

УДК 539.3

Э. М. КАРТАШОВ, А. М. ХАНИ

ДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕРМОУПРУГАЯ РЕАКЦИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ ПРИ КОНЕЧНОЙ СКОРОСТИ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕПЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

В работе рассмотрена динамическая термоупругая реакция упругого полупространства с равномерно движущейся границей, находящегося в условиях резкого нагрева (охлаждения). Исследовано влияние скорости движения границы полупространства на характер изменения термоупругих напряжений во внутренних точках. Описан эффект влияния движения граничной поверхности тела на снижение максимума динамических напряжений на фронте термоупругой волны в условиях конечной скорости нагрева граничной поверхности.

Исследование стойкости хрупких твердых тел к воздействию тепловых нагрузок составляет содержание проблемы термической прочности, актуальность которой возросла особенно в последние десятилетия в связи с созданием оптических квантовых генераторов и их использованием в технологических операциях.

Возникает актуальная проблема оценки роли температурных полей и термоупругих волн в механизме теплового разрушения твердых тел в условиях резкого нагрева (или охлаждения) с высоким темпом (тепловой удар). Как показано в [1, 2] при достаточной скорости изменения температуры следует учитывать динамические эффекты, вызванные движением частиц твердого тела при быстром тепловом расширении (или сжатии).

В этих условиях ускорения имеют существенное значение и квазистатический подход неприменим. Последнее означает, что необходимо рассматривать не задачу квазистатики, а задачу динамики и в уравнения равновесия должны быть введены инерционные члены [3, 4].

1. Постановка связанной динамической задачи термоупругости в напряжениях. Пусть D — конечная или частично ограниченная область пространства (x_1, x_2, x_3) , находящаяся в условиях термонапряженного состояния, $T(x_1, x_2, x_3, t) = T(x, t)$ — распределение температуры в области D в момент времени $t > 0$; T_0 — начальная исходная температура, при которой область находится в недеформированном и ненапряженном состоянии.

Пусть $\sigma_{ij}(x, t)$, $\epsilon_{ij}(x, t)$, $u_i(x, t)$ ($i, j = 1, 2, 3$) — соответственно, компоненты тензоров напряжения, деформации и вектора перемещения, удовлетворяющие (см. [2]); уравнениям движения (без учета объемных сил), геометрическим соотношениям, физическим уравнениям и уравнениям совместности

$$\sigma_{ij, j}(x, t) = \rho u_i''(x, t) \quad (1.1)$$

$$\epsilon_{ij}(x, t) = 1/2 [u_{i, j}(x, t) + u_{j, i}(x, t)] \quad (1.2)$$

$$\sigma_{ij}(x, t) = \lambda e(x, t) \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}(x, t) - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T [T(x, t) - T_0] \delta_{ij} \quad (1.3)$$

$$\gamma_{prm} \gamma_{qsn} \epsilon_{rs, mn}(x, t) = 0 \quad (x \in D, t > 0) \quad (1.4)$$

где ρ — плотность, $e = \epsilon_{hh}$ — объемное расширение, λ, μ — постоянные Ламе, α_T — коэффициент линейного теплового расширения, δ_{ij} — символ Кронекера, γ_{ijh} — альтернативный тензор. Выразим из (1.2) деформации ϵ_{ij} через напряжения, подставим в (1.4) и используем (1.1). После преобразований найдем следующее основное соотношение динамической термоупругости:

$$\begin{aligned} & (1+\nu) \Delta \sigma_{ij} + \sigma_{,ij} + \alpha_T E [T_{,ij} + (1+\nu)/(1-\nu) \Delta T(x, t) \delta_{ij}] = \\ & = \frac{\rho(1+\nu)}{2G} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[2\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1-\nu^2} \sigma(x, t) \delta_{ij} + \right. \\ & \left. + \frac{2G(2+\nu)}{1-\nu} \alpha_T (T(x, t) - T_0) \delta_{ij} \right] \quad (x \in D, t > 0) \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $\sigma = \sigma_{hh}$ — сумма нормальных напряжений, Δ — оператор Лапласа, G — модуль сдвига, E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона, $T(x, t)$ — температура, удовлетворяющая обобщенному уравнению теплопроводности, связывающему приращение температуры со скоростью изменения объема деформирующей области [5]:

$$\partial T(x, t)/\partial t = a\Delta T - (3\lambda + 2\mu)(\alpha_T/c\rho)T_0 \operatorname{div} \mathbf{u}'(x, t), \quad (x \in D, t > 0) \quad (1.6)$$

где a — температуропроводность материала.

