МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1989

УДК 531.36

С. И. МОРИНА, В. П. СЕРОВ, А. Г. ЧЕНЦОВ

К ВОПРОСУ О ПОСТРОЕНИИ ФУНКЦИИ БЕЛЛМАНА В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С КОМБИНИРОВАННЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Для собственно линейной управляемой системы рассматриваются задачи последовательного программного сближения и последовательного программного уклонения относительно заданной системы выпуклых множеств в фазовом пространстве. На управления наложены комбинированные (геометрические и интегральные) ограничения. Для функции Беллмана, соответствующей задаче оптимального управления, получены соотношения в терминах двойственных конструкций математического программирования. Приведен иллюстративный пример.

1. Введение. В статье рассматриваются задачи оптимального управления в собственно линейных [1] системах. Для задач последовательной оптимизации системы рассогласований построена модификация двойственных конструкций [2], аналогичная в идейном отношении выражениям [3]. Полученные соотношения для функции Беллмана (значение задачи оптимального управления) естественным образом связаны с принципом максимума Понтрягина [4], который в данном случае проявляется в соотношениях, подобных выражениям для гипотетического рассогласования правила экстремального прицеливания [3, 5]. Отметим, что двойственные конструкции, использующие элементы математического программирования (МП), применялись для целей решения задач оптимального управления также в [5–10]. В области решения задачи последовательного сближения необходимо отметить результаты [11], где наряду с общими утверждениями построены алгоритмы, использующие методы теории приближения функций.

2. Содержательная постановка задачи. Рассмотрим n-мерное арифметическое пространство $X=R^n$ и систему

$$\mathbf{x}^{\boldsymbol{\cdot}}(t)=A(t)\mathbf{x}(t)+\mathbf{f}^{(1)}(t,\mathbf{u}(t))+c(t)\mathbf{f}^{(2)}(t,\mathbf{v}(t)) \tag{2.1}$$

функционирующую в X на конечном промежутке времени $T=[t_0, \vartheta_0]$ $(t_0<\vartheta_0)$. Через $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{v}(t)$ и $c(t)$ обозначены текущие управляющие воздействия, $A(t)$ – $(n\times n)$-матрица, $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$ – заданные вектор-функции со значениями в X, c – скалярная функция. Кроме того, выделена некоторая часть координат, именуемых геометрическими; полагаем, что $Y=R^k$ есть пространство геометрических координат $(k\leqslant n)$. Не ограничивая общности, считаем, что геометрическими являются первые k координат соответствующего вектора $\mathbf{x}\in X$. Проектирование X на Y обозначим через π, так что $\forall \mathbf{x}\in X$ вектор $\pi[\mathbf{x}]\in Y$ имеет координаты $x_1,\ldots,x_k$ и получается из $\mathbf{x}$ отбрасыванием координат x_i с номерами $i>k$. В пространстве Y геометрических координат управляемого процесса выделены непустые, выпуклые, ограниченные и замкнутые множества $M_1,\ldots,M_m$, где m – некоторое натуральное число $(\forall i\in\overline{1,m}: M_i\subset Y)$. Кроме того, указаны моменты $\tau_0=t_0\in T$, $\tau_1\in T,\ldots,\tau_m=\vartheta_0\in T$, упорядоченные соотношением $\tau_{i-1}<\tau_i$ при $i\in\overline{1,m}$. В моменты τ_i определяются евклидовы расстояния ($\|\cdot\|$ – евклидова норма в Y):

$$d(\pi[\mathbf{x}(\tau_i)],M_i)=\min_{\mathbf{y}\in M_i}\|\pi[\mathbf{x}(\tau_i)]-\mathbf{y}\|, \tag{2.2}$$

Цель управления системой (2.1) состоит в «совокупной» минимизации рассогласований (2.2) либо, напротив, в их совокупной максимизации, т. е. в максимизации наименьшего из рассогласований (2.2). Для достижения этой цели в (2.1) допустимо использовать любые кусочно-постоянные и непрерывные справа управляющие функции

$$\mathbf{u}(\cdot)\colon T\to R^p,\quad \mathbf{v}(\cdot)\colon T\to R^q,\quad c(\cdot)\colon T\to[0,\infty) \tag{2.3}$$

