МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 · 1989

УДК 531.38

В. В. КОЗЛОВ

О ПАДЕНИИ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Рассматривается задача Чаплыгина о свободном падении в безграничном объеме идеальной жидкости тяжелого твердого тела, имеющего плоскость симметрии. Предполагается, что жидкость однородна, совершает безвихревое движение и покоится на бесконечности. Установлено, что для почти всех начальных данных при $t\to\infty$ тело стремится занять такое положение, при котором его широкая сторона горизонтальна. Приближаясь к этому положению, твердое тело совершает угловые колебания с убывающей амплитудой и возрастающей частотой. Асимптотически траектория тела в общем случае является параболой. С помощью методов вариационного исчисления в целом доказано существование движений, при которых тело совершает ровно один полуоборот, когда время t изменяется от $-\infty$ до $+\infty$.

1. Уравнения движения. Рассмотрим, следуя Чаплыгину [1], задачу о падении тяжелого твердого тела в безграничном объеме однородной идеальной жидкости, совершающей безвихревое движение и покоящейся на бесконечности. Предположим, что твердое тело имеет плоскость симметрии П (форма тела и его распределение массы инвариантны при отражении относительно П). Среди множества всех движений твердого тела выделим те, при которых плоскость П занимает постоянное вертикальное положение. Положение тела определяется, очевидно, тремя параметрами. Пусть x, y — декартовы координаты некоторой точки тела O в плоскости П (ось x горизонтальна, а ось y направлена вверх), φ — угол поворота тела (фиг. 1). В некоторой связанной с телом системе отсчета $O\xi\eta\zeta$ (ось $O\zeta$ ортогональна плоскости П) кинетическая энергия системы «тело+жидкость» имеет следующий вид: $T=(a_1u^2+a_2v^2+b\omega^2)/2$, где u, v — проекции скорости точки O на оси $O\xi$, $O\eta$, ω — угловая скорость тела. Постоянные коэффициенты a_1, a_2, b включают в себя присоединенные массы и присоединенный момент инерции тела. Примем, что $a_2\geqslant a_1$ и пусть φ — угол между вертикалью и осью $O\xi$, отсчитываемый по часовой стрелке (см. фиг. 1). Следовательно, $\omega=-\varphi^{\cdot}$.

Уравнения падения тела в жидкости представлены в [1] в виде уравнений Кирхгофа

$$a_1u^{\cdot}-a_2v\omega=-p\cos\varphi,\quad a_2v^{\cdot}+a_1u\omega=-p\sin\varphi$$

$$b\omega^{\cdot}+(a_2-a_1)uv=p(\eta\cos\varphi-\xi\sin\varphi) \tag{1.1}$$

где p — вес системы «тело — жидкость», $p(\eta\cos\varphi-\xi\sin\varphi)$ — суммарный момент веса тела и силы Архимеда относительно точки O. Если твердое тело однородно, то ξ, η суть декартовы координаты его центра масс. Вспоминая, что $\omega=-\varphi^{\cdot}$, из первых двух уравнений (1.1) получаем следующие соотношения:

$$a_1u=-pt\cos\varphi+s\cos(\varphi+\alpha),\quad a_2v=-pt\sin\varphi+s\sin(\varphi+\alpha) \tag{1.2}$$

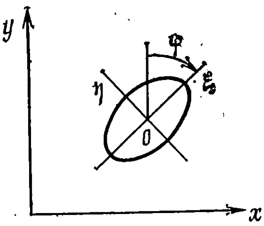
Постоянные s, α выражаются через скорость точки O и значение угла φ в любой фиксированный момент времени. Чаплыгин назвал параметр s начальным толчком тела. Соотношения (1.2) являются следствием теоремы об изменении импульса системы тело + жидкость: горизонтальная составляющая импульса постоянна и в принятых обозначениях равна $-s\sin\alpha$, а вертикальная составляющая изменяется по закону $s\cos\alpha-pt$.

