

УДК 539.3

И. Б. ПЕТРОВ, А. Г. ТОРМАСОВ, А. С. ХОЛОДОВ

## О ЧИСЛЕННОМ ИЗУЧЕНИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ В ДЕФОРМИРУЕМЫХ СРЕДАХ МНОГОСЛОЙНОЙ СТРУКТУРЫ

Рассматриваются одномерные и двумерные нестационарные задачи о действии ударных и других нестационарных нагрузок на деформируемые твердые среды многослойной структуры, изучаются волновые и откольные эффекты. Для описания поведения среды используются модели линейно упругого и упругоидеальнопластического тела. Разрушение учитывается в рамках модели, предложенной в [1] (реализацию этого подхода см. в [2, 3] и др.). На поверхностях раздела слоев рассматриваются условия трех типов: полного слияния, свободного скольжения, отслоения.

Для численного решения таких задач наиболее целесообразно применять монотонные схемы с минимальной аппроксимационной вязкостью (см. [4, 5], либо гибридные схемы [6, 7]). В публикуемой работе используется сеточно-характеристическая схема [5, 8] (численные решения некоторых задач, полученные по этой схеме, можно найти также в [3, 9-12]).

Аналитические методы решения задач о распространении волн в слоистых средах рассматривались, например, в работах [13-15].

В [16-17] задача о распространении волн в слоистых структурах численно рассматривалась в одномерном приближении, в [18] численно решалась задача о высокоскоростном соударении двух тел в газодинамической постановке. Двумерные задачи о распространении волн в упругих средах рассматривались в [19], о соударении вязкоупругих тел — в [20], упругопластических в [21].

1. Используемая в расчетах явная разностная сеточно-характеристическая схема, полученная для численного решения систем уравнений гиперболического типа, имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{ml}^{n+1} = & \mathbf{u}_{ml}^n + \tau \mathbf{f}_{ml}^n + \tau [(\Omega_1^{-1} \Lambda_1 + \Omega_1)_{ml}^n (\mathbf{u}_{m-1,l}^n - \mathbf{u}_{ml}^n) / h_1 - \\ & - (\Omega_1^{-1} \Lambda_1 - \Omega_1)_{ml}^n (\mathbf{u}_{m+1,l}^n - \mathbf{u}_{ml}^n) / h_1] + \tau [(\Omega_2^{-1} \Lambda_2 + \Omega_2)_{ml}^n (\mathbf{u}_{m,l-1}^n - \mathbf{u}_{ml}^n) / h_2 - \\ & - (\Omega_2^{-1} \Lambda_2 - \Omega_2)_{ml}^n (\mathbf{u}_{m,l+1}^n - \mathbf{u}_{ml}^n) / h_2] \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $\Lambda_k^\pm$ ,  $\Omega_k$ ,  $\Omega_k^{-1}$  — матрицы, вид которых приведен в [8],  $\mathbf{f}$  — вектор — столбец правых частей,  $\mathbf{u} = \{v_1, v_2, \sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, A_p\}$  вектор — столбец искомых функций,  $v_1, v_2$  — компоненты вектора скорости,  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений,  $A_p$  — пластическая работа,  $\tau$  и  $h_k$  — шаги по времени и координатам.

Поведение среды задается с помощью тензора  $Q_{ijkl} = \lambda \delta_{ji} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) - \mu q^{-2} H(F) s_{ij} s_{ij}$ , где  $\lambda, \mu$  — упругие постоянные Ламэ,  $q$  — предел текучести на сдвиг,  $s_{ij}$  — компоненты девiatorа тензора напряжений,  $\delta_{ij}$  — символ Кронеккера,  $F = s_{ij} s_{ij} - 2q^2$  — функция текучести,  $H$  — функция Хэвисайда и уравнения состояния

$$\rho = \rho_0 \exp(-\sigma_{hh}/3K), \quad K = \lambda + 2\mu/3$$

являющегося следствием уравнения неразрывности  $\epsilon_{hh} = -\ln(\rho/\rho_0)$  и определяющих соотношений для упругоидеальнопластической среды (модель Прандтля — Рейсса), записанных в виде:

