

УДК 539.3.01

Е. И. ВОРОВИЧ, О. Д. ПРЯХИНА

ОБ ОДНОМ ЭФФЕКТИВНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ УПРУГОЙ БАЛКИ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Изучается задача об установившихся колебаниях упругой балки, контактирующей без трения с упругим пространством. Рассматривается широкий класс условий закрепления балки и произвольная поперечная нагрузка вида $P_0(x)\exp(-i\omega t)$. Получены эффективные приближенные формулы для расчета контактных давлений и прогибов балки для четырех типов условий на концах балки: шарнирное опирание, жесткая заделка, скользящая заделка и свободное опирание.

Дается численный анализ амплитудно-частотных характеристик задачи в зависимости от соотношения механических и геометрических параметров. При этом в качестве упругого основания выбрана полоса с жестко заземленной нижней границей. Изучены резонансные свойства упругой системы балка — полоса, установлена зависимость резонансных частот и их количество от упругих и геометрических характеристик системы. Исследуются пределы применимости гипотезы Винклера.

1. Основные уравнения. Построение решения. Указанная задача при условии полного контакта балки с основанием сводится в линейной постановке к системе дифференциального и интегрального уравнений в безразмерных амплитудных параметрах (множитель $\exp(-i\omega t)$ всюду опущен):

$$\gamma u^{(4)}(x) - RH\Omega^2 u(x) = P(x) - q(x) \quad (1.1)$$

$$\int_{-a}^a k(x-\xi) q(\xi) d\xi = u(x), \quad |x| \leq a \quad (1.2)$$

$$\gamma = H^3 (12M)^{-1}, \quad M = \mu E^{-1}, \quad R = \rho_0 \rho^{-1}$$

$$H = h_0 h^{-1}, \quad \Omega^2 = \rho \omega^2 h^2 \mu^{-1}, \quad a = bh^{-1}$$

где ρ_0 , h_0 , E — соответственно плотность, толщина и модуль Юнга балки, ρ , h , μ — плотность, толщина и модуль упругости среды; $u(x)$ — прогиб балки, a — полудлина балки, отнесенные к h ; $p(x) = p_0(x)\mu^{-1}$ — заданная нагрузка, $q(x)$ — нормальные напряжения, возникающие в области контакта, отнесенные к μ , ω — частота колебаний.

Ядро интегрального уравнения (1.2) имеет вид

$$k(x) = \int_{\sigma} K(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha$$

Контур σ выбирается в соответствии с принципом излучения [4]. Функция $K(\alpha)$ определяется типом среды, является аналитической, четной, вещественной при вещественных аргументах и имеет поведение на бесконечности вида $c|u|^{-1}$. $K(\alpha)$ допускает представление в виде бесконечного произведения по вещественным и комплексным нулям, полюсам [4]:

$$K(\alpha) = f(\alpha) \prod_{k=1}^{\infty} (\alpha^2 - z_k^2) (\alpha^2 - \bar{p}_k^2)^{-1}$$

Кроме того, рассматриваются следующие граничные условия на концах балки ($x = \pm a$) для дифференциального уравнения (1.1): а) концы

балки свободны: $u''=u'''=0$; б) жесткая заделка на концах: $u=u'=0$; в) шарнирное опирание: $u=u''=0$; г) скользящая заделка: $u'=u'''=0$.
Решение задачи ищем в виде

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \varphi_k(x) \quad (1.3)$$

При симметричном нагружении балки функции $\varphi_k(x)$, удовлетворяющие граничным условиям а) — г) берем соответственно в виде

а) $\varphi_1=1$, $\varphi_k = \operatorname{ch} \theta_k x / \operatorname{ch} \theta_k a + \cos \theta_k x / \cos \theta_k a$ ($k=2, 3, \dots$)

б) $\varphi_k = \operatorname{ch} \theta_k x / \operatorname{ch} \theta_k a - \cos \theta_k x / \cos \theta_k a$ ($k=1, 2, 3, \dots$)