(точка на месте соответствующего аргумента означает, что указанная функция рассматривается как целое, или как зависимость, получающаяся, когда аргумент пробегает область определения), удовлетворяющие ограничениям

$$\mathbf{u}(t)\in P,\qquad \mathbf{v}(t)\in Q,\qquad \int\limits_{t_0}^{\vartheta_0} c(t)\,dt\leqslant a$$

где $a=\mathrm{const}$, $a\geqslant 0$, P и Q — непустые ограниченные множества ($P\subset R^p$, $Q\subset R^q$). Таким образом, первые две управляющие функции в (2.3) стеснены лишь геометрическим ограничением и имеют смысл механических рулей, а функция $c(\cdot)$ характеризует энергетические ресурсы, способ приложения которых зависит от выбора $\mathbf{v}(\cdot)$.

Зафиксируем начальные условия системы (2.1), полагая $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$, где $\mathbf{x}_0\in X$ — заданный вектор. Через $\Phi(\cdot,\cdot)$ обозначаем фундаментальную матрицу-функцию решений однородной системы $x^{\cdot}=A(t)x$, полагая в дальнейшем функции $A\colon T\to\mathbf{N}$, $f^{(1)}\colon T\times P\to X$, $f^{(2)}\colon T\times Q\to X$ непрерывными; символ $\mathbf{N}$ обозначает множество всевозможных $(n\times n)$-матриц. Тогда согласно формуле Коши [2] решение (2.1), отвечающее управлениям (2.3) при начальных условиях $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$, определяется выражением

$$\varphi(t,\mathbf{u}(\cdot),\mathbf{v}(\cdot),c(\cdot))=\Phi(t,t_0)\mathbf{x}_0+\int\limits_{t_0}^{t}\Phi(t,\xi)\mathbf{f}^{(1)}(\xi,\mathbf{u}(\xi))\,d\xi+$$
$$+\int\limits_{t_0}^{t}c(\xi)\Phi(t,\xi)\mathbf{f}^{(2)}(\xi,\mathbf{v}(\xi))\,d\xi$$

Обозначим через S множество всех векторов $\alpha\in R^m$, для каждого из которых $\alpha_i\geqslant 0$ $(i\in\overline{1,m})$ и выполняется условие $\Sigma\alpha_i=1$ $(i=1,\ldots,m)$. Если $\alpha\in S$, то задачу

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i d(\pi[\varphi(\tau_i,\mathbf{u}(\cdot),\mathbf{v}(\cdot),c(\cdot))],M_i)\to\inf\nolimits_{(\mathbf{u}(\cdot),\mathbf{v}(\cdot),c(\cdot))} \tag{2.4}$$

именуем задачей взвешенной минимизации системы отклонений. Задачу

$$\min\nolimits_{i\in\overline{1,m}} d(\pi[\varphi(\tau_i,\mathbf{u}(\cdot),\mathbf{v}(\cdot),c(\cdot))],M_i)\to\sup\nolimits_{(\mathbf{u}(\cdot),\mathbf{v}(\cdot),c(\cdot))} \tag{2.5}$$

именуем задачей программного уклонения. Относительно критерия задачи (2.5) полезно иметь в виду следующее очевидное представление в терминах взвешенной суммы рассогласований:

$$\min\nolimits_{i\in\overline{1,m}} d(\pi[\varphi(\tau_i,\mathbf{u}(\cdot),\mathbf{v}(\cdot),c(\cdot))],M_i)=\min\nolimits_{\alpha\in S}\sum_{i=1}^{m}\alpha_i d(\pi[\varphi(\tau_i,\mathbf{u}(\cdot),$$
$$\mathbf{v}(\cdot),c(\cdot))],M_i) \tag{2.6}$$

Целью работы является определение значений задач (2.4), (2.5), причем в последнем случае используется представление (2.6).