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{hh} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} - \mu q^{-2} s_{ij} (s_{kl} \epsilon_{kl})$$

Число граничных условий для гиперболической системы уравнений определяется (см., например, [22]) числом отрицательных собственных

значений матрицы  $A_2$ , на верхней границе (соответственно положительных собственных значений той же матрицы на нижней границе) в случае представления исходной системы уравнений в виде (вид матрицы приведен в [9]):

$$\mathbf{u}_t + A_1 \mathbf{u}_{x_1} + A_2 \mathbf{u}_{x_2} = f \quad (1.2)$$

В исследуемых задачах на верхней границе имеет место  $\lambda_7^2 < \lambda_6^2 < 0$ , на нижней  $\lambda_1^2 > \lambda_2^2 > 0$  ( $\lambda_j^2$ ;  $k=1, 2$ ;  $j=1, 7$  — собственные числа матрицы  $A_2$  и, следовательно, на каждой границе требуется постановка двух граничных условий, другие же соотношения являются разностной аппроксимацией условий совместности вдоль линий пересечения характеристических поверхностей системы (1.2) и координатной плоскости (см. [9]):

$$\begin{aligned} (\omega_i^2)_{mi}^n \mathbf{u}_{mi}^{n+1} = B_i^2 - (\omega_i^2)_{mi}^n (\mathbf{u}_{mi}^n + \tau \mathbf{f}_{mi}^n) + \\ + \mathbf{b}_{1mi}^n \pm \tau h_2^{-1} (\lambda_i^2)_{mi}^n (\omega_i^2)_{mi}^n (\mathbf{u}_{mi, l \neq 1}^n + \mathbf{u}_{mi}^n) \end{aligned} \quad (1.3)$$

$\omega_i^2$  — линейно-независимые левые собственные векторы матрицы  $A_2$ ;  $i=3, \dots, 7$  на нижней,  $i=1, \dots, 5$  — на верхней границе. Соответственно, для аппроксимации уравнений на контактной границе, расположенной в плоскости  $\eta = \text{const}$  ( $\eta_1, \eta_2$  — лагранжевы координаты), необходимо задать четыре условия и соотношения (1.3), записанные для нижней и верхней частей контактной границы:

$$\begin{aligned} (\omega_i^2)_{mi}^n |_{UL} \mathbf{u}_{mi}^{n+1} = B_i^2 |_{UL} (\omega_i^2)_{mi}^n (\mathbf{u}_{mi}^n + \tau \mathbf{f}_{mi}^n) |_{UL} + \\ + \mathbf{b}_{1mi}^n |_{UL} \pm \tau h_2^{-1} (\lambda_i^2)_{mi}^n |_{UL} (\omega_i^2)_{mi}^n |_{UL} (\mathbf{u}_{mi, l \neq 1}^n - \mathbf{u}_{mi}^n) \end{aligned} \quad (1.4)$$

где нижние индексы  $U$  и  $L$  после вертикальной черты относятся к верхней и нижней частям контактной границы (соответственно, при  $i=1, \dots, 5$  и  $i=3, \dots, 7$ ).

В скалярной форме (1.4) имеют вид:

