МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1989

УДК 539.3.01

Л. Г. ДОБОРДЖГИНИДЗЕ

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ С ПРЯМОЛИНЕЙНЫМИ РАЗРЕЗАМИ

Рассматривается плоская задача для нелинейно-упругой плоскости из материала гармонического типа [1] с прямолинейными разрезами (щелями), расположенными вдоль одной и той же прямой. На краях разрезов действует уравновешивающая система внешних усилий, а на бесконечности реализуется однородное поле напряжений. Предполагается, что везде на указанной прямой симметрии касательные напряжения отсутствуют.

1. Постановка и решение задачи. Пусть рассматриваемая физическая область S представляет собой плоскость переменной $z=x+iy$ разрезанной вдоль конечного числа отрезков $L_k=[a_kb_k]$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ действительной оси L. Далее, пусть $\Gamma=L_1+\ldots+L_n$ и $\Gamma'=L\setminus\Gamma$. На Γ приложена известная система внешних усилий, а на бесконечности реализуется однородное поле напряжении. Касательное усилие на L и вращение на бесконечности отсутствуют.

Граничные условия задачи имеют вид [2]:

$$Y_y^+=N_1(x),\quad Y_y^-=N_2(x),\quad X_y^\pm=0 \quad (\text{на } \Gamma) \tag{1.1}$$

где Y_y, X_x, X_y — компоненты тензора напряжений Коши, знаки плюс и минус обозначают граничные значения этих функций на верхнем и нижнем краях щелей, соответственно, $N_1(x)$, $N_2(x)$ — заданные на Γ действительные функции, удовлетворяющие условию Гельдера. Кроме того

$$X_x^{(\infty)}=P_1,\quad Y_y^{(\infty)}=P_2,\quad X_g^{(\infty)}=0 \tag{1.2}$$

Для решения задачи воспользуемся комплексными представлениями полей напряжений, деформаций и смещений через две аналитические в области S функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ [3]:

$$X_x+Y_y+4\mu=\frac{\lambda+2\mu}{J^{1/2}}\,q\Omega(q)$$
$$Y_y-X_x-2iX_y=-\frac{4(\lambda+2\mu)}{J^{1/2}}\,\frac{\Omega(q)}{q}\,\frac{\partial z^*}{\partial z}\cdot\overline{\frac{\partial z^*}{\partial \bar z}} \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial z^*}{\partial z}=\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\varphi'^2(z)+\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\varphi'(z)}{\overline{\varphi'(z)}}$$
$$\frac{\partial z^*}{\partial \bar z}=-\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\left[\frac{\varphi(z)\overline{\varphi''(z)}}{\overline{\varphi'^2(z)}}-\overline{\psi'(z)}\right] \tag{1.4}$$

$$u+iv=\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\int\varphi'^2(z)\,dz+\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\left[\frac{\varphi(z)}{\overline{\varphi'(z)}}+\overline{\psi(z)}\right]-z \tag{1.5}$$

$$J^{1/2}=\frac{\partial z^*}{\partial z}\frac{\partial \bar z^*}{\partial \bar z}-\frac{\partial z^*}{\partial \bar z}\frac{\partial \bar z^*}{\partial z}$$
$$q=2\left|\frac{\partial z^*}{\partial z}\right|,\qquad \Omega(q)=q-\frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} \tag{1.6}$$

где u, v — компоненты вектора упругих смещений, $z^*=z+u+\iota v$, λ, μ — постоянные Ляме.

При больших $|z|$, $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ имеют асимптотику [4]:

$$\varphi(z)=-(X+\iota Y)(8\pi\mu a_0)^{-1}\ln z+a_0 z+\varphi_0(z) \tag{1.7}$$

$$\psi(z)=-\frac{X-\iota Y}{4\pi}\left[\frac{1}{\lambda+\mu}+\frac{1}{2\mu a_0\varphi'(z)}\right]\ln z+b_0 z+\psi_0(z) \tag{1.8}$$

где X, Y — компоненты главного вектора всех внешних усилий, приложенных к Γ, а $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ — голоморфные в области S функции, имеющие при больших $|z|$ порядок $O(1)$; a_0, b_0 — известные постоянные:

$$\begin{gathered} a_0^2=(\lambda+\mu)[2\mu(P_1+P_2)+P_1P_2+4\mu^2]/\mu[\lambda(P_1+P_2)-P_1P_2+4\mu(\lambda+\mu)] \\ b_0=[(\lambda+2\mu)(P_1-P_2)\exp(2\iota\alpha)]/[\lambda(P_1+P_2)-P_1P_2+4\mu(\lambda+\mu)] \end{gathered} \tag{1.9}$$