3. Символика. Через $\mathbb{U}$ (через $\mathbb{V}$) обозначим множество всех кусочно-постоянных и непрерывных справа функций, действующих из T в P (из T в Q), а через $\mathbb{C}$ обозначим множество всех кусочно-постоянных и непрерывных справа функций $c(t)\colon t\to c(t)\colon T\to[0,\infty)$, для каждой из которых

$\int\limits_{t_0}^{\vartheta_0} c(t)\,dt \leqslant a$. Таким образом, $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{C}$ суть множества всех допустимых управлений в (2.3). Обозначим $\forall \alpha \in S$, $\mathbf{u}(\cdot) \in \mathbf{U}$, $\mathbf{v}(\cdot) \in \mathbf{V}$, $c(\cdot) \in \mathbf{C}$

$$\gamma_\alpha(\mathbf{u}(\cdot), \mathbf{v}(\cdot), c(\cdot)) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i d(\pi[\varphi(\tau_i, \mathbf{u}(\cdot), \mathbf{v}(\cdot), c(\cdot))], M_i)$$

При этом $\forall \alpha \in S$ величина

$$\gamma_\alpha^0 = \inf_{(\mathbf{u}(\cdot),\, \mathbf{v}(\cdot),\, c(\cdot)) \in \mathbf{U}\times\mathbf{V}\times\mathbf{C}} \gamma_\alpha(\mathbf{u}(\cdot),\ \mathbf{v}(\cdot),\ c(\cdot)) \tag{3.1}$$

является значением задачи (2.4). Величина

$$\varkappa^0 = \sup_{(\mathbf{u}(\cdot),\, \mathbf{v}(\cdot),\, c(\cdot)) \in \mathbf{U}\times\mathbf{V}\times\mathbf{C}} \min_{\alpha \in S} \gamma_\alpha(\mathbf{u}(\cdot),\ \mathbf{v}(\cdot),\ c(\cdot)) \tag{3.2}$$

есть значение задачи (2.5). Значения (3.1) и (3.2) определяют функцию Беллмана для соответствующей задачи, если рассматривать их зависимость от начальных условий.

Если E — непустое, выпуклое, ограниченное и замкнутое подмножество Y, то $\forall \mathbf{y} \in Y$ положим $\rho(\mathbf{y}|E) = \max_{\mathbf{z}\in E} \mathbf{y}'\mathbf{z}$, где штрих означает транспонирование. Через L обозначим замкнутый единичный евклидов шар в Y с центром в начале координат. Пусть Λ — множество всех отображений λ: $\overline{1, m} \to L$. Элементы Λ — «наборы» $(\lambda(1), \ldots, \lambda(m))$, удовлетворяющие условию: $\lambda(i) \in L$ при $i \in \overline{1, m}$. Кроме того, полагаем $\lambda'(i) = (\lambda(i))'$. В этих обозначениях $\forall \mathbf{u}(\cdot) \in \mathbf{U}$, $\mathbf{v}(\cdot)\,\mathbf{V}$, $c(\cdot) \in \mathbf{C}$:

$$\gamma_\alpha(\mathbf{u}(\cdot), \mathbf{v}(\cdot), c(\cdot)) = \max_{\lambda\in\Lambda} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (\lambda'(i)\pi[\varphi(\tau_i, \mathbf{u}(\cdot), \mathbf{v}(\cdot), c(\cdot))] - \rho(\lambda(i)\,|\,M_i)) \tag{3.3}$$

4. Частные случаи. Обсудим два частных случая системы (2.1). Первый из них соответствует управлению в условиях геометрических ограничений и реализуется при $a=0$. В этих условиях (2.1) эквивалентна системе

$$\mathbf{x}^\bullet(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}^{(1)}(t,\ \mathbf{u}(t)), \quad \mathbf{u}(t) \in P \tag{4.1}$$

Задача последовательного сближения для системы (4.1) допускает решение в терминах конечномерной задачи МП; соответствующее обоснование базируется на общей концепции двойственности [2—3] и сводится к построениям [10].

Рассмотрим другой частный случай, полагая значения функции $\mathbf{f}^{(1)}$ тождественно равными нулевому элементу X, а $\mathbf{f}^{(2)}(t,\ \mathbf{v}) = B(t)\mathbf{v}$ при $t \in T$ и $\mathbf{v} \in Q$. Здесь $B(t)$ — $(n \times q)$-матрица, непрерывно зависящая от времени. Кроме того, полагаем в этом пункте, что Q — евклидова сфера единичного радиуса с центром в начале координат $Q = \{\mathbf{v}\colon\ \mathbf{v} \in R^q,\ \|\mathbf{v}\| = 1\}$. В результате получаем из (2.1) систему

$$\mathbf{x}^\bullet(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + c(t)B(t)\mathbf{v}(t) \tag{4.2}$$