$$\begin{aligned} \omega_{11}^2 |_U (v_1 - c_1) |_U + (v_2 - c_2) |_U + \omega_{14}^2 |_U (\sigma_{12} - c_4) |_U + \\ + \omega_{15}^2 (\sigma_{22} - c_5) |_U + \omega_{13}^2 |_U (\sigma_{11} - c_3) |_U = 0 \\ (v_1 - c_1) |_U + \omega_{11}^2 |_U (v_2 - c_2) |_U + \omega_{24}^2 |_U (\sigma_{12} - c_4) |_U + \\ + \omega_{11}^2 |_U (\sigma_{11} - c_3) |_U + \omega_{25}^2 |_U (\sigma_{22} - c_5) |_U = 0 \\ (\sigma_{11} - c_3) |_U + \omega_{34}^2 |_U (\sigma_{12} - c_4) |_U + \omega_{35}^2 (\sigma_{22} - c_5) = 0 \\ (\sigma_{33} - c_6) |_U + \omega_{44}^2 |_U (\sigma_{12} - c_4) |_U + \omega_{45}^2 |_L (\sigma_{22} - c_5) = 0 \\ (A_p - c_7) |_U + \omega_{54}^2 |_U (\sigma_{12} - c_4) |_U + \omega_{55}^2 |_U (\sigma_{22} - c_5) = 0 \\ \omega_{11}^2 |_L (v_1 - c_1) |_L + (v_2 - c_2) |_L - \omega_{14}^2 |_L (\sigma_{12} - c_4) |_L - \\ - \omega_{13}^2 |_L (\sigma_{22} - c_5) - \omega_{15}^2 |_L (\sigma_{22} - c_5) |_L = 0 \\ (v_1 - c_1) |_L + \omega_{22}^2 |_L (v_2 - c_2) |_L - \omega_{24}^2 |_L (\sigma_{12} - c_4) |_L - \omega_{23}^3 |_L (\sigma_{11} - c_3) |_L - \\ - \omega_{25}^2 |_L (\sigma_{22} - c_5) |_L = 0 \\ (\sigma_{11} - c_3) |_L + \omega_{34}^2 |_L (\sigma_{12} - c_4) |_L + \omega_{35}^2 |_L (\sigma_{22} - c_5) |_L = 0 \\ (\sigma_{33} - c_6) |_L + \omega_{44}^2 |_L (\sigma_{12} - c_4) |_L + \omega_{45}^2 |_L (\sigma_{22} - c_5) = 0 \\ (A_p - c_7) |_L + \omega_{54}^2 |_L (\sigma_{12} - c_4) |_L + \omega_{55}^2 |_L (\sigma_{22} - c_5) |_L = 0 \end{aligned}$$

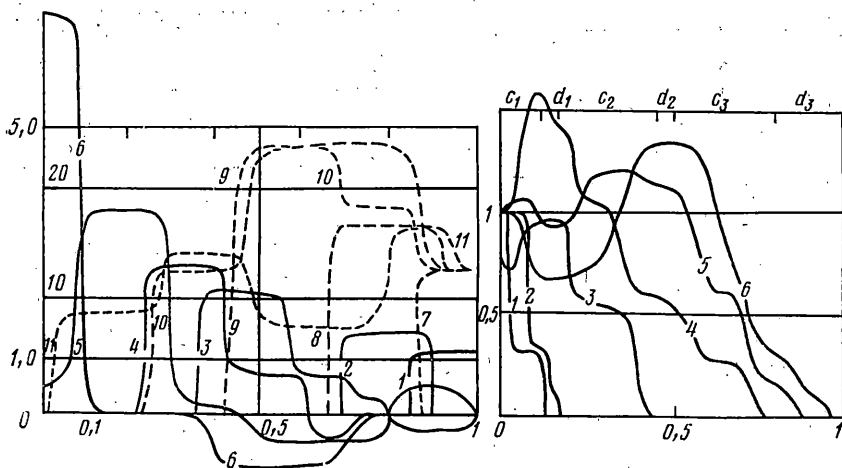
Условия на контактных границах в случаях полного прилипания, свободного скольжения и отслоения контактирующих поверхностей имеют соответственно вид ( $v_N$  и  $v_\tau$  — нормальная и тангенциальная к контактной поверхности компоненты вектора скорости):

$$p|_U = p|_L, \tau|_U = \tau|_L, v_N|_U = v_N|_L, v_\tau|_U = v_\tau|_L \quad (1.5)$$

$$p|_U = p|_L, \tau|_U = \tau|_L = 0, v_N|_U = v_N|_L \quad (1.6)$$

$$p|_U = p|_L = \tau|_U = \tau|_L = 0 \quad (1.7)$$

В расчетах использовалась лагранжева система координат, переход к которой от эйлеровой для рассматриваемых уравнений описан в [9]. Линейные размеры отнесены к некоторой характерной длине  $L_*$ , плотность —



Фиг. 1.