2. Изучение влияния скорости движения границы на характер изменения динамических напряжений. Рассмотрим сравнительно новую задачу несвязанной динамической термоупругости для упругого полупространства $z > l + vt, t > 0$, граница которого перемещается с постоянной скоростью v . Уменьшение толщины области может происходить вследствие выгорания материала на ее поверхности, либо плавления с непрерывным сдуванием расплавленной части, либо за счет поверхностного разрушения; подобное движение имеет место при использовании электрических разрядов, явления электрического взрыва проводников и других процессов, характеризующихся высокой температурой [6].

Представляет интерес изучение влияния скорости движения границы пространства и конечной скорости изменения внешних тепловых воздействий на границе области на термонапряженное состояние во внутренних точках.

Температурное поле $T(z, t)$ в полупространстве $z > l + vt, t > 0$ первоначально находящемся при нулевой температуре (или $T = \text{const}$) возникает вследствие нагрева его поверхности до температуры $\psi_0(t)$. Возникающие при этом напряжения будут зависеть только от z и t , т. е. $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(z, t)$ и $u_x = u_y = 0, u_z = u_z(z, t)$.

Имеем [5] в безразмерных переменных (η, τ) , следующую динамическую задачу термоупругости в области с движущейся границей

$$\partial^2 \sigma_{\eta\eta} / \partial \eta^2 - \partial^2 \sigma_{\eta\eta} / \partial \tau^2 = \partial^2 T / \partial \tau^2 \quad (\eta > \beta\tau, \tau > 0) \quad (2.1)$$

$$\tau = 0: \sigma_{\eta\eta}(\eta, \tau) = \partial \sigma_{\eta\eta} / \partial \tau = 0 \quad (\eta > 0) \quad (2.2)$$

$$\sigma_{\eta\eta}(\eta, t) |_{\eta=\beta\tau} = \sigma_{\eta\eta}(\eta, \tau) |_{\eta=\infty} = 0 \quad (\tau > 0) \quad (2.3)$$

Здесь $\eta = v_p(z-l)/a, \tau = v_p^2 t/a, \beta = v/v_p, v_p = [(\lambda + 2\mu)/\rho]^{1/2}$ — скорость звука в материале полупространства; $\sigma_{\eta\eta}(\eta, \tau) = \sigma_{zz}(z, t)/sT_0, s = \alpha_T(3\lambda + 2\mu), T(\eta, \tau) = T(z, t)/T_0$.

Температура $T(\eta, \tau)$ является решением следующей задачи теплопроводности обобщенного типа

$$\partial T / \partial \tau = \partial^2 T / \partial \eta^2 \quad (\eta > \beta\tau, \tau > 0) \quad (2.4)$$

$$T(\eta, \tau) |_{\tau=0} = 0 \quad (\eta > 0), |T(\eta, \tau)| < \infty \quad (\eta > \beta\tau) \quad (2.5)$$

$$T(\eta, \tau) |_{\eta=\beta\tau} = \psi(\tau) \quad (\tau > 0); \quad \psi(\tau) = \psi_0(t)/T_0 \quad (2.6)$$

и находится в виде [5].

$$T(\eta, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\tau \frac{\eta - \beta\tau'}{(\tau - \tau')^{3/2}} \psi(\tau') \exp\left[-\frac{(\eta - \beta\tau')^2}{4(\tau - \tau')}\right] d\tau' \quad (2.7)$$

Для отыскания компоненты $\sigma_{\eta\eta}(\eta, \tau)$ переходим в подвижную систему координат $\xi = \eta - \beta\tau$, полагая $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \sigma_{\eta\eta}(\eta, \tau)$ и применяем преобразование Лапласа по τ . Находим

$$\begin{aligned} \Sigma_{\xi\xi}(\xi, p) = & \Psi(p) (1 - \beta^2)^{-1} \{ p(p + \beta^2) + 2\beta(p + \beta^2/2) [\beta/2 + (p + \beta^2/4)^{1/2}] \} \times \\ & \times \{ [\beta/2 - p(1 - \beta)^{-1} + (p + \beta^2/4)^{1/2}] [\beta/2 + p(1 + \beta)^{-1} (p + \beta^2/4)^{1/2}] \}^{-1} \times \\ & \times \{ \exp[-(\beta/2 + (p + \beta^2/4)^{1/2})\xi] - \exp[-\xi p/(1 - \beta)] \} \end{aligned} \quad (2.8)$$

где $\Sigma_{\xi\xi}$ и Ψ — изображения функций $\sigma_{\xi\xi}$ и ψ .