Второе уравнение системы (1.1) с учетом равенств (1.2) дает дифференциальное уравнение второго порядка для определения угла поворота

$$\varphi^{\cdot\cdot}=(a_2-a_1)b^{-1}uv+pb^{-1}(\xi\sin\varphi-\eta\cos\varphi) \quad (1.3)$$

Скорость точки O в неподвижном пространстве находится из очевидных соотношений

$$x^{\cdot}=u\sin\varphi-v\cos\varphi,\quad y^{\cdot}=u\cos\varphi+v\sin\varphi \quad (1.4)$$



Фиг. 1

Если известны решения уравнений (1.3), то траектория точки O находится из (1.4) простыми квадратурами. В случае динамической симметрии, когда $a_1=a_2$, уравнение (1.3) интегрируется в эллиптических функциях (см. [1]). В общем случае, когда $a_1\neq a_2$, уравнение (1.3) является уже неавтономным и его вряд ли можно проинтегрировать в явном виде. В пользу этого предположения говорит следующий результат: если $a_1\neq a_2$ и $p\neq 0$, то уравнение (1.3) не имеет полиномиальных по скорости $\varphi^{\cdot}$ интегралов с 2π-периодическими по переменной φ коэффициентами. Его доказательство имеет чисто аналитический характер и здесь не приводится.

Настоящая работа посвящена качественному анализу замкнутой системы уравнений (1.3)–(1.4). В случае $p=0$ (тело движется по инерции) такой анализ проведен в классических работах Томсона, Тета и Гринхилла (см. [2]).

2. Вращение твердого тела. При фиксированных значениях s и α уравнение (1.3) с учетом соотношений (1.2) является замкнутым и поэтому вращение тела можно изучать независимо от его поступательного движения. Уравнение (1.3) имеет следующий явный вид:

$$\varphi^{\cdot\cdot}=kt^2\sin\varphi\cos\varphi+tf(\varphi)+g(\varphi)$$

$$k=(a_2-a_1)(ba_1a_2)^{-1}p^2,\quad f=-ksp^{-1}\sin(2\varphi+\alpha) \quad (2.1)$$

$$g=ks^2p^{-2}\sin(\varphi+\alpha)\cos(\varphi+\alpha)+pb^{-1}(\xi\sin\varphi-\eta\cos\varphi)$$

Если $a_1=a_2$, то уравнение (2) сводится к уравнению колебаний простого маятника. Этот случай детально исследован в [1]. В дальнейшем предполагается, что $a_2>a_1$ и $p>0$ (т. е. $k>0$).

Уравнение (2.1) имеет «равновесные» решения $\varphi(t)=\mathrm{const}$ лишь при выполнении некоторых специальных условий. Если $s\sin\alpha=0$ и $\eta=0$, то имеется решение $\varphi(t)=\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; если $s\sin\alpha=0$ и $\xi=0$, то имеется решение $\varphi(t)\equiv\pi/2+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. В первом случае тело падает вниз с постоянным ускорением p/a_1, во втором – с ускорением p/a_2. Решение $\varphi=\pi n$ всегда неустойчиво. Действительно, в этом случае уравнение (2.1) приводится к виду

$$2\varphi^{\cdot\cdot}=\Lambda(\varphi,t)\sin 2\varphi,\quad \Lambda=kt^2-2ksp^{-1}t\cos\alpha+ks^2/p^2+p\xi/(b\cos\varphi)$$

Так как $\Lambda\geqslant\varkappa$, $\varkappa=\mathrm{const}>0$ в некоторой полуполосе $|\varphi|\leqslant\varepsilon$, $t\geqslant t_0$, то любое решение $\varphi(t)$ с начальными данными $\varphi(t_0)>0$, $\varphi^{\cdot}(t_0)>0$ монотонно возрастает и за конечное время покинет ε-окрестность положения равновесия.

Исследуем устойчивость решения $\varphi(t)\equiv\pi/2$. Полагая $\varphi=\pi/2+\delta$, запишем линеаризованное уравнение (2.1):

$$\delta^{\cdot\cdot}+q(t)\delta=0,\quad q=kt^2+\lambda t+\mu,\quad \lambda=-2ks\cos\alpha/p,\quad \mu=ks^2/p^2-p\eta/b \quad (2.2)$$

Выполним замену времени $\tau=t^2/2$ и сделаем подстановку $\delta=\gamma/\tau^{1/4}$. В результате уравнение (2.2) примет вид (штрих означает дифференцирование по τ):

$$\gamma''+Q(\tau)\gamma=0,\quad Q=k+\lambda(2\tau)^{-1/2}+\mu(2\tau)^{-1}+{}^3/{}_{16}\tau^{-2} \quad (2.3)$$