к начальной плотности материала  $\rho_*$ , компоненты тензора напряжений — к величине предела текучести на сдвиг  $\sigma_* = q$ , остальные безразмерные величины определяются через соответствующие размерные, помеченные градомом:  $v_j = (\sigma_*/\rho_*)^{-1/2} v_j^\circ$  ( $j=1, 2$ ),  $t = t^\circ L^{-1} (\sigma_*/\rho_*)^{1/2}$ ,  $\lambda = \lambda^\circ / \sigma_*$ ,  $\mu = \mu^\circ / \sigma_*$ .

2. Вначале рассмотрим некоторые одномерные расчеты, представляющие не только методический, но и практический интерес, для случая импульсного нагружения многослойных упругих конструкций. Подобные вопросы рассматривались, например, в [23—24], где получены, в частности соотношения для расчета амплитуды упругой волны, проходящей через систему упругих слоев. При этом получалось:

$$\sigma_{m+1} = \sigma_1 2^m \left[ \prod_{i=1}^m (1 + R_i/R_{i+1}) \right]^{-1} \quad (2.1)$$

$$u_{m+1} = u_1 2^m \left[ \prod_{i=1}^m (1 + R_{i+1}/R_i) \right]^{-1}$$

где  $u_1$ ,  $\sigma_1$ ,  $u_{m+1}$ ,  $\sigma_{m+1}$  — соответственно скорость смещения и напряжения головной волны в первом и  $(m+1)$ -ом слоях,  $R_i = \rho_i c_i$  — акустический импеданс  $i$ -го слоя.

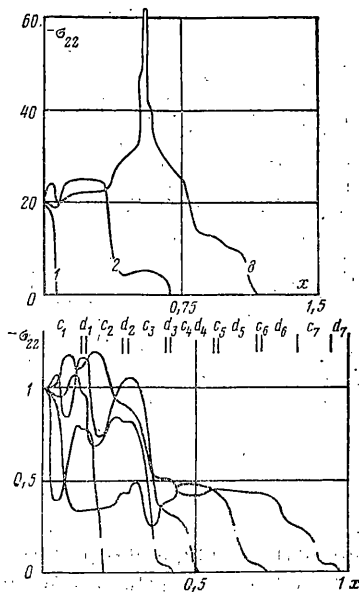
Из (2.1) видно, что при увеличении импедансов упругих слоев напряжение в волне будет увеличиваться, скорость убывать, при уменьшении же импедансов ситуация будет обратной; при этом отношения амплитуды проходящей и отраженной волн к амплитуде падающей, соответственно, равны (для  $i$ -ой границы):

$$\eta_i^{\text{пр}} = 2(1 + R_i/R_{i+1})^{-1} \quad (2.2)$$

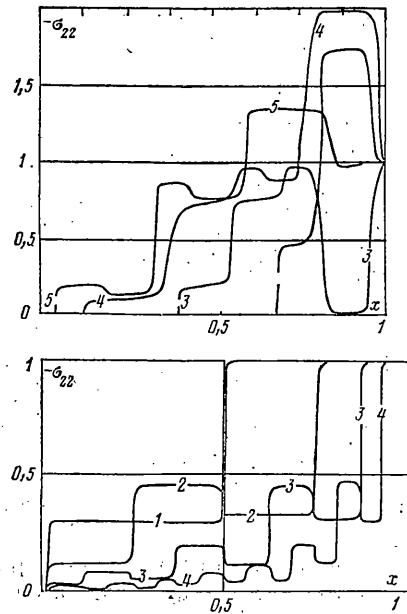
$$\eta_i^{\text{от}} = (1 - R_i/R_{i+1})(1 + R_i/R_{i+1})^{-1}$$

Такая картина имеет место в расчете, приведенном на фиг. 1, а, где показано прохождение прямоугольного импульса сжатия через систему из пяти слоев с последовательно увеличивающимися импедансами ( $R_1/R_2 = R_2/R_3 = R_3/R_4 = R_4/R_5 = 0,45$ );  $\rho_1 = 1$ ,  $\lambda_1 = 52,9$ ,  $\mu_1 = 268$ ; тыльная граница жестко закреплена). Видно последовательное увеличение напряжения в волне сжатия при прохождении каждой контактной границы; в результате взаимодействия отраженных волн от контактных границ с уже свободной верхней границей образуются также растягивающие напряжения.