Рассмотрим далее в (2.6) характерный случай теплового удара, а именно случай мгновенного повышения температуры границы упругого полу-

пространства от значения $T=0$ при $t=0$ до значения $T=T_0$ при всех $t>0$. При этом $\psi(\tau)=1$ и $\Psi(p)=1/p$. Переходя в (2.8) к оригиналам, находим в системе координат (η, τ) :

$$\sigma_{\eta\eta}(\eta, \tau) = \sigma_{\eta\eta}^{(1)}(\eta, \tau) = \begin{cases} 0, & 0 < \tau < \eta \\ \sigma_{\eta\eta}^{(2)}(\eta, \tau), & \tau > \eta \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\eta\eta}^{(1)}(\eta, \tau) = & (1/2) \{ \beta^2 (1-\beta^2)^{-1} \exp[\beta(\eta-\beta\tau)] \Phi^*[(1/2)\eta\tau^{-1/2}-\beta\tau^{1/2}] + \\ & + (1/2) (\beta-2) (1-\beta)^{-1} \exp(\eta-\tau) \Phi^*[(1/2)\eta\tau^{-1/2}-\beta\tau^{1/2}] - (1/2) (\beta+2) \times \\ & \times (1+\beta)^{-1} \exp(\eta+\tau) \Phi^*[(1/2)\eta\tau^{-1/2}+\tau^{1/2}] \} \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\eta\eta}^{(2)}(\eta, \tau) = & (1/2) \{ \beta^2 (1-\beta^2)^{-1} [1 + \Phi[(\beta/2)(\tau-\eta)^{1/2}(1-\beta)^{-1/2}] + \\ & + (1/2) (\beta+2) (1+\beta)^{-1} \exp[(1+\beta)(1-\beta)^{-1}(\tau-\eta)] \Phi^*[(1+\beta/2) \times \\ & \times (\tau-\eta)^{1/2}(1-\beta)^{-1/2}] + (1/2) (2-\beta)(1-\beta) \exp(\tau-\eta) \times \\ & \times \Phi^*[(\beta/2-1)(\tau-\eta)^{1/2}(1-\beta)^{-1/2}] \} \end{aligned} \quad (2.11)$$

где $\Phi^*(z) = 1 - \Phi(z)$; $\Phi(z)$ — функция Лапласа.

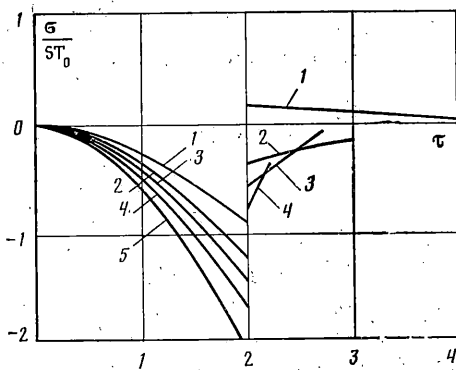
Как следует из (2.9), составляющая напряжения, выраженная функцией $\sigma_{\eta\eta}^{(1)}(\eta, \tau)$ представляет собой диффузионную волну, возникающую сразу в каждой внутренней точке области; составляющая напряжения, выраженная функцией $\sigma_{\eta\eta}^{(2)}(\eta, \tau)$ представляет собой продольную упругую волну, фронт которой движется со скоростью v_p внутрь упругого полупространства. Рассмотрим произвольную внутреннюю точку (η, τ) полупространства. Вначале в ней возникает напряжение, описываемое функцией $\sigma_{\eta\eta}^{(1)}(\eta, \tau)$, и напряжение растет от нуля до некоторого отрицательного значения. В момент времени $\tau=\eta$ соответствующий времени прохождения упругой волной расстояния $(z-l)$ от границы полупространства со скоростью v_p к этой точке приходит волна $\sigma_{\eta\eta}^{(2)}(\eta, \tau)$ и напряжение $\sigma_{\eta\eta}(\eta, \tau)$ делает скачок в области положительных значений и быстро убывает до нуля. Величина скачка для $\sigma_{\eta\eta}$ при общем виде температурной функции $\psi(\tau)$ в (2.6) находится из (2.8) по теореме запаздывания [4] и равна

