigma_n \rangle)^2 / 2s_n^2].$$

Интеграл в общем случае определяется численными методами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бологин В. В. Статистические методы в строительной механике. М.: Стройиздат, 1965. 279 с.
2. Бологин В. В. Прогнозирование ресурса машин и конструкций. М.: Машиностроение, 1984. 312 с.
3. Козаев В. П. Расчеты на прочность при напряжениях, переменных во времени. М.: Машиностроение, 1977. 232 с.
4. Биргер И. А. Об одном критерии разрушения и пластичности // Изв. АН СССР. МТТ. 1977. № 4. С. 143-150.
5. Биргер И. А., Мавлюгов Р. Р. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1986. 560 с. Москва

Поступила в редакцию
5.V.1988