Рассмотрим систему

$$\mathbf{x}^\bullet(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{w}(t) \tag{4.3}$$

в которой кусочно-постоянное и непрерывное справа управление $\mathbf{w}(\cdot)$: $T \to R^q$ стеснено интегральным ограничением $\int\limits_{t_0}^{\vartheta_0} \|\mathbf{w}(t)\|_q\, dt \leqslant a$, где $\|\cdot\|_q$ — евклидова норма в R^q; через $\mathbf{W}$ обозначим множество всех управляющих функций $\mathbf{w}(\cdot)$ упомянутого типа. Тогда $\forall \mathbf{v}(\cdot) \in V$, $c(\cdot) \in \mathbf{C}$ функция времени $t \to c(t)\mathbf{v}(t)$: $T \to R^q$ является элементом $\mathbf{W}$. Пусть теперь $\mathbf{w}(\cdot) \in \mathbf{W}$.

Выберем $c^*(t)=\|\mathbf{w}^*(t)\|_q$ $(t\in T)$; в результате имеем включение $c^*(\cdot)\in\mathbf{C}$. Зафиксируем некоторый элемент $\mathbf{v}_0\in Q$. Если $t\in T$ таково, что $c^*(t)\neq 0$, то полагаем $\mathbf{v}^*(t)=\mathbf{w}^*(t)/c^*(t)$. Если же $t\in T$ таково, что $c^*(t)=0$, то полагаем $\mathbf{v}^*(t)=\mathbf{v}_0$. В результате получаем функцию $\mathbf{v}^*(\cdot)\in\mathbf{V}$. При этом пара $(c^*(\cdot), \mathbf{v}^*(\cdot))$ такова, что $\mathbf{w}^*(t)=c^*(t)\mathbf{v}^*(t)$, $t\in T$. Таким образом, системы (4.2) и (4.3) эквивалентны, т. е. второй частный случай есть задача управления в условиях интегральных ограничений (см. [2]).

5. Задача взвешенной минимизации. На протяжении этого пункта фиксируем $\alpha\in S$. Рассмотрим задачу (2.4), учитывая, что

$$\gamma_\alpha{}^0=\inf_{c(\cdot)\in\mathbf{C}}\inf_{(\mathbf{u}(\cdot),\,\mathbf{v}(\cdot))\in\mathbf{U}\times\mathbf{V}}\gamma_\alpha(\mathbf{u}(\cdot),\mathbf{v}(\cdot),c(\cdot)) \tag{5.1}$$

Для вычисления (5.1) введем обобщенные управления-меры. Следуя [5, 12], наделим $T\times P$ и $T\times Q$ σ-алгебрами B_P и B_Q борелевских подмножеств $T\times P$ и $T\times Q$ соответственно. Если положительная мера μ на $(T\times P, B_P)$ при всяком выборе непрерывной на T функции $t\to g(t)$: $T\to R^1$ обладает свойством

$$\int\limits_{T\times P} g(t)\,\mu(d(t,\mathbf{u}))=\int\limits_{t_0}^{\vartheta_0} g(t)\,dt \tag{5.2}$$

(в правой части — интеграл Римана), то именуем μ обобщенным программным управлением на $T\times P$. Аналогичным образом вводятся (с понятной заменой в (5.2) P на Q, B_P на B_Q) обобщенные программные управления на $T\times Q$. Обозначим множество всех обобщенных программных управлений на $T\times P$ (на $T\times Q$) через $\mathbf{R}$ (через $\mathbf{D}$). Вводя на $\mathbf{R}$ и на $\mathbf{D}$ слабую со звездой топологию, мы получаем [12] метризуемые компакты, и в эти компакты множества $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ вкладываются в виде всюду плотных подмножеств. Пусть

$$\forall\mu\in\mathbf{R},\quad \nu\in\mathbf{D},\quad c(\cdot)\in\mathbf{C},\quad t\in T$$

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\varphi}^*(t,\mu,\nu,c(\cdot))=\Phi(t,t_0)\mathbf{x}_0+\int\limits_{[t_0,t)\times P}\Phi(t,\xi)\mathbf{f}^{(1)}(\xi,\mathbf{u})\,\mu(d(\xi,\mathbf{u}))+\\+\int\limits_{[t_0,t)\times P} c(\xi)\,\Phi(t,\xi)\mathbf{f}^{(2)}(\xi,\mathbf{v})\,\nu(d(\xi,\mathbf{v}))\end{gathered} \tag{5.3}$$