в) $\varphi_k = \cos[\pi(2k-1)x/2a]$ ($k=1, 2, \dots$)

г) $\varphi_1=1$, $\varphi_k = \cos[\pi(k-1)x/a]$ ($k=2, 3, \dots$)

Для задач а), б) θ_k определяются из следующего трансцендентного уравнения

$$\operatorname{th} \theta_k a + \operatorname{tg} \theta_k a = 0$$

Решение интегрального уравнения (1.2) строится методом фиктивного поглощения [2] и для правой части уравнения $u(x) = e^{-i\eta x}$ получено в [3]. Для правой части (1.2) $u(x) = \cos \eta x$ это решение можно записать в виде

$$\begin{aligned} q(x, \eta) = & \frac{1}{2} K^{-1}(\eta) [e^{-i\eta x} \Phi_0(\eta, x) + e^{i\eta x} \Phi_0(-\eta, x)] + \\ & + [(B-i\eta)^{1/2} e^{-i\eta a} \Phi_1(\eta, x) + (B+i\eta)^{1/2} e^{i\eta a} \Phi_1(-\eta, x)] / 2\zeta_i - \\ & - \frac{i}{2} \sum_{k=1}^n C_k(\eta) \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j}{2p_j} [F_j(x_k) + F_j(-x_k)] \Phi(-p_j, x) \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\Phi_0(\eta, x) = \operatorname{erf}([(B+i\eta)(a-x)]^{1/2}) + \operatorname{erf}([(B-i\eta)(a-x)]^{1/2}) - 1$$

$$\Phi_1(\eta, x) = \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{2z_i} [\Phi(z_i, \eta, x) + \Phi(z_i, \eta, -x)] +$$

$$+ [\pi(a-x)]^{-1/2} \exp[-B(a-x)] + [\pi(a+x)]^{-1/2} \exp[-B(a+x)]$$

$$F_j(x_k) = \exp[ip_j(a-x_k)] (B-ip_j)^{-1/2}$$

$$\begin{aligned} \Phi(z, \eta, x) = & (B+iz)^{1/2} (z-\eta)^{-1} \exp[iz(a-x)] \operatorname{erf}([(B+iz)(a-x)]^{1/2}) - \\ & - (B-iz)^{1/2} (z+\eta)^{-1} \exp[-iz(a-x)] [1 - \operatorname{erf}([(B-iz)(a-x)]^{1/2})] \end{aligned}$$

Коэффициенты $C_k(\eta)$ ($k=1, \dots, n$) определяются из следующей линейной алгебраической системы уравнений

$$\sum_{k=1}^n C_k(\eta) [f_1(z_l, x_k) + f_1(z_l, -x_k)] = f_3(z_l, \eta) \quad (l=1, \dots, n)$$

$$f_1(z, x_k) = (B+iz)^{1/2} e^{iza} f(z, x_k) + (B-iz)^{1/2} e^{-iza} f(-z, -x_k)$$

$$\begin{aligned} f_2(z, \eta) = & \exp[-ia(z-\eta)] [ic(z-\eta)]^{-1} \times \\ & \times ([(B+iz)(B-i\eta)]^{1/2} \operatorname{erf}([2a(B+iz)]^{1/2}) + \\ & + (B^2+\eta^2)^{1/2} \{ \operatorname{erf}([2a(B-i\eta)]^{1/2}) - 1 \}) \end{aligned}$$

$$f_3(z, \eta) = f_2(z, \eta) + f_2(-z, -\eta) + f_2(-z, \eta) + f_2(z, -\eta)$$

$$f(z, x_k) = \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j}{2p_j} \exp[ip_j(a-x_k)] (p_j+z)^{-1} (B-ip_j)^{-1/2}$$

$$\alpha_j = \prod_{k=1}^n (p_j^2 - z_k^2) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (p_j^2 - p_k^2)^{-1}, \quad \beta_i = \prod_{k=1}^n (z_i^2 - p_k^2) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (z_i^2 - z_k^2)^{-1}$$

Здесь z_i, p_j — вещественные и комплексные нули, полюсы функции $K(\alpha)$, описывающей упругое основание и расположенные выше контура σ .