Так как при $\tau\to\infty$ справедлива оценка $|Q'(\tau)|\leqslant\nu/\tau^{3/2}$ $(\nu=\mathrm{const}>0)$ и $Q(+\infty)=k>0$, то для решений уравнения (2.3) справедливо асимптотическое ВКБ-представление

$$\gamma=c_1\sin\int_{\tau_0}^{\tau}\sqrt{Q(z)}\,dz+c_2\cos\int_{\tau_0}^{\tau}\sqrt{Q(z)}\,dz+\sigma(z) \quad (2.4)$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные и $\sigma(\tau)$, $\sigma'(\nu)\to 0$ при $\tau\to\infty$ (см., например, [3]). Следовательно, все решения уравнения (2.2) стремятся к нулю как функция $t^{-1/2}$. Ниже будет показано, что этот вывод справедлив и для нелинейного уравнения (2.1). Так как уравнение (2.2) гамильтоново, то ввиду теоремы Лиувилля о сохранении фазовой площади скорость $\delta^{\cdot}$ неограничена как функция t. Следовательно, равновесие $\delta=0$, $\delta^{\cdot}=0$ уравнения (2.2) неустойчиво, однако имеет место асимптотическая устойчивость по отношению к координате δ.

В общем случае уравнение (2.1) не имеет равновесных решений, однако существуют заменяющие их замечательные асимптотические решения $\varphi(t)$, стремящиеся при $t\to\infty$ либо к точкам πn $(n\in\mathbf{Z})$, либо к точкам $\pi/2+\pi n$ $(n\in\mathbf{Z})$. Действительно, уравнение (2.1) имеет формальное решение в виде степенного ряда

$$\varphi=\varphi_1/t+\varphi_2/t^2+\varphi_3/t^3+\ldots$$

$$\varphi_1=sp^{-1}\sin\alpha,\quad \varphi_2=2s^2p^{-2}\sin\alpha\cos\alpha-p\eta(kb)^{-1} \tag{2.5}$$

$$\varphi_3=s^3p^{-3}(2/3\sin^3\alpha+4\sin\alpha\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha)-2s\eta(kb)^{-1}\cos\alpha+ +\xi s(kb)^{-1},\ \sin\alpha,\ldots$$

Коэффициенты ряда (2.5) φ_1, φ_2, ... последовательно находятся по индукции. В общем случае числа φ_n очень быстро возрастают с ростом n, что приводит к расходимости ряда (2.5) при всех значениях $t\neq\infty$. Однако, из теоремы [4] вытекает существование решения $\varphi(t)$, которое стремится к нулю при $t\to\infty$ и для которого формальный ряд (2.5) является асимптотическим

$$\varphi(t)-\sum_{j=1}^{n}\varphi_j/t^j=O(t^{-n-1})$$

Из формул (2.5) следует, что при $s\sin\alpha=\eta=0$ это решение переходит в равновесное решение $\varphi(t)=0$. Решению (2.5) отвечает движение тела, при котором $\lim x^{\cdot}(t)=-s\sin\alpha/a_1$, $\lim y^{\cdot\cdot}(t)=-p/a_1$ $(t\to\infty)$. Аналогично находится еще одно решение (2.1), представимое асимптотическим рядом

$$\varphi=\pi/2+\psi_1/t+\psi_2/t^2+\ldots$$

$$\psi_1=sp^{-1}\sin\alpha,\quad \psi_2=2s^2p^{-2}\sin\alpha\cos\alpha-p\xi(kb)^{-1},\ldots \tag{2.6}$$

Ему отвечает движение тела, при котором $\lim x^{\cdot}(t)=-s\sin\alpha/a_2$, $\lim y^{\cdot\cdot}(t)=-p/a_2$ $(t\to\infty)$. Если $s\sin\alpha=0$ и $\xi=0$, то решение (2.6) переходит в решение $\varphi(t)=\pi/2$.

Анализ поведения общего решения уравнения (2.1) является довольно сложной задачей. По-видимому, для почти всех начальных данных имеет место предельное соотношение

$$\lim_{t\to\infty}\varphi(t)=\pi/2 \bmod \pi \tag{2.7}$$

Это утверждение в полном объеме пока не доказано.

Выполним снова замену времени $\tau=t^2/2$. Обозначая штрихом дифференцирование по τ, перепишем уравнение (2.1):

$$\varphi''-k\sin\varphi\cos\varphi=-\varphi'/2\tau+f(2\tau)^{-1/2}+g/2\tau \tag{2.8}$$

При больших значениях τ правая часть этого уравнения является малой величиной. Введем полную энергию «невозмущенной» задачи $H=(\varphi'^2+k\cos^2\varphi)/2$ и рассмотрим поведение этой функции вдоль решений уравнения (2.8). Оказывается, всегда существует

$$\lim_{\tau\to\infty}H(\tau)=c \tag{2.9}$$

причем постоянная c равна или 0, или $k/2$. В первом случае угловая координата $\varphi(t)$ при $t\to\infty$ стремится к одной из точек $\pi/2+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, причем

$$\lim_{t\to\infty}\varphi^{\cdot}(t)/t=\lim_{\tau\to\infty}\varphi'(\tau)=0 \tag{2.10}$$

Во втором случае фазовая траектория уравнения (2.8) петляет вблизи сепаратрисы невозмущенной задачи. По-видимому, почти все решения уравнения (2.8) на самом деле проходят через эту сепаратрису.