$$|\Delta| = \lim_{\tau \rightarrow 0} \psi(\tau) \quad (2.12)$$

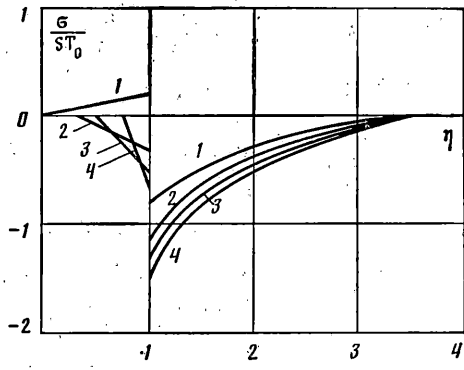
а для рассматриваемого в (2.10) — (2.12) случая $|\Delta| = 1$.

Заметим, что соотношение (2.12) при наличии скачка напряжений может служить оценкой для $|\max \sigma_{\eta\eta}|$ по температурной функции нагрева поверхности полупространства для σ_{zz} соотношения (2.12) записывается в виде $|\Delta| = s \lim_{t \rightarrow 0} \psi_0(t)$.

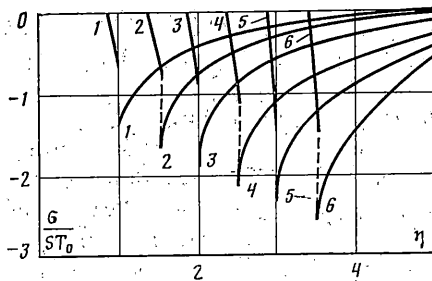
На фиг. 1 приводится изменение напряжения $\sigma_{\eta\eta}(\eta, \tau)$ в сечении $\eta=2$ в зависимости от τ при различных $\beta=0,01; 0,51; 0,71; 0,91; 0,99$ (кривые 1-5 соответственно) при внезапном нагреве границы упругого тела в результате действия инерционных сил в нем (в частности, при $\eta=2$) возникают кратковременные сжимающие и растягивающие напряжения, причем наличие последних определяется величиной отношения скорости движения границы тела к скорости распространения продольных упругих волн в сплошной среде. Вначале при $\tau < 2$ возникает сжимающее напряжение, максимум которого возрастает либо с увеличением скорости движения границы упругого полупространства, либо с уменьшением скорости распространения упругих колебаний в твердом теле. После прохождения упомянутой выше упругой волны расширения в момент времени, близкий к $\tau=2$, напряжения $\sigma_{\eta\eta}(\eta, \tau)$ при малых β ($\beta \leq 0,01$) становится растягивающим и быстро уменьшается до нуля, приближаясь к квазистатическому значению. Существенно, что по мере увеличения параметра β , отражающего инерционные свойства сплошной среды, напряжения $\sigma_{\eta\eta}(\eta, \tau)$ не выходят за пределы отрицательных значений, оставаясь сжимающими и после прохождения упругой волны $\sigma_{\eta\eta}^2(\eta, \tau)$. При этом, как отмечалось, с увеличением β возрастает и амплитуда сжимающих напряжений. На фиг. 2 приведены кривые распределения напряжения $\sigma_{\eta\eta}(\eta, \tau)$ по толщине η при $\tau=1$ для значений $\beta=0,01; 0,51; 0,71; 0,91$ (кривые 1-4). В системе (η, τ) между движущейся границей полупространства и фронтом упругой волны $\beta\tau < \eta < 1$ возникают напряжения растяжения, которые с ростом β меняют свой знак тем меньше, чем больше скорость движения границы v и, начиная с определенных значений β (на фиг. 2) при $\beta \geq 0,51$ сразу переходят в отрицательные. При $\beta \rightarrow 1$ в окрестности фронта термоупругой волны возникают большие напряжения сжатия. Последнее характерно для ди-



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

динамических задач термоупругости в области с движущейся границей. На фиг. 3 приведены аналогичные кривые (как и на фиг. 2 для $\sigma_{\eta\eta}(\eta, \tau)$), но для $\beta=0,91$ и в разные моменты времени: $\tau=1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5$ (кривые 1-6). Видно, что поверхностные слои полупространства находятся в условиях действия сжимающих напряжений и, что существенно, максимум этих напряжений возрастает с течением времени.