Штриховыми линиями показано распространение «длинного» импульса в такой же пятислойной плите, но четвертый и пятый слой которой имеют те же характеристики, что второй и первый соответственно. Видно, что изменение амплитуды волны сжатия относительно центрального слоя про-



Фиг. 2



Фиг. 3

исходит несимметрично. Слоистые конструкции можно использовать не только для уменьшения амплитуды волн, но и для увеличения сжимающих напряжений вблизи лицевой поверхности, например, для увеличения силы сопротивления.

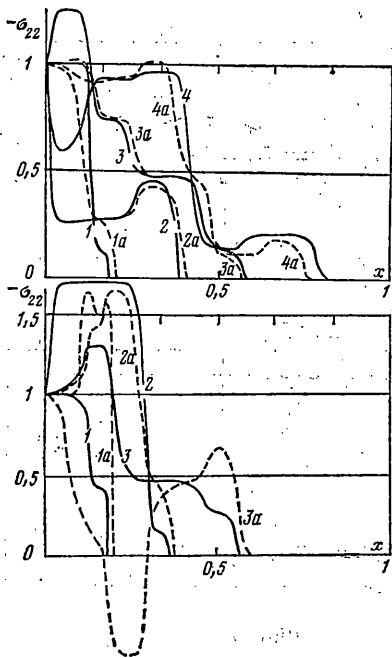
На фиг. 1, *в* показано прохождение длинного импульса сжатия через систему из трех акустически «жестких» слоев  $c_1, c_2, c_3$  ( $R_c=12,62, \rho_c=1, \lambda_c=45, \mu_c=57,2$ ) и трех акустических «мягких» —  $d_1, d_2, d_3$  ( $R_d=2,18, \rho_d=0,48, \lambda_d=4,26, \mu_d=2,84$ ).

Амплитуда головной волны убывает, в то же время амплитуда вторичных (следующих за головной) волн может возрастать — это видно из кривых 4, 5, что объясняется многочисленным взаимодействием волн сжатия в тонких слоях акустически мягкого материала с контактными акустически жесткими границами (при расчете этой же задачи сквозным методом, этот эффект заметен слабее); в обратном случае (т. е. если  $c_1, c_2, c_3$  — мягкий, а  $d_1, d_2, d_3$  — жесткий материал) наблюдался обратный эффект.

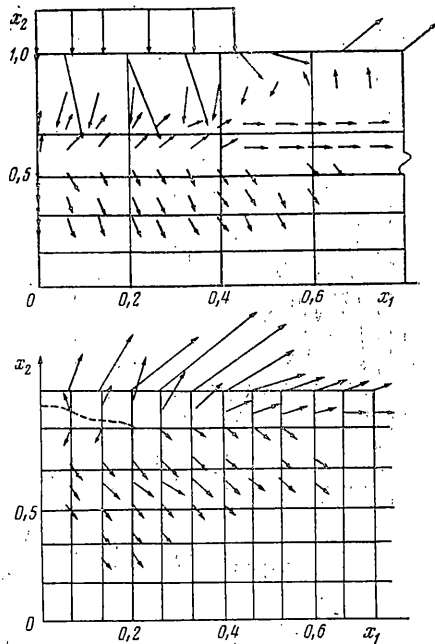
Таким образом, подбирая соответствующим образом конструкцию, можно добиться необходимых эффектов, некоторые из которых представлены на фиг. 2, *а, в*. Так, в случае конструкции, состоящей из десяти чередующихся слоев (фиг. 2, *а*) тех же материалов  $d$  и  $c$  (относительные толщины со стороны действия нагрузки 16 : 1 : 8 : 2 : 4 : 4 : 2 : 8 : 1 : 16) наблюдается возрастание (кумуляция) амплитуды вторичных волн более, чем в три раза (заметим, что не предел); для четырнадцатислойной конструкции (рис. 2, *в*) получен эффект сепарации: конструкция пропускает импульсы, по амплитуде не превышающие некоторого напряжения, которые в данном случае более, чем в два раза меньше прикладываемого.