Для доказательства (2.9) рассмотрим функцию

$$E={}^1/_2(\varphi')^2+{}^1/_2k\cos^2\varphi-F(\varphi)(2\tau)^{-1/2}-{}^1/_2G(\varphi)/\tau \tag{2.11}$$

где F и G – первообразные функций f и g. Так как средние по периоду функций f и g равны нулю, то F и G периодичны по φ с периодом 2π. Дифференцируя функцию E в силу уравнения (2.8), получим равенство:

$$E'-(2\tau)^{-3/2}F-G/2\tau^2=-(\varphi')^2/2\tau \tag{2.12}$$

Ввиду ограниченности функций F и G интегралы от функций $F(\varphi(\tau))\tau^{-3/2}$ и $G(\varphi(\tau))\tau^{-2}$ в пределах от τ_0 до ∞ сходятся. Следовательно, функция $E(\tau)$ ограничена. Отсюда в свою очередь вытекает сходимость несобственного интеграла от функции $(\varphi')^2/\tau$ в тех же пределах. Интегрируя обе части равенства (2.12) в интервале $[\tau_0, \tau]$ и устремляя затем τ к бесконечности, получим, что функция $E(\tau)$ стремится к некоторой постоянной c. Ввиду формулы (2.11) получаем (2.9).

Ясно, что $c\geqslant0$. Если $c>k/2$, то при достаточно больших значениях τ имеем неравенство $(\varphi')^2\geqslant\varkappa>0$, $\varkappa=\text{const}$. В этом случае интеграл от функции $(\varphi')^2/\tau$ будет расходящимся. Следовательно, $c\leqslant k/2$. Покажем, что если $0<c<k/2$, то этот интеграл также расходится. Действительно, согласно (2.8) при достаточно больших значениях τ точка $(\varphi(\tau), \varphi'(\tau))$ движется вблизи замкнутой кривой $(\varphi')^2+k\cos^2\varphi=2c$, причем скорость этого движения мало отличается от скорости «невозмущенного» движения, описываемого уравнением маятника $\varphi''=k\sin\varphi\cos\varphi$. Следовательно, имеется бесконечно много временных интервалов (τ_{2n-1}, τ_{2n}), $n=1, 2, \ldots$, на которых справедливы неравенства $c\leqslant(\varphi'(\tau))^2\leqslant3c/2$. Положим $C=\sup_{\tau\geqslant\tau_0}|\varphi''(\tau)|$. Ввиду уравнения (2.8) постоянная $C<\infty$. Следовательно,

$$(3c/2)^{1/2}-c^{1/2}=\left|\int\limits_{\tau_{2n-1}}^{\tau_{2n}}\varphi''(\tau)\,d\tau\right|\leqslant\int\limits_{\tau_{2n-1}}^{\tau_{2n}}|\varphi''(\tau)|\,d\tau\leqslant C(\tau_{2n}-\tau_{2n-1})$$

Поэтому $\tau_{2n}-\tau_{2n-1}\geqslant\Delta>0$ при всех n. Ясно, что разности $\tau_{j+1}-\tau_j$ ($j=1, 2, \ldots$) ограничены сверху некоторым положительным числом T. Поэтому $\tau_j\leqslant jT+\sigma$, где $\sigma=\text{const}>0$. Так как на интервале $\tau_{2n-1}\leqslant\tau\leqslant\tau_{2n}$ справедлива оценка $(\varphi')^2/\tau\geqslant c/\tau_{2n}\geqslant c/(2nT+\sigma)$, то рассматриваемый интеграл не меньше суммы ряда $\Sigma c\Delta/(2nT+\sigma)$, $n=1, 2, \ldots$. Остается заметить, что этот ряд расходится к $+\infty$.

Отметим одно следствие из полученного результата. Если при достаточно большом значении t_0 скорость $\dot\varphi(t_0)$ мала, а значение $\varphi(t_0)$ мало отличается от одной из точек $\pi/2+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, то $\varphi(t)\to\pi/2+\pi n$, $\dot\varphi(t)/t\to0$ при $t\to+\infty$. В частности, равновесные решения уравнения (2.1) $\varphi(t)\equiv\pi/2+\pi n$ $(n\in\mathbf{Z})$, существующие при $\sin\alpha=\xi=0$, асимптотически устойчива по отношению к координате φ.