(интегралы вычисляются покомпонентно). Обобщенные движения (5.3) (скользящие режимы) допускают сколь угодно точную аппроксимацию $(\mathbf{u}(\cdot), \mathbf{v}(\cdot), c(\cdot))$ — решениями в смысле метрики равномерной на T сходимости. Поэтому если $\mu\in\mathbf{R}$, $\nu\in\mathbf{D}$, $c(\cdot)\in\mathbf{C}$, то можно указать последовательность $(\mathbf{u}^{(j)}(\cdot);\ j=1;\ 2;\ldots)$ и последовательность $(\mathbf{v}^{(j)}(\cdot);\ j=1;\ 2;\ldots)$ такие, что $\boldsymbol{\varphi}(\cdot, \mathbf{u}^{(j)}(\cdot), \mathbf{v}^{(j)}(\cdot), c(\cdot)) \rightrightarrows \boldsymbol{\varphi}^*(\cdot, \mu, \nu, c(\cdot))$ (символ $\rightrightarrows$ означает здесь равномерную сходимость). Тогда для (5.1) имеем

$$\gamma_\alpha{}^0=\inf_{c(\cdot)\in\mathbf{C}}\min_{(\mu,\nu)\in\mathbf{R}\times\mathbf{D}}\gamma_\alpha{}^*(\mu,\nu,c(\cdot)) \tag{5.4}$$

где $\gamma_\alpha{}^*(\mu, \nu, c(\cdot))$ определяется при $\mu\in\mathbf{R}$, $\nu\in\mathbf{D}$, $c(\cdot)\in\mathbf{C}$ выражением

$$\gamma_\alpha{}^*(\mu,\nu,c(\cdot))=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i d(\pi[\boldsymbol{\varphi}^*(\tau_i,\mu,\nu,c(\cdot))],M_i) \tag{5.5}$$

Для (5.5) имеем подобное (3.3) двойственное представление, откуда [13, 14] с учетом (5.4) получаем равенство

$$\begin{gathered}\gamma_\alpha{}^0=\inf_{c(\cdot)\in\mathbf{C}}\max_{\lambda\in\Lambda}\min_{(\mu,\nu)\in\mathbf{R}\times\mathbf{D}}\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(\lambda'(i)\pi[\boldsymbol{\varphi}^*(\tau_i,\mu,\nu,c(\cdot))]-\\-\rho(\lambda(i)/M_i))\end{gathered} \tag{5.6}$$

При выводе (5.6) учли, что $\mathbf{R}$ и $\mathbf{D}$ — выпуклые компакты, а выражение под знаком внутреннего минимума в (5.6) есть функция, выпукло-вогнутая по аргументам (μ, ν) и λ соответственно. После подстановки (5.3) в (5.6) мы получим равенство

$$\gamma_\alpha{}^0 = \inf_{c(\cdot)\in\mathbf{C}} \max_{\lambda\in\Lambda} \sum_{j=1}^{m} \Big\{ \alpha_j (\lambda'(j)\pi[\Phi(\tau_j, t_0)\mathbf{x}_0] - \rho(\lambda(j)/M_j)) +$$
$$+ \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \min_{\mathbf{u}\in P} \Big(\sum_{i=j}^{m} \alpha_i \lambda'(i)\pi[\Phi(\tau_i, t)\mathbf{f}^{(1)}(t, \mathbf{u})] \Big) dt +$$
$$+ \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} c(t) \min_{\mathbf{v}\in Q} \Big(\sum_{i=j}^{m} \alpha_i \lambda'(i)\pi[\Phi(\tau_i, t)\mathbf{f}^{(2)}(t, \mathbf{v})] \Big) dt \Big\} \tag{5.7}$$

При выводе (5.7) использованы известные (см. [5]) операции, связанные с внесением операции min под знак интеграла, а также неотрицательность $c(\cdot)\in\mathbf{C}$. Поскольку $\mathbf{C}$ — выпуклое множество, а выражение под знаком максимума в (5.7) есть выпукло-вогнутая по $(c(\cdot), \lambda)$ функция, то операции inf и max в (5.7) можно поменять местами.