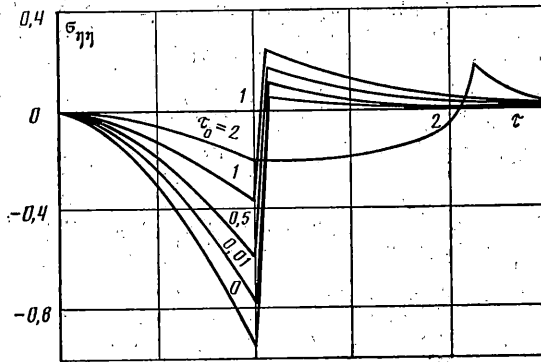
Скачкообразное изменение температуры поверхности полупространства, положенное в основу решения (2.10)–(2.11), представляет собой математическую идеализацию, характерную для феноменологического описания тепловых процессов в твердых телах в терминах соответствующих краевых задач нестационарной теплопроводности [5].

Исследуем эффект конечной скорости изменения теплового воздействия на границу полупространства, когда температура поверхности возрастает от нуля по линейному закону и достигает конечного значения T_0 за малый, но отличный от нуля интервал времени t_0 : $\psi_0(t) = T_0 t/t_0$ при $0 \leq t \leq t_0$ и $\psi_0(t) = T_0$ при $t \geq t_0$ или в системе (η, τ) : $\psi(t) = (1/\tau_0) [\tau - H(\tau - \tau_0) (\tau - \tau_0)]$; где $\tau_0 = v_p^2 t_0/a$, $H(\tau)$ — единичная функция Хевисайда. Находим для этого случая из (2.2) для $\sigma_{\eta\eta}(\eta, \tau)$ имея в виду, что $\Psi(p) = \tau_0^{-1} p^{-2} [1 - \exp(p\tau_0)]$:

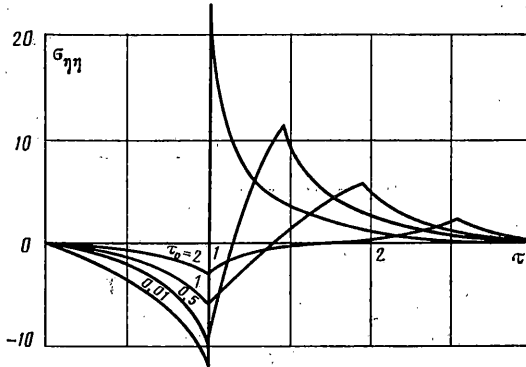
$$\begin{aligned} \sigma_{\eta\eta}(\eta, \tau) = & \psi_1(\eta, \tau) = \tau_0^{-1} \{ H(\tau - \eta) [2(1 - \beta^2)^{-1} \exp[-1/4\beta^2 \times \\ & \times (\eta - \beta\tau) (1 - \beta)^{-1}] - (1 - \beta^2)^{-1} [1/2\beta^2 (\tau - \eta) (1 - \beta)^{-1} + 1] \Phi^* [1/2\beta \times \\ & \times (\tau - \eta)^{1/2} (1 - \beta)^{-1/2}] - 1/2\beta^2 (1 - \beta^2)^{-1} (\tau - \eta) (1 - \beta)^{-1} \Phi^* [1/2\beta \times \\ & \times (\tau - \eta)^{1/2} (1 - \beta)^{-1/2}] + 1/2\beta (2 - \beta) (1 - \beta^2)^{-1} \exp(\tau - \eta) \times \\ & \times \Phi^* [1/2(\beta - 2) (\tau - \eta)^{1/2} (1 - \beta)^{-1/2}] - 1/2\beta (2 + \beta) (1 - \beta^2)^{-1} \times \\ & \times \exp[(\tau - \eta) (1 + \beta) (1 - \beta)^{-1}] \Phi^* [1/2(2 + \beta) (\tau - \eta)^{1/2} (1 - \beta)^{-1/2}] \times \\ & \times (1 - \beta^2)^{-1} [\beta^2 \tau^{-1/2} \beta \eta] \exp(-\beta(\eta - \beta\tau)) \Phi^* [1/2(\eta - 2\beta\tau) \tau^{-1/2}] + \\ & + (1 - \beta^2)^{-1} [1/2\beta \eta - 1] \Phi^* [1/2\eta \tau^{-1/2}] - 1/2(2 - \beta) (1 - \beta^2)^{-1} \times \\ & \times \exp(\tau - \eta) \Phi^* [1/2(\eta - 2\tau) \tau^{-1/2}] + 1/2\beta (2 + \beta) (1 - \beta^2)^{-1} \times \\ & \times \exp(\tau + \eta) \Phi^* [1/2(\eta + 2\tau) \tau^{-1/2}] \} \quad (0 \leq \tau \leq \tau_0) \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\sigma_{\eta\eta}(\eta, \tau) = \psi_1(\eta, \tau) - \psi_1(\eta, \tau - \tau_0) \quad (\tau \geq \tau_0) \quad (2.14)$$