В наиболее простом частном случае, когда $s=\xi=\eta=0$, энергия H монотонно убывает с ростом τ. Поэтому, если точка (φ, φ') в некоторый момент τ попала в колебательную область, то она из нее уже не выйдет и переменная φ будет стремиться к соответствующему устойчивому равновесию. Пусть, например, $\varphi\to\pi/2$ при $t\to\infty$. Из формулы (2.4) легко получить простое асимптотическое представление для функции $\delta(t)=\varphi(t)-\pi/2$:

$$\delta=c(kt)^{-1/2}\sin({}^1/_2k^{1/2}t^2+\psi_0),\quad \dot\delta=ct^{1/2}\cos({}^1/_2k^{1/2}t^2+\psi_0) \tag{2.13}$$

$$(c,\ \psi_0=\text{const})$$

Из (2.13) видно, что функция $\delta(t)$ стремится к нулю как $t^{-1/2}$ и быстро осциллирует. Ее нули имеют асимптотику $t_n\sim(2\pi n)^{1/2}k^{-1/4}$ и поэтому расстояние между соседними нулями неограниченно убывает с ростом n. Важно подчеркнуть, что амплитуда угловой скорости вращения тела $\dot\delta(t)$ неограниченно возрастает.

Таким образом, твердое тело стремится занять такое положение, при котором его широкая сторона является горизонтальной. При этом тело совершает колебания с неограниченно убывающей амплитудой и возрастающей частотой. Конечно, в действительности вязкость гасит высокие частоты. Покажем это на примере диссипативных сил с линейной вязкостью. Добавим в правую часть уравнения (2.1) слагаемое $-\mu\varphi^{\cdot}$, $\mu=\mathrm{const}>0$, линеаризуем это уравнение в окрестности равновесного решения $\varphi(t)\equiv\pi/2$ и выполним замены переменных $\tau=t^2/2$, $\delta=\gamma\tau^{-1/4}\exp[-\mu(\tau/2)^{1/2}]$. В результате для переменной γ получим уравнение (2.3), в котором снова $Q(\tau)=k+o(1)$. Из асимптотической формулы (2.4) следует, что амплитуда колебаний угловой скорости $\delta^{\cdot}(t)$ убывает с ростом t как $t^{1/2}\exp(-\mu t/2)$. Поэтому, действительно, $\delta^{\cdot}(t)\to 0$ при $t\to\infty$.

3. Применение метода усреднения. Если начальный толчок s равен нулю, то соотношение (2.7) можно обосновать с помощью некоторой модификации известного принципа усреднения. В этом случае уравнение (2.8) принимает следующий вид:

$$\varphi''-k\sin\varphi\cos\varphi=-\varphi'/2\tau+g/2\tau,\qquad g=(\xi\sin\varphi-\eta\cos\varphi)p/b \tag{3.1}$$

При больших значениях τ правая часть этого уравнения является малой величиной, поэтому для исследования финальных свойств решений (3.1) можно воспользоваться теорией возмущений. Невозмущенная система $\varphi''-k\sin\varphi\cos\varphi=0$ описывает колебания обычного маятника. Вводя полную энергию $H=(\varphi'^2+k\cos^2\varphi)/2$, перейдем к переменным действие — угол J, $\psi \bmod 2\pi$:

$$J=\frac{(H/2)^{1/2}}{\pi}\int_0^{2\pi}(1-\varkappa^2\cos^2 q)^{1/2}\,dq,\qquad \psi=(2H)^{-1/2}\frac{dH}{dJ}\int_{-\pi/2}^{\varphi}\frac{dq}{(1-\varkappa^2\cos^2 q)^{1/2}},$$

$$\varkappa^2=\frac{k}{2H} \tag{3.2}$$

Здесь для определенности рассматривается область вращательных движений. Формулы (3.2) можно переписать в следующем виде:

$$J=\frac{(8H)^{1/2}\mathbf{E}}{\pi},\qquad \psi=\frac{\pi}{2\mathbf{K}}\int_0^{\varphi+\pi/2}\frac{dx}{(1-\varkappa^2\sin^2 x)^{1/2}}$$

где $\mathbf{K}$ и $\mathbf{E}$ — полные эллиптические интегралы первого и второго родов с модулем $\varkappa$. Следовательно,

$$\cos\varphi=\mathrm{sn}\,w,\quad \sin\varphi=-\mathrm{cn}\,w,\quad \varphi'=(2H)^{1/2}\mathrm{dn}\,w,\quad w=2\mathbf{K}\psi/\pi$$