Теорема 5.1. Значение задачи (2.4) определяется равенством

$$\gamma_\alpha{}^0 = \max_{\lambda\in\Lambda} \Big[\sum_{j=1}^{m} \alpha_j (\lambda'(j)\pi[\Phi(\tau_j, t_0)\mathbf{x}_0] - \rho(\lambda(j) \mid M_j)) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{m} \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \min_{\mathbf{u}\in P} \Big(\sum_{i=j}^{m} \alpha_i \lambda'(i)\pi[\Phi(\tau_i, t)\mathbf{f}^{(1)}(t, \mathbf{u})] \Big) dt + a \min_{s\in\overline{1, m}} \inf \times$$
$$\times \Big\{ 0; \min_{(t, \mathbf{v})\in[\tau_{s-1}, \tau_s]\times Q} \Big(\sum_{i=s}^{m} \alpha_i \lambda'(i)\pi[\Phi(\tau_i, t)\mathbf{f}^{(2)}(t, \mathbf{v})] \Big) \Big\} \Big] \tag{5.8}$$

Обоснование сводится к операциям с дельта-функциями, поскольку эффект действия $c(\cdot)\in\mathbf{C}$ в интеграле под знаком максимума в (5.7) может быть сделан сколь угодно близким к эффекту, определяемому дельта-функциями. Выражение (5.8) определяет функцию Беллмана в терминах значения конечномерной задачи МП.

6. Задача программного уклонения. В этом пункте мы рассмотрим решение задачи (2.5), а точнее, построим конечномерную двойственную задачу МП, значение которой совпадает с (3.2). Воспользуемся представлением, подобным (3.3), для нахождения (3.2). С учетом теорем о минимаксе [13, 14] получаем

$$\varkappa^0 = \sup_{c(\cdot)\in\mathbf{C}} \max_{(\mu, \nu)\in\mathbf{R}\times\mathbf{D}} \max_{\lambda\in\Lambda} \min_{\alpha\in S} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (\lambda'(i)\pi[\varphi^*(\tau_i, \mu, \nu, c(\cdot))] - \rho(\lambda(i)/M_i)) =$$
$$= \max_{\lambda\in\Lambda} \sup_{c(\cdot)\in\mathbf{C}} \max_{(\mu, \nu)\in\mathbf{R}\times\mathbf{D}} \min_{\alpha\in S} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (\lambda'(i)\pi[\varphi^*(\tau_i, \mu, \nu, c(\cdot))] - \rho(\lambda(i)/M_i)) \tag{6.1}$$

Поскольку выражение под знаком минимума в (6.1) является функцией, выпукло-вогнутой по аргументам α и (μ, ν) соответственно, то, применяя снова теорему о минимаксе, получаем равенство

$$\varkappa^0 = \max_{\lambda\in\Lambda} \sup_{c(\cdot)\in\mathbf{C}} \min_{\alpha\in S} \max_{(\mu,\nu)\in\mathbf{R}\times\mathbf{D}} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (\lambda'(i)\pi[\varphi^*(\tau_i, \mu, \nu, c(\cdot))] -$$
$$-\rho(\lambda(i)/M_i)) \tag{6.2}$$

После подстановки (5.3) в (6.2) получаем равенство

$$\varkappa^0 = \max\nolimits_{\lambda\in\Lambda} \sup\nolimits_{c(\cdot)\in C} \min\nolimits_{\alpha\in S} \sum_{j=1}^{m} \Big\{ \alpha_j (\lambda'(i)\pi[\Phi(\tau_j, t_0)x_0] - \rho(\lambda(j)/M_j)) +$$

$$+ \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \max\nolimits_{u\in P} \Big(\sum_{i=j}^{m} \alpha_i \lambda'(i)\pi[\Phi(\tau_i, t) f^{(1)}(t, u)] \Big) dt +$$

$$+ \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} c(t) \max\nolimits_{v\in Q} \Big(\sum_{i=j}^{m} \alpha_i \lambda'(i)\pi[\Phi(\tau_i, t) f^{(2)}(t, v)] \Big) dt \Big\} \tag{6.3}$$

Выражение под знаком минимума в (6.3) является выпукло-вогнутой по $(\alpha, c(\cdot))$ функцией. Используя теорему о минимаксе, получаем следующее основное утверждение.