Учитывая (1.4), конкретные напряжения, возникающие в области контакта балки и упругого основания для задач а) — г) будут описываться следующими выражениями

$$q(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k q_k(x) \quad (1.5)$$

$$\text{а) } q_1 = q(x, 0), \quad q_k = q(x, \theta_k) / \cos \theta_k a + q(x, i\theta_k) / \operatorname{ch} \theta_k a \quad (k=2, 3, \dots)$$

$$\text{б) } q_k = q(x, i\theta_k) / \operatorname{ch} \theta_k a - q(x, \theta_k) / \cos \theta_k a$$

$$\text{в) } q_k = q(x, \pi(2k-1)/2a)$$

$$\text{г) } q_k = q(x, \pi(k-1)/a), \quad q_1 = q(x, 0) \quad (k=2, 3, \dots)$$

Подставляя (1.3), (1.5) в исходное уравнение (1.1), умножая обе части полученного соотношения на соответствующие функции $\varphi_n(x)$ и интегрируя от $-a$ до a получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов b_k

$$a_n b_n + \sum_{k=1}^{\infty} d_{nk} b_k = P_n \quad (n=1, 2, \dots) \quad (1.6)$$

$$d_{kn} = \int_{-a}^a q_k(x) \varphi_n(x) dx \quad (k, n=1, 2, \dots), \quad P_n = \int_{-a}^a P(x) \varphi_n(x) dx$$

$$a_n = (\theta_n^4 \gamma - RH \Omega^2) \Delta_n, \quad \Delta_n = \int_{-a}^a \varphi_n^2(x) dx$$

Элементы матрицы d_{kn} зависят от частоты Ω и вычисляются непосредственным интегрированием.

Для задач а) — г):

$$\text{а) } d_{11} = D(0, 0), \quad d_{n1} = D(0, i\theta_n) / \operatorname{ch} \theta_n a + D(0, \theta_n) / \cos \theta_n a$$

$$d_{1n} = D(i\theta_n, 0) / \operatorname{ch} \theta_n a + D(\theta_n, 0) / \cos \theta_n a \quad (n=2, 3, \dots)$$

$$d_{nk} = D(i\theta_k, i\theta_n) [\operatorname{ch} \theta_k a \operatorname{ch} \theta_n a]^{-1} +$$

$$+ D(i\theta_k, \theta_n) [\operatorname{ch} \theta_k a \cos \theta_n a]^{-1} +$$

$$+ D(\theta_k, i\theta_n) [\cos \theta_k a \operatorname{ch} \theta_n a]^{-1} +$$

$$+ D(\theta_k, \theta_n) [\cos \theta_k a \cos \theta_n a]^{-1} \quad (k, n=2, 3, \dots)$$

$$\text{б) } d_{nk} = D(i\theta_k, i\theta_n) [\operatorname{ch} \theta_k a \operatorname{ch} \theta_n a]^{-1} -$$

$$- D(i\theta_k, \theta_n) [\operatorname{ch} \theta_k a \cos \theta_n a]^{-1} -$$

$$- D(\theta_k, i\theta_n) [\cos \theta_k a \operatorname{ch} \theta_n a]^{-1} +$$

$$+ D(\theta_k, \theta_n) [\cos \theta_k a \cos \theta_n a]^{-1} \quad (k, n=1, 2, \dots)$$

$$\text{в) } d_{nk} = D(\theta_k, \theta_n), \quad \theta_k = \pi(2k-1)/2a \quad (k, n=1, 2, \dots)$$

$$\text{г) } d_{11} = D(0, 0), \quad d_{1n} = D(\theta_n, 0), \quad d_{n1} = D(0, \theta_n)$$