где P_1, P_2 суть главные напряжения на бесконечности, а α — угол, который главная ось, соответствующая P_1 образует с осью ох. Кроме того [4]:

$$\varphi'(z)\neq 0 \quad (\forall z\in S+\Gamma) \tag{1.10}$$

Из последнего условия (1.1) на основании (1.3)—(1.5) следует соотношение

$$\overline{\varphi(x)}\varphi''(x)-\psi'(x)\varphi'^2(x)=\frac{(Y_y-X_x)|\varphi'^2(x)|}{X_x+Y_y+4\mu}\left(1+\frac{\mu}{\lambda+\mu}|\varphi'^2(x)|\right) \quad (\text{на } L) \tag{1.11}$$

Можно показать, что когда на Γ выполняется последнее условие (1.1), а на бесконечности реализуется напряженное состояние (1.2), то

$$\begin{gathered} X_x-Y_y=4\mu(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)a_0^2 b_0[\mu a_0^2+(\lambda+\mu)(1- \\ -b_0)]^{-1}[\mu a_0^2+(\lambda+\mu)(1+b_0)]^{-1} \end{gathered} \tag{1.12}$$

на L, где постоянные a_0 и b_0 определяются формулами (1.9).

С использованием (1.3)—(1.5), (1.11) и с учетом (1.1) задача сводится к определению кусочно-голоморфной в области функции $\varphi'(z)$ по граничным условиям

$$|\varphi'^2(x)|^{\pm}=F^{\pm}(x) \quad (\text{на } \Gamma) \tag{1.13}$$

где $F^+(x)$, $F^-(x)$ — заданные на Γ действительные функции класса Гельдера;

$$\begin{gathered} F(x)=(\lambda+\mu)\mu^{-1}(Y_y+2\mu)(Y_y+2\mu+\gamma)[(\lambda+2\mu)(2Y_y+ \\ +\gamma+4\mu)-(Y_y+2\mu)(Y_y+2\mu+\gamma)]^{-1} \end{gathered} \tag{1.14}$$

$$\begin{gathered} \gamma=4\mu(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)a_0^2 b_0[\mu a_0^2+(\lambda+\mu)(1-b_0)]^{-1}[\mu a_0^2+ \\ +(\lambda+\mu)(1+b_0)]^{-1} \end{gathered} \tag{1.15}$$

Исходя из условия безопасности нагружения заключаем, что $F(x)>0$ на Γ [3].

Общее решение этой задачи в классе h_0 имеет вид [5]:

$$\begin{gathered} \varphi'(z)=\exp^{1/2}\left[\frac{1}{2\pi\iota X(z)}\int_\Gamma\frac{(F_0^{+}+F_0^{-})X(x)\,dx}{x-z}+\right. \\ \left.+\frac{1}{2\pi\iota}\int_\Gamma\frac{(F_0^{+}-F_0^{-})\,dx}{x-z}+\frac{P_n(z)}{X(z)}\right] \end{gathered} \tag{1.16}$$

$$\begin{gathered} X(z)=[(z-a_1)(z-b_1)\ldots(z-a_n)(z-b_n)]^{1/2} \\ P_n(z)=C_0 z^n+C_1 z^{n-1}+\ldots+C_n \end{gathered} \tag{1.17}$$

где $X(z)$ — каноническая функция указанного класса, а $P_n(z)$ — полином степени не выше n, с призвольными коэффициентами; $F_0=\ln F$, $X(x)=X^+(z)$, а под $X(z)$ подразумевается ветвь, которая при больших $|z|$ имеет представление $X(z)=z^n+d_{n-1}z^{n-1}+\ldots$.

Постоянные C_0 и C_1 определяем в виде

$$C_0=\ln a_0^2$$

$$C_1=-\frac{1}{2}(a_1+b_1+\ldots+a_n+b_n)\ln a_0^2-\frac{X+iY}{4\pi\mu}+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma [F_0^+(x)-F_0^-(x)]dx \tag{1.18}$$

а остальные коэффициенты полинома (1.17) определяются из условия однозначности смещений.

После определения $\varphi(z)$ другую искомую функцию $\psi(z)$ находим из (1.11) уже известным способом. Задача решена.

2. Пример 1. Пусть на части $[-b;\ b]$ разреза $[-a;\ a]$ $(b<a)$ действует равномерно распределенная нагрузка с интенсивностью N_0, а остальная часть разреза свободна от внешних воздействий. Напряжения на бесконечности отсутствуют.