Теорема 6.1. Значение задачи (2.5) определяется равенством

$$\varkappa^0 = \max_{\lambda\in\Lambda} \min_{\alpha\in S} \Big[\sum_{j=1}^{m} \alpha_j (\lambda'(j)\pi[\Phi(\tau_j, t_0)x_0] - \rho(\lambda(j)/M_j)) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \max\nolimits_{u\in P} \Big(\sum_{i=j}^{m} \alpha_i \lambda'(i)\pi[\Phi(\tau_i, t) f^{(1)}(t, u)] \Big) dt +$$

$$+ a \max\nolimits_{s\in\overline{1, m}} \sup \Big\{0; \max\nolimits_{(t, v)\in[\tau_{s-1}, \tau_s]\times Q} \Big(\sum_{i=s}^{m} \alpha_i \lambda'(i)\pi[\Phi(\tau_i, t) f^{(2)}(t, v)] \Big\} \Big] \tag{6.4}$$

7. Управление материальной точкой. Конкретизируем соотношения (5.8) и (6.4) для задачи управления материальной точкой на плоскости. Будем рассматривать задачу управления системой вида (4.2)–(4.3): $x_1^{\cdot}(t) = x_3(t)$, $x_2^{\cdot}(t) = x_4(t)$, $x_3^{\cdot}(t) = c(t)v_1(t)$, $x_4^{\cdot}(t) = c(t)v_2(t)$.

В качестве X используем R^4 (так что $n=4$), а в качестве Y — плоскость R^2 (так что $k=2$). Множество Q полагаем, как и в п. 4, совпадающим с единичной сферой, так что $Q = \{v: v\in R^2, \|v\|=1\}$ — окружность с центром в начале координат. Управление $v(\cdot)$ удовлетворяет ограничению $v(t)\in Q$ при $t\in T$, а управление $c(\cdot)$ удовлетворяет ограничению $c(\cdot)\in C$. Множества M_i мы полагаем здесь одноточечными. Именно, пусть $\forall i\in\overline{1, m}$: $y_i\in Y=R^2$. Тогда полагаем, что $\forall i\in\overline{1, m}$: $M_i = \{y_i\}$. Кроме того, полагаем, что $\forall t\in T$ вектор $z^0[t]\in Y$ имеет вид

$$z^0[t] = \begin{bmatrix} x_{01} + (t - t_0)x_{03} \\ x_{02} + (t - t_0)x_{04} \end{bmatrix}$$

Задача (2.4) в данном конкретном случае имеет вид

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \|\pi[\varphi(\tau_i, v(\cdot), c(\cdot))] - y_i\| \to \inf\nolimits_{(v(\cdot), c(\cdot))}$$

(здесь и ниже мы опускаем аргумент $u(\cdot)$, поскольку рассматривается задача для системы (4.3) с энергетическим ограничением на управление). Отметим, что вектор $v(t)$ здесь определяет направление прилагаемой силы; подробнее связь систем (4.2) и (4.3) была рассмотрена выше. Выражение (5.8) имеет вид

$$\gamma_\alpha^0 = \max\nolimits_{\lambda\in\Lambda} \Big\{ \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \lambda'(j)(z^0[\tau_j] - y_j) -$$

$$- a \max\nolimits_{s\in\overline{1, m}} \max\nolimits_{t\in[\tau_{s-1}, \tau_s]} \Big\| \sum_{i=s}^{m} \alpha_i (\tau_i - t)\lambda(i) \Big\| \Big\} \tag{7.1}$$

y_1	y_2	γ_α^0	λ_1^*	λ_2^*
(−1; 1)	(0; 0)	0,914	(0,707; −0,707)	(−0,354; 0,354)
(−1; 1)	(−0,5; 1,5)	0,660	(0,981; −0,195)	(−0,471; −0,168)
(0; 2)	(0,5; −2)	3,040	(0,098; −0,995)	(−0,195; 0,981)

Задача (2.5) имеет здесь вид

$$\min_{i\in\overline{1,m}} \| \pi [\varphi (\tau_i, \mathbf{v}(\cdot), c(\cdot))] - \mathbf{y}_i \| \to \sup_{(\mathbf{v}(\cdot),\, c(\cdot))}$$