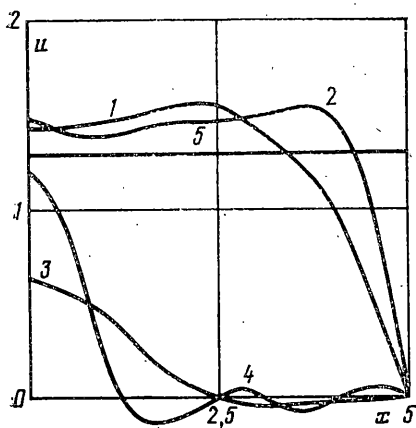
$$d_{nk} = D(\theta_k, \theta_n), \quad \theta_k = \pi(k-1)/a \quad (k, n=2, 3, \dots)$$

Функция $D(\eta, \theta)$ имеет следующий вид

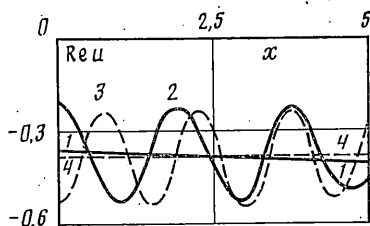
$$D(\eta, \theta) = [2iK(\eta)]^{-1} [Z(\eta, \theta) + Z(-\eta, \theta)] +$$

$$+ (2c)^{-1} (B - i\eta)^{1/2} e^{-i\alpha\eta} Z_1(\eta, \theta) + (2c)^{-1} (B + i\eta)^{1/2} e^{i\alpha\eta} Z_1(-\eta, \theta) -$$

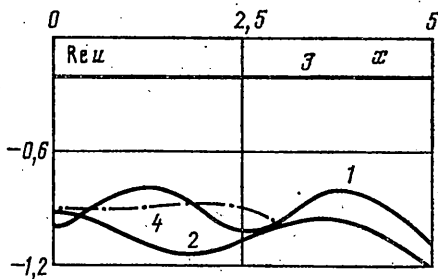
$$- \frac{i}{2} \sum_{k=1}^n C_k(\eta) \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j}{2p_j} [F_j(x_k) + F_j(-x_k)] Z_1(-p_j, \theta)$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

$$Z(\eta, \theta) = e^{i\alpha\eta t}(\eta, \theta) \{ \operatorname{erf}([2a(B+i\eta)]^{1/2}) - 1 \} + e^{-i\alpha\eta}(B+i\eta)^{1/2} S(\eta, \theta)$$

$$Z_1(\eta, \theta) = e^{i\alpha\theta} f(\theta) + e^{-i\alpha\theta} f(-\theta) - i \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{2z_i} Z_2(Z_i, -p_i, \theta)$$

$$Z_2(Z, \eta, \theta) = (B+iz)^{1/2} S_1(-\eta, z) [z(z, \theta) + e^{iaz} t(z, \theta)] - (B-iz)^{1/2} S_1(-\eta, -z) [Z(-z, \theta) - e^{iaz} t(z, \theta)]$$

$$S(\eta, \theta) = S_1(-\eta, \theta) f(\theta) + S_1(-\eta, -\theta) f(-\theta),$$

$$t(\eta, \theta) = S_1(\eta, \theta) + S_1(\eta, -\theta)$$

$$f(\theta) = (B+i\theta)^{-1/2} \operatorname{erf}([2a(B+i\eta)]^{1/2}),$$

$$S_1(\eta, \theta) = e^{i\alpha\theta} (\theta + \eta)^{-1}$$

Равнодействующая контактных давлений или реакция основания определяется формулой

$$Q = \int_{-a}^a q(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} b_k d_{1k} \quad (1.7)$$

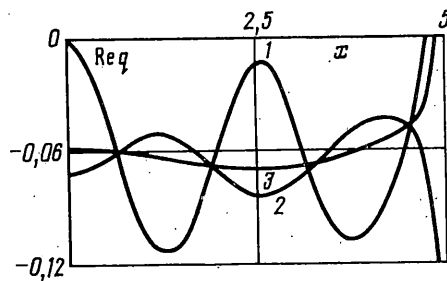
Для построения приближенного решения $q(x)$ и $u(x)$ в (1.3), (1.5), (1.6) достаточно взять всего несколько членов ряда, чтобы обеспечить заданную точность, поскольку коэффициенты b_k быстро стремятся к нулю с ростом параметра k .