Вычислим производную действия J по переменной τ:

$$J'=\frac{4\mathbf{K}H'}{\pi(8H)^{1/2}}=\frac{4\mathbf{K}}{\pi(8H)^{1/2}}\left(-\frac{\varphi'^2}{2\tau}+\frac{g\varphi'}{2\tau}\right) \tag{3.3}$$

Согласно принципу усреднения, правую часть этого равенства следует усреднить по угловой переменной ψ. Усредним сначала функцию $g\varphi'$. Так как средние значения $\langle \mathrm{sn}\,w\,\mathrm{dn}\,w\rangle$ и $\langle \mathrm{cn}\,w\,\mathrm{dn}\,w\rangle$ равны нулю, то $\langle g\varphi'\rangle=0$. Вычислим теперь $\langle\varphi'^2\rangle=2H-k\langle\mathrm{cn}^2 w\rangle=2H\mathbf{E}/\mathbf{K}$. Следовательно, усредненное уравнение (3.3) имеет следующий вид:

$$J'=-J/2\tau \tag{3.4}$$

Оно описывает эволюцию медленной переменной J на асимптотически больших промежутках времени (точные оценки будут даны ниже). Уравнение (3.4) просто интегрируется: $J=c/\sqrt{\tau}$, $c=\mathrm{const}$. Значит, $J\to 0$ при $\tau\to\infty$. Поскольку уравнение (3.4) справедливо и в колебательной области, то отсюда вытекает (2.7). Однако, надо иметь в виду, что не все решения переходят через сепаратрису. Примером служит решение (2.5). Однако, по-видимому, их мера равна нулю.

В уравнении (3.1) роль малого параметра играет множитель $1/\tau$ (при больших τ). Однако, эта величина не является постоянной и поэтому стандартный метод обоснования принципа усреднения (см. [5]) нуждается в некоторой модификации.

В переменных J, ψ mod 2π уравнение (3.1) принимает следующий вид:

$$J'=\tau^{-1}F(J,\ \psi),\qquad \psi'=\omega(J)+\tau^{-1}G(J,\ \psi) \tag{3.5}$$

причем функции F и G гладкие и 2π-периодические по ψ. Вместо переменной J введем новую переменную P по формуле

$$P=J+\tau^{-1}K(J,\ \psi) \tag{3.6}$$

где 2π-периодическая функция K удовлетворяет уравнению

$$\omega\partial K/\partial\psi=\Lambda-G,\qquad \Lambda=\langle G\rangle \tag{3.7}$$

Если $\omega(J)>\text{const}>0$, то периодическое решение (3.7), действительно, существует. При больших значениях τ формулу (3.6) можно обратить:

$$J=P+\tau^{-1}S(P,\ \psi)+O(\tau^{-2}) \tag{3.8}$$

Согласно (3.5)–(3.8), переменная P удовлетворяет уравнению

$$P'=\tau^{-1}\Lambda(P)+R,\qquad |R|\leqslant c_1/\tau^2,\qquad c_1=\text{const}>0 \tag{3.9}$$

Рассмотрим теперь усредненное уравнение

$$I'=\tau^{-1}\Lambda(I) \tag{3.10}$$

и сравним функции $P(\tau)$ и $I(\tau)$. Пусть τ_0 велико и $J(\tau_0)=P(\tau_0)$. Согласно (3.6) получаем оценку

$$|P(\tau_0)-I(\tau_0)|\leqslant c_2/\tau_0,\qquad c_2>0 \tag{3.11}$$

Пусть $\varkappa$ – постоянная Липшица для функции Λ. Применяя теорему сравнения для уравнений (3.9) и (3.10) (см., например, [6], гл. IV) и оценку (3.11), получаем неравенство

$$|P(\tau)-I(\tau)|\leqslant\frac{c_2}{\tau_0}e^{\varkappa(\tau-\tau_0)}+\frac{c_1}{\varkappa\tau_0}[e^{\varkappa(\tau-\tau_0)}-1]$$

Следовательно, на большом интервале времени $\tau_0\leqslant\tau\leqslant2\tau_0$ функции $P(\tau)$ и $I(\tau)$ (а также $J(\tau)$ и $I(\tau)$) отличаются на малую величину $\leqslant c_3/\tau_0$. Что и требовалось.