Затухание головной волны сжатия в 8-слойном композите периодической структуры, состоящего из чередующихся слоев алюминия и вольфрама (соответственно, константы:  $\rho_A=1; \lambda_A=1185,2; \mu_A=605,1; q_A=1; \rho_B=6,98; \lambda_B=5348,8; \mu_B=4343,8; q_B=3,22$ ) виден на рис. 3а (профиль  $\sigma_{22}(x)$ ). Отметим, что схема передает изменение напряжения на контактных границах; видно, что напряжения в ударно сжатом слое в результате сложных волновых взаимодействий могут упасть до нуля (кривая 5).

Падение амплитуды головной волны для 2, 4, 8 и 16-слойного композита из тех же материалов по толщине плиты показано на фиг. 3, *в* (соответственно кривые 1—4); видно, что волна быстрее затухает с увеличением количества пар периодичности, и в случае 16 слоев практически наблюдается непрозрачности (кривые показывают значение амплитуды головной



Фиг. 4



Фиг. 5

волны в соответствующих точках преграды). Значение скачков сжимающих напряжений на контактных границах для двухпериодического композита можно получить из (2.1), (2.2) ( $m$  — количество пар;  $R_1, R_2$  — импедансы первого и второго слоев пары периодичности):

$$\begin{aligned} \sigma_{2m+1} &= \sigma_1 (\eta_{12} \eta_{21})^m = \sigma_1 \exp[m \ln (\eta_{12} \eta_{21})] = \\ &= \sigma_1 \exp\{m \ln [4(1+R_2/R_1)^{-1} \\ &\quad (1+R_1/R_2)^{-1}]\} \\ \eta_{12} &= 2/(1+R_1/R_2), \quad \eta_{21} = 2/(1+R_2/R_1) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Из (2.3) видно, что амплитуда головной волны в двухпериодическом композите убывает экспоненциально с количеством пар и может только убывать, так как  $(1+R_2/R_1)(1+R_1/R_2) \geq 4$ ; это не относится ко вторичным волнам.

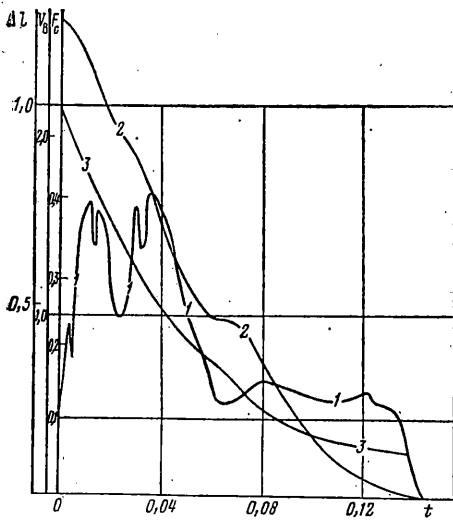
Вообще говоря, для  $N$ -периодической слоистой структуры справедливо соотношение, аналогичное (2.3):

$$\sigma_{Nm+1} = \sigma_1 \exp \left[ m \ln \left( \prod_{i=1}^{i=N-1} \eta_{i,i+1} \right) \right] = \sigma_1 \exp \left\{ m \ln \left[ 2^m / \prod_{i=1}^{i=N-1} (1+R_{i+1}/R_i) \right] \right\}$$

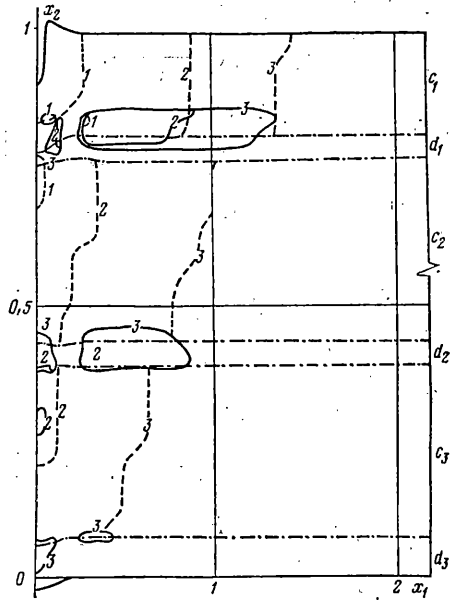
откуда ясно, что амплитуда головной волны убывает или возрастает в  $N$ -периодической структуре соответственно при условиях