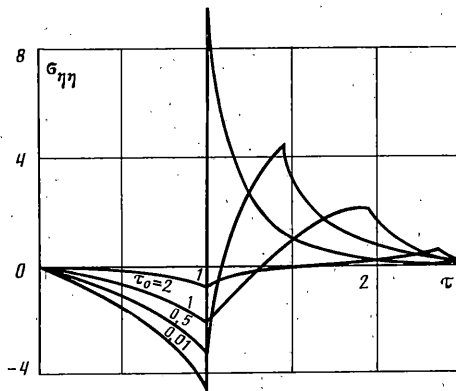
В рассматриваемом случае напряжения изменяются непрерывно, однако их производные по времени и по пространственной координате имеют разрывы, которые распространяются со скоростью v_p .



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

На фиг. 4-6 приведены графики зависимости безразмерного напряжения $\sigma_{\eta\eta}(\eta, \tau) = \sigma_{zz}(z, t)/(sT_0)$ от безразмерного времени τ в точке $\eta=1$ при различных значениях $\tau_0=0; 0,01; 0,5; 1; 2$ (кривые 1-4) и $\beta=0$ (фиг. 4), $\beta=0,1613$ (фиг. 5), $\beta=0,05$ (фиг. 6). Максимум напряжений быстро уменьшается с увеличением τ_0 , при $\tau_0=2$ на фиг. 4 этот максимум составляет лишь около 20% от его значения при $\tau_0=0$ (мгновенный нагрев). Например, для ПММА при $\lambda=2,26 \cdot 10^9$ Н/м², $\mu=3,8 \cdot 10^8$ Н/м², $\rho=1,2 \cdot 10^3$ кг/м³, $a=1,13 \cdot 10^{-7}$ м²/с из формулы $v_p = [(\lambda+2\mu)/\beta]^{1/2}$ получаем скорость волны расширения $v_p=1,6 \cdot 10^3$ м/с, а зависимость между временем t и безразмерной переменной τ будет иметь вид $t=0,44 \cdot 10^{-13} \tau$. При этом значение $\tau_0=2$ будет соответствовать времени нагрева $t_0=10^{-13}$ с. Таким образом, даже при столь малой продолжительности нагрева максимум динамических напряжений снижается на существенную величину. Этот результат говорит о том, что скорость нагрева поверхности твердого тела играет существенную роль в оценке максимальной величины напряжений, возникающий вследствие динамических эффектов. Как правило, в конкретных расчетах это обстоятельство не учитывается при переходе к квазистатическим задачам. Однако в условиях движения границы области термонапряженного состояния переход к квазистатическим задачам термоупругости не всегда целесообразен.

Как показывают фиг. 5-6 пиковые значения растягивающих напряжений и при конечной скорости поверхностного нагрева достигают величины, достаточной для трещинообразования в приповерхностных слоях твердого тела.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. М.: Физматгиз, 1963. 251 с.
2. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964. 517 с.
3. Даниловская В. И. Температурные напряжения в упругом полупространстве, возникающие вследствие нагрева его границы // ПММ. 1950. Т. 14. Вып. 3. С. 316-318.
4. Каргашов Э. М., Шефтер Э. М. Об одной динамической задаче термоупругости в области с движущейся границей // Изв. АН СССР, МТТ. 1973. № 2. С. 92-100.
5. Каргашов Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Выш. шк., 1985. 480 с.
6. Каргашов Э. М., Любов Б. Я. Аналитические методы решения краевых задач уравнения теплопроводности в области с движущимися границами // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1974. № 6. С. 83-111.

Москва

Поступила в редакцию
2.II.1988