Отметим, что для уравнения (3.1) вблизи сепаратрис невозмущенной задачи частота ω мала. Это создает дополнительные трудности в обосновании метода усреднения, связанные с изучением перехода через сепаратрису.

В рассматриваемой задаче уравнение (3.9) имеет вид

$$P'=-P/2\tau+R \tag{3.12}$$

причем в колебательной области функция R допускает оценку $|R|\leqslant c/\tau^2$. Полагая $P=z\tau^{-1/2}$, из (3.12) получаем уравнение $z'=\tau^{1/2}R$, из которого вытекает ограниченность функции $z(\tau)$ при $\tau\to\infty$. Следовательно, $P=O(\tau^{-1/2})$. Но тогда, согласно (3.6), переменная $J(\tau)$ также убывает при $\tau\to\infty$ как $\tau^{-1/2}$.

4. Траектория падающего тела. Исследуем движение выделенной точки O твердого тела. Из первой формулы (1.4) с учетом соотношений (1.2) и уравнения вращения (2.1) получим горизонтальную составляющую скорости точки O:

$$x^{\cdot}=-\frac{b\varphi^{\cdot\cdot}}{pt}+\frac{bf}{p}+\frac{bg}{pt}+s\left[\frac{1}{a_1}\sin\varphi\cos(\varphi+\alpha)-\frac{1}{a_2}\cos\varphi\sin(\varphi+\alpha)\right] \tag{4.1}$$

Рассмотрим типичную ситуацию, когда выполнено соотношение (2.7). При этом, согласно (2.10), $\varphi^{\cdot}(t)/t\to0$. Пусть, для определенности $\varphi(t)\to\to\pi/2$ при $t\to\infty$.

Докажем сначала, что интеграл

$$I=\int_{t_0}^{\infty}\frac{\varphi^{\cdot\cdot}(t)}{t}dt \tag{4.2}$$

сходится. Интегрируя по частям и применяя (2.10), а затем интегрируя еще раз по частям, приходим к равенству

$$I=-\frac{\varphi^{\cdot}(t_0)}{t_0}-\frac{\varphi(t_0)}{t_0^2}+2\int_{t_0}^{\infty}\frac{\varphi(t)}{t^3}dt$$

Так как функция $\varphi(t)$ ограничена при больших t, то последний интеграл, действительно, сходится.

Согласно (4.1), при $t\to\infty$ функция $x^{\cdot}+b\varphi^{\cdot\cdot}/(pt)$ стремится к конечному пределу $-s\sin\alpha/a_2$. Учитывая сходимость интеграла (4.2), получаем следующее асимптотическое представление:

$$x(t)=-(s\sin\alpha/a_2)t+o(t) \tag{4.3}$$

Ниже будет показано, что добавочное слагаемое $o(t)$ в общем случае неограничено. Пусть начальный толчок s равен нулю. Тогда соотношение (4.1) приобретает следующий вид:

$$x^{\cdot}=(b/p)\varphi^{\cdot\cdot}t^{-1}+\xi t^{-1}\sin\varphi-\eta t^{-1}\cos\varphi$$

Так как $\sin\varphi(t)\to1$, $\cos\varphi(t)\to0$ при $t\to+\infty$, то в этом случае $x(t)=\xi\ln t+o(\ln t)=o(t)$. Если, наконец, $\xi=0$, то $x(t)$ стремится к конечному пределу. Когда $\eta=0$, этот результат вытекает из сходимости интеграла (4.2). При $\eta\neq0$ следует воспользоваться асимптотическим представлением (2.4).

Из второй формулы (1.4) и соотношений (1.2) получаем вертикальную составляющую скорости точки O:

$$y^{\cdot}=-pt\left(\frac{\cos^2\varphi}{a_1}+\frac{\sin^2\varphi}{a_2}\right)+s\left[\frac{1}{a_1}\cos\varphi\cos(\varphi+\alpha)+\frac{1}{a_2}\sin\varphi\sin(\varphi+\alpha)\right] \tag{4.4}$$

Так как $\varphi(t)\to\pi/2$, то

$$y(t)=-pt^2/2a_2+o(t^2) \tag{4.5}$$

Из (4.3) и (4.5) вытекает, что асимптотически (при больших значениях t) траектория точки O является параболой (если, конечно, $s\sin\alpha\neq0$). Если $s=0$, а $\xi\neq0$, то траектория имеет следующий вид: $y={}^1/_2pa_2^{-1}\exp(2x/\xi)+o(\exp(2x/\xi))$. В этом случае тело падает по более крутой кривой.