$$\prod_{i=1}^{N-1} \eta_i, \quad i+1 \leq 0$$

Сравнение численных расчетов для задачи о прохождении бесконечно по времени импульса сжатия через систему из трех пар (вольфрам — алюминий — фиг. 4, а и алюминий — вольфрам — фиг. 4, в) с выделением контактной границы (сплошные линии) и без выделения (пунктир) показывают, что для детального изучения волновых картин в слоистых системах, решать задачу с выделением контактного разрыва на поверхностях раздела сред необходимо (кривые 1, 1а; 2, 2а; 3, 3а; 4, 4а соответствуют



Фиг. 6



Фиг. 7

моментам времени  $4 \cdot 10^{-3}$ ,  $8 \cdot 10^{-3}$ ,  $12 \cdot 10^{-3}$ ,  $16 \cdot 10^{-3}$ ), причем в корректной постановке эту задачу позволяют решить только методы, учитывающие характеристические свойства (1.2).

3. Результаты расчетов двумерных задач об импульсном или ударном нагружении слоистых преград представлены на фиг. 5, а, в (3 пары алюминий – вольфрам и вольфрам – алюминий; соответственно), 6 и 7 (материалы, обозначенные ранее с и d). Поля скоростей для случая короткоимпульсного нагружения шестислойной плиты показаны на фиг. 5, а, в (момент времени  $1,6 \cdot 10^{-2}$ ; интенсивность импульса  $\sigma_{22} = -20$ ).

Видно, что скорости возникновения на верхней, менее жесткой границе (фиг. 5, а) быстро убывают в более жестком – втором слое; при взаимодействии волн сжатия с третьей контактной поверхностью образуется «обратное» течение материала (вертикальные составляющие вектора скорости изменяют направление на обратное), что может произойти только в слоистой среде при прохождении волны из менее в более жесткую среду; этот же эффект виден и на фиг. 5, в. Кроме того, в слоистой среде возможно появление направленных к оси радиальных компонент вектора скорости – этот эффект появляется только в двумерных задачах (область, в которой имеются такие скорости, показана пунктиром). При численном решении задачи соударении диска со слоистой плитой был получен эффект отскока диска за счет действия импульса сжатия, образовавшегося в результате отражения волны сжатия от первой контактной границы (при проходе волны из более мягкого в более жесткий слой). Этот эффект усиливается за счет действия радиальных волн разгрузки, распространяющихся от края ударника, так также было получено расчетным путем. Интересно отметить, что распространение волн сжатия при соударении тел со слоистыми преградами носит импульсный характер (т. е. по преграде проходит серия импульсов).

Падение во времени силы сопротивления внедрению (материалы с и d), скорости жесткого шарика (масса 0,17, диаметр – 0,06; скорость удара – 1,7 конструкция аналогична представленной на фиг. 1, в), а также его углубление показаны на фиг. 6 (кривые 1, 2, 3 соответственно). Видно, что взаимодействие волн с каждой контактной границей, сказывается на кривой  $F_c(t)$ ; график  $\Delta l(t)$  имеет практически монотонный характер.

Еще одна особенность поведения слоистой преграды с акустически мягкими прослойками представлена на фиг. 7. Зоны пластического течения, ограниченного штриховыми линиями 1, 2, 3 (соответственно, времена 0,065; 0,12; 0,2), из-за наличия этих прослоек не увеличиваются, а уменьшаются в радиальном направлении, хотя в верхнем жестком слое они расширяются (зоны пластического течения показаны только в жестких слоях, так как здесь они представляют наибольший интерес).