2. Численный анализ решения. Для численного анализа в качестве упругого основания взята упругая полоса, нижняя грань которой жестко закреплена. Полоса занимает область $0 \leq y \leq h$, $-\infty < x < \infty$. Изучено влияние различных параметров на распределение амплитуд контактных напряжений $q(x)$ и прогибов балки $u(x)$.

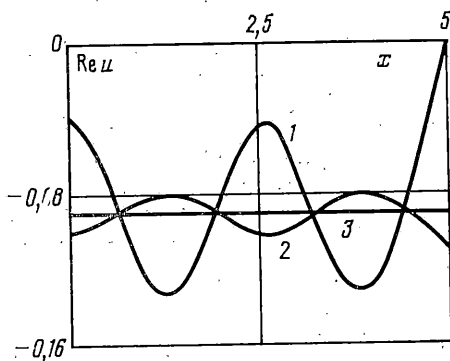
Для указанной среды функция $K(\alpha)$ имеет вид, приведенный в [3]. Для численной реализации задачи предварительно рассчитываются вещественные и комплексные нули и полюса $K(\alpha)$, затем строится аппроксимирующая функция

$$K_*(\alpha) = c(d^2 + B^2)^{-1/2} \prod_{k=1}^n (d^2 - z_k^2) (d^2 - p_k^2)$$

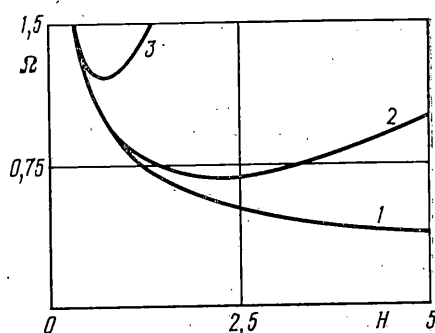
так, чтобы $|K(\alpha) - K_*(\alpha)| < \varepsilon$ для любого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$. Этим, согласно [1] обеспечивается и близость решения интегрального уравнения контактной задачи (1.2). Затем по формулам (1.3), (1.5), (1.7) производится расчет амплитудно-частотных характеристик задачи.



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

Фиг. 1 иллюстрирует распределение прогибов $u(x)$ для частоты $\Omega=1$ в зависимости от параметра жесткости $M=\mu/E$ (для случая в), когда на балку с шарнирным опиранием действует симметричная равномерно-распределенная нагрузка единичной амплитуды $p(x)=1$ (кривые 1, 2) и сосредоточенная нагрузка, приложенная в центре $p(x)=\delta(x)$ (кривые 3, 4). Кривые 1, 3 соответствуют $M=0,035$, кривые 2, 4 — $M=5,1$. Остальные параметры $R=3,5$, $H=0,5$, $\nu=0,1$, $a=5$.

Для сравнения кривая 5 — смещение абсолютно жесткого штампа ($p(x)=1$). На фиг. 2 приведено распределение $\text{Re } u(x)$ свободной балки (случай а) для $\Omega=2,6$. ($K(\alpha)$ имеет один вещественный полюс). При этом $p(x)=1$, $R=1$, $H=0,5$, $a=5$, $\nu=0,1$; 1 — $M=0,001$, 2 — $M=1$, 3 — $M=1000$, 4 — абсолютно жесткий штамп. Анализ показывает, что уменьшение жесткости балки E приводит к увеличению амплитуд $q(x)$ и $u(x)$ и их осцилляции и чем жестче фундамент, тем равномернее происходит распределение контактных давлений и прогибов.

Фиг. 3. Иллюстрирует зависимость функции $u(x)$ от параметров a , $H=h_0 h^{-1}$ для свободной стальной балки, лежащей на бетонном основании ($p(x)=1$; $\Omega=2,6$, $M=0,035$, $R=3,5$, $\nu=0,1$). Кривые 1, 2, 3 соответствуют $H=0,5$; 1, 2 ($a=5$). Кривая 4 соответствует $a=3$ ($H=0,5$). Очевидно, что уменьшение относительной толщины H ведет к росту амплитуды по модулю и увеличению осцилляции. Увеличение длины балки $2a$ также приводит к увеличению осцилляции.