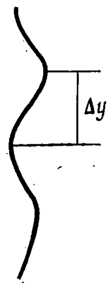
Из формул (4.1), (4.4) и асимптотических соотношений (2.13) можно получить более точную информацию о траектории точки O в случае, когда $s=\xi=\eta=0$. При больших значениях t эта кривая представляет собой вертикально расположенную «синусоиду» с неограниченно убывающей амплитудой, причем ее полупериод равен $\Delta y=\pi pa_2^{-1}k^{-1/2}$ (см. фиг. 2). Величина Δy равна высоте, на которую опускается точка O между двумя последовательными обращениями в нуль горизонтальной составляющей скорости $x^{\cdot}(t)$. Интересно отметить, что в этом случае координата $x(t)$ и среднее ускорение $y^{\cdot}(t)/t$ стремятся к конечным пределам, однако при $t\to\infty$ горизонтальная составляющая скорости $x^{\cdot}(t)$ и вертикальное ускорение $y^{\cdot\cdot}(t)$ неограничены.

5. Двоякоасимптотические движения. Положим $\vartheta=2\varphi$ и перепишем уравнение (2.1) при $s=\xi=\eta=0$:

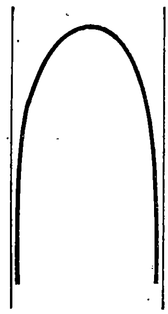
$$\vartheta^{\cdot\cdot}=kt^2\sin\vartheta \tag{5.1}$$

Это уравнение является уравнением Лагранжа с положительным лагранжианом $L={}^1/_2\vartheta^{\cdot2}+k(1-\cos\vartheta)t^2$. Равновесие $\vartheta(t)=0$ неустойчиво и, более того, для каждого $\vartheta_0\in(0,2\pi)$ и любого момента времени t_0 найдутся два решения $\vartheta(t)$, $\vartheta(t_0)=\vartheta_0$, неограниченно приближающиеся к неустойчивому равновесию с разных сторон. Этот факт выводится из результатов [7], посвященных анализу асимптотических движений вариационными методами: на указанных решениях достигает минимального значения действия по Гамильтону на интервале $t\in[t_0,\infty)$. Положим $\vartheta_0=\pi$ и $t_0=0$. Пусть $\vartheta_*(t)$ — решение с начальным условием $\vartheta_*(0)=\vartheta_0$, неограниченно приближающееся к точке $\vartheta=2\pi$ при $t\to+\infty$. Поскольку уравнение (5.1) инвариантно при подстановке $t\mapsto-t$, то это решение обладает следующими свойствами: 1) $\vartheta_*(t)+\vartheta_*(-t)=2\pi$ при всех t; 2) $\lim_{t\to-\infty}\vartheta_*(t)=0$, $\lim_{t\to+\infty}\vartheta_*(t)=2\pi$. Следовательно, решение $\vartheta_*(t)$ является двоякоасимптотическим. Имеется еще одно двоякоасимптотическое решение (5.1), обходящее окружность $\vartheta \bmod 2\pi$ в другом направлении.

Предположим, что в момент $t=0$ точка O занимает наивысшее поло-



Фиг. 2



Фиг. 3

жение при движении твердого тела. Тогда решению $\vartheta_*(t)$ отвечает движение тела, при котором 1) $x(t)$ — нечетная, а $y(t)$ — четная функции времени; 2) существует $\lim_{t\to\pm\infty}x(t)$; 3) $\lim_{t\to\pm\infty}y^{\cdot\cdot}(t)=-p/a_2$.

Траектория такого движения изображена на фиг. 3. При изменении t от $-\infty$ до $+\infty$ тело асимптотически совершает один полуоборот. В связи с этим результатом возникает интересная задача: существуют ли похожие движения, при которых тело совершает асимптотически любое заданное число полных полуоборотов?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чаплыгин С. А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости // Полн. собр. соч. Т. I. Л.: Изд-во АН СССР. 1933. С. 133–150.
2. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат. 1947. 928 с.
3. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука. 1967. 472 с.
4. *Кузнецов А. Н.* Дифференцируемые решения вырождающихся систем обыкновенных уравнений // Функциональный анализ и его приложения. 1972. Т. 6. Вып. 2. С. 41–51.
5. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1958. 408 с.
6. *Бурбаки Н.* Элементы математики. Кн. 4. Функции действительного переменного. М.: Наука, 1965. 424 с.
7. *Болотин С. В., Козлов В. В.* Об асимптотических решениях уравнений динамики // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1980. № 4. С. 84–89.

Москва

Поступила в редакцию
21.III.1988