Из (6.4) получаем двойственное представление функции Беллмана, именно

$$\varkappa^0 = \max_{\lambda\in\Lambda} \min_{\alpha\in S} \Big\{ \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \lambda' (j)(\mathbf{z}^0[\tau_j] - \mathbf{y}_j) +$$

$$+ a \max_{s\in\overline{1,m}} \max_{t\in[\tau_{s-1},\, \tau_s]} \Big\| \sum_{i=s}^{m} \alpha_i (\tau_i - t) \lambda (i) \Big\| \Big\} \tag{7.2}$$

Из (7.1) и (7.2) видно, что вычисление значений функции Беллмана сводится к решению достаточно сложной негладкой задачи МП, причем во втором случае эта задача является игровой. Кроме того, следует отметить, что, определяя (7.1) и (7.2), мы интересуемся значением задачи, совершенно игнорируя вопрос о конкретном построении оптимального управления. Более того, оптимального управления в классе $\mathbf{V}\times\mathbf{C}$ может просто не существовать, поскольку для точного достижения (7.1), (7.2) на траекториях нашей управляемой системы требуются, вообще говоря, импульсные управления, в то время как мы работаем, по существу, лишь в классе аппроксимаций. Тем не менее в целом ряде задач априорное определение функции Беллмана представляет и самостоятельный интерес. Так, например, это может оказаться важным с точки зрения обоснованного выбора ресурса a, $a\geqslant 0$. В других случаях определение величин (7.1), (7.2) может быть использовано для выбора рекомендаций по размещению точек y_i; возможны и другие приложения.

Вычислим величину (7.1) для случая $m=2$ при конкретных значениях параметров системы. Пусть $t_0=\tau_0=0$, $\tau_1=1$, $\tau_2=2$, $a=\alpha_1=\alpha_2=1$. Тогда (см. (7.1)):

$$\gamma_\alpha{}^0 = \max_{\|\lambda_1\|\leqslant 1, \|\lambda_2\|\leqslant 1} \Big[\sum_{j=1}^{2} \lambda_j (\mathbf{z}^0[\tau_j] - \mathbf{y}_j) - \max \{ \max_{t\in[0,1]} \| (1-t)\lambda_1 +$$

$$+ (2-t)\lambda_2 \|;\ \|\lambda_2\| \} \Big]$$

$$\lambda_j \in R^2, \quad j\in\overline{1,2}$$

Нетрудно показать, что $\max_{t\in[0,1]}\|\mathbf{a}t+\mathbf{b}\| = \max\{\|\mathbf{b}\|;\ \|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|\}$, поэтому

$$\gamma_\alpha{}^0 = \max_{\|\lambda_1\|\leqslant 1, \|\lambda_2\|\leqslant 1} \Big[\sum_{j=1}^{2} \lambda_j (\mathbf{z}^0[\tau_j] - \mathbf{y}_j) - \max \{ \|\lambda_1 + 2\lambda_2\|;\ \|\lambda_2\| \} \Big] \tag{7.3}$$

Пусть $\mathbf{x}_0=0$, тогда $\mathbf{z}^0[\tau_j]=0$, $j\in\overline{1,2}$. В приведенной ниже таблице представлены результаты расчетов при различных значениях $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$. Здесь λ_1^*, λ_2^* – векторы, на которых достигается максимум в (7.3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красовский Н. Н.* Минимаксное поглощение в игре сближения // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 6. С. 945–951.
2. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
3. *Красовский Н. Н.* Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.

4. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976. 392 с.
5. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
6. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Качественная теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1971. 507 с.
7. *Пшеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980. 319 с.
8. *Куржанский А. Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
9. *Куржанский А. Б., Осипов Ю. С.* К задаче об управлении с ограниченными фазовыми координатами / ПММ. 1968. Т. 32. Вып. 2. С. 194–202.
10. *Бердышев Ю. И., Ченцов А. Г.* Оптимизация взвешенного критерия в одной задаче управления // Кибернетика. 1986. № 1. С. 59–64.
11. *Бердышев В. И., Кондратьев В. П.* О наилучшей траектории, соединяющей упорядоченный набор множеств. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1986. 85 с.
12. *Субботин А. И., Ченцов А. Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 287 с.
13. *Фань Цзи.* Теоремы о минимаксе // Бесконечные антагонистические игры. М.: Физматгиз, 1963. С. 31–39.
14. *Оуэн Г.* Теория игр. М.: Мир, 1971. 230 с.

Свердловск

Поступила в редакцию
5.I.1988