На фиг. 4–5 показано влияние условий закрепления концов балки на распределение $q(x)$ и $u(x)$ для частоты $\Omega=2,6$. Кривая 1 — соответствует шарнирной заделке, 2 — концы балки свободны, 3 — абсолютно жесткий штамп ($M=0$). Остальные параметры $R=3,5$, $M=0,035$, $H=0,5$, $a=5$, $\nu=0,1$.

Заметим, что для слоя $\Omega \leq \pi/2$ функции $q(x)$ и $u(x)$ являются вещественными, а при $\Omega > \pi/2$ — комплексными.

Анализ результатов показывает, что для всех четырех условий закрепления концов балки а) — г) в диапазоне частот $0 \leq \Omega \leq \pi/2$ контактные давления пропорциональны прогибу балки для всех точек области контакта, исключая границу, но при этом коэффициент податливости основания $k=k(\Omega)=|q(x, \Omega)|/|u(x, \Omega)|$ есть функция частоты. Следовательно, в области низких частот $0 \leq \Omega \leq \pi/2$ для определения реакции основания можно использовать гипотезу Винклера.

3. Резонансы системы балка — слой. Особый интерес представляет изучение влияния упругости фундамента на возникновение изолированных резонансных частот. В [4] установлено, что при достаточно большой массе абсолютно жесткого фундамента, лежащего на упругом слое, в области до появления первой критической частоты возбуждения волн в слое $\Omega_* = \pi/2$, имеют место изолированные резонансы, на которых амплитуда вынужденных колебаний становится бесконечной. Оказывается, что резонансы и в случае упругого фундамента также имеют место в области $\Omega < \Omega_*$, начиная с некоторого соотношения толщин балки и слоя $H=h_0 h^{-1}$. Одна-

ко в отличие от абсолютно жесткого штампа количество резонансных частот зависит от длины балки $2a$ и параметра жесткости $M=\mu/E$.

Резонансы системы фундамент-основание определяются обращением в нуль определителя системы (1.6) $\Delta(\Omega, H) = \det \|a_t \delta_{ht} + d_{ht}\|_{h,t} = 0$ (δ_{ht} — символ Кронекера). На фиг. 6 приведены графики зависимости частот от параметра $H=h_0 h^{-1}$ для свободной балки ($R=3,5$, $a=5$, $\nu=0,1$, $M=0,035$).

Результаты численного анализа позволяют сделать следующие выводы. С увеличением длины балки $2a$ количество резонансных кривых растет. Уменьшение жесткости балки (увеличение параметра M) при фиксированной длине балки также приводит к увеличению числа резонансов. Сопоставление резонансных явлений при колебаниях упругой балки на упругой полосе и на основании Винклера показывает хорошее совпадение значений резонансных частот, имеющих место в области $0 \leq \Omega \leq \Omega_*$, поэтому при расчете резонансов удобно пользоваться приближенной формулой

$$\gamma \theta_k^4 - R H \Omega^2 + k(\Omega) = 0,$$

$$k(\Omega) = q(0, \Omega) / u(0, \Omega)$$

Для задач а), б) θ_k является корнями уравнения (1.4), для задачи в) $\theta_k = \pi(2k-1)/2a$, г) $\theta_k = \pi(k-1)/a$.

Авторы благодарят И. И. Воровича за внимание к работе и обсуждение результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
2. Бабешко В. А. Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 254 с.
3. Бабешко В. А., Прякина О. Д. Метод фиктивного поглощения в плоских динамических задачах. ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 3. С. 477–484.
4. Ворович Е. И., Прякина О. Д., Тукодова О. М. Динамические свойства упругой полуограниченной среды, контактирующей с упругим инерционным элементом. Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 2. С. 128–133.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
14.IV.1988