Области, в которых произошли откольные разрушения, показаны сплошными линиями 1а, 2а, 3а в те же моменты времени; в основном это радиальные, меньше – кольцевые и поперечные трещины, образующиеся вблизи контактных поверхностей, области откольных разрушений уменьшаются к тылу вследствие затухания волн сжатия в слоистой конструкции (штрих-пунктирные линии – границы раздела сред).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Майнчен Дж., Саг С. Метод расчета «Тензор» // Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. С. 185–211.
2. Зеленский А. С., Нещеретов И. И. Учет откольного разрушения в задаче о взаимодействии продольной волны с цилиндрической полостью // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 1. С. 125–129.
3. Петров И. Б. Волновые и откольные явления в слоистых оболочках конечной толщины // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 4. С. 118–124.
4. Courant R., Isaacson E., Rees M. On the solution of nonlinear hyperbolic differential equation by finite differences // Commun Pure and Appl. Math., 1952. V. 5. No. 5. P. 243–254.
5. Магомедов К. М., Холодов А. С. О построении разностных схем для уравнений гиперболического типа на основе характеристических соотношений // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1969. Т. 9. № 2. С. 373–386.
6. Федоренко Р. П. Применение разностных схем высокой точности для численного решения гиперболических уравнений // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1962. Т. 2. № 6. С. 1122–1128.
7. Петров И. Б., Холодов А. С. О регуляризации разрывных численных решений уравнений гиперболического типа // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1984. Т. 24. № 8. С. 1172–1188.
8. Петров И. Б.; Холодов А. С. Численное исследование некоторых динамических задач механики деформируемого твердого тела сеточно-характеристическим методом // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1984. Т. 24. № 5. С. 722–739.
9. Belotserkovskii O. M., Shidlovsky V. P. Current Problems in Computational Fluid Dynamics. Moscow: MIR, 1985. 320 p.
10. Кондауров В. И., Петров И. Б. Расчет процессов динамического деформирования упругопластических тел с учетом континуального разрушения // Докл. АН СССР. 1985. Т. 285. № 6. С. 1344–1347.
11. Кондауров В. И., Петров И. Б., Холодов А. С. Численное моделирование процесса внедрения жесткого тела вращения в упругопластическую преграду // ПМТФ. 1984. № 4. С. 132–139.
12. Петров И. Б. Численное исследование волновых процессов в слоистой преграде при соударении с жестким телом вращения // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 4. С. 125–129.
13. Брезовских Л. М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.
14. Кравчук А. С., Майборода В. П., Уржумцев Ю. С. Механика полимерных и композиционных материалов. М.: Наука, 1985. 303 с.
15. Васильев В. В., Сибиряков А. В. Распространение упругих волн в слоистой полосе // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 1. С. 104–109.
16. Сапожников Г. А., Фокин В. М. К численному моделированию явления неограниченной кумуляции в слоистых средах // Материалы VI Всесоюз. конф. по численным методам решения задач теории упругости и пластичности. Ч. I. Новосибирск: Ин-т теорет. и прикл. механики СО АН СССР. 1980. С. 151–161.
17. Нестеренко В. Ф., Фокин В. М., Ческидов П. А. Затухание сильных ударных волн в слоистых материалах // ПМТФ. 1983. № 4. С. 130–139.
18. Крошко Е. А., Чубарова Э. В. Численное моделирование высокоскоростного удара по многослойным пластинам // Материалы VI Всесоюз. конф. по числ. методам решения задач теории упругости и пластичности. Ч. I. Новосибирск: Ин-т теорет. и прикл. механики СО АН СССР. 1980. С. 91–104.
19. Григорян С. С., Чередниченко Р. А. Распространение в слоевом полупространстве упругих волн, вызванных поверхностной динамической нагрузкой // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 1. С. 111–118.
20. Римский В. К., Сабодаш П. Д. О соударении деформируемого штампа с многослойной вязкоупругой плитой // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 1. С. 78–85.
21. Римский В. К. Поперечный удар вращающимся цилиндром по многослойной упругопластической плите с полостями // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 5. С. 77–84.
22. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 687 с.
23. Лагев В. И., Тришин Ю. А. Увеличение начальной скорости и давления при ударе по неоднородной преграде // ПМТФ. 1974. № 6. С. 128–132.
24. Ахмадеев Н. Х., Болотова Р. Х. Распространение волн напряжений в слоистых средах при ударном нагружении (акустическое приближение) // ПМТФ. 1985. № 1. С. 125–133.
25. Забалаин Е. И. Ударные волны в слоистых системах // ЖЭТФ. 1965. Т. 49. Вып. 2. С. 642–646.

Москва

Поступила в редакцию  
3.IX.1987