В рассматриваемом случае $(n=1)$:

$$F_0=\ln[(\lambda+\mu)(2\mu+N_0)\mu^{-1}(2(\lambda+\mu)-N_0)^{-1}] \tag{2.1}$$

и из (1.16), на основании (1.17), (1.18), после некоторых вычислений получим

$$\varphi'(z)=\exp\left\{\alpha\left[\ln\frac{(z+b)([(b^2-a^2)(z^2-a^2)]^{1/2}+bz-a^2)}{(z-b)([(b^2-a^2)(z^2-a^2)]^{1/2}-bz-a^2)}-\frac{\beta z}{(z^2-a^2)^{1/2}}\right]\right\} \tag{2.2}$$

$$\alpha=-F_0/2\pi i,\quad \beta=\ln\{[(b^2-a^2)^{1/2}+b]\,[(b^2-a^2)^{1/2}-b]^{-1}\}$$

После этого, с использованием (1.11) и (1.12), из (1.3) находим формулу для определения значений нормальных напряжений $N(x)$ на $\Gamma'=\,]-\infty;\ -a]\cup[a;\ \infty[$ в виде

$$\begin{gathered}N(x)=2\mu\,[B^{Z(x)}-1]\,[1+\mu(\lambda+\mu)^{-1}B^{Z(x)}]^{-1}\\ B\equiv(\lambda+\mu)\mu^{-1}(2\mu+N_0)\,[2(\lambda+\mu)-N_0]^{-1}\\ Z(x)\equiv1-\pi^{-1}\operatorname{arctg}\{2b|x|\,[(a^2-b^2)(x^2-a^2)]^{1/2}(2b^2x^2-a^2b^2-a^2x^2)^{-1}\}-\\ -|x|(x^2-a^2)^{-1/2}\end{gathered} \tag{2.3}$$

3. Пример 2. Исследуем задачу, когда посредине разреза на ее противоположных берегах приложены равные по величине и противоположно направленные сосредоточенные силы интенсивности P^0, т. е. когда $N(x)=P_0\delta(x)$, где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

Тогда из (2.2) и (2.3) получим соответственно

$$\varphi'(z)=\exp\{-(\lambda+2\mu)aP_0[4\pi\mu(\lambda+\mu)z(z^2-a^2)^{1/2}]^{-1}\} \tag{3.1}$$

$$\begin{gathered}N(x)=2\mu(\lambda+\mu)(A-1)(\lambda+\mu+\mu A)^{-1}\\ A\equiv\exp\{-(\lambda+2\mu)aP_0[4\pi\mu(\lambda+\mu)|x|(x^2-a^2)^{1/2}]^{-1}\}\end{gathered} \tag{3.2}$$

Выражения (2.3) и (3.2) дают распределение нормальных напряжений при $|x|\geqslant a$ без особенностей. А именно, указанные функции получают там хотя достаточно большие, но конечные значения. Кроме того, значения $N(x)$ на Γ' существенно зависят от упругих свойств рассматриваемого материала. Аналогичное явление имеет место при рассмотрении различных допустимых видах нагружений как на поверхности разреза, так и на бесконечности. По линейной же теории, как известно, нормальные напряжения в указанных сингулярных точках имеют особенность, что не соответствует действительности.

Отметим также, что в окрестностях концевых точек трещины конечные значения получают и компоненты тензора дисторсии, т. е. величины $\partial z^*/\partial z$, $\partial z^*/\partial\bar{z}$ $(\partial z^*/\partial\bar{z}=0$ при $|x|\geqslant a$, $b_0=0)$, а также нормальные составляющие тензора Пиолы (касательные составляющие этого тензора обращаются в нуль при $|x|\geqslant a$).

Аналогично предыдущему решается вторая задача, когда на краях разрезов заданы значения упругих смещений, а также смешанная задача, когда (скажем) на верхних краях щелей задаются внешние напряжения, а на нижних — смещения. Эти задачи, как и приведенные выше, в отличии от соответствующих линейных аналогов характеризуются тем, что приводят к распределению напряжений и смещений в замкнутой упругой области вне разрезов без особенностей [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *John F.* Plane strain problems for a perfectly elastic material of harmonic type // Communs Pure Appl. Math. 1960. V. 13. No. 2. P. 239–296.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
3. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
4. *Добoрджгинидзе Л. Г.* Комплексное представление смещений и напряжений для нелинейно-упругого материала гармонического типа // Тр. Тбил. мат. ин-та. 1979. Т. 61. С. 37–48.
5. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука. 1968. 511 с.
6. *Доборджгинидзе Л. Г.* Плоская контактная задача нелинейной теории упругости для упругой полуплоскости из материала гармонического вида // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 4. С. 96–100.

Тбилиси

Поступила в редакцию
15.XII.1987