МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1989

УДК 539.3.01

А. А. КУПРИЕНКО

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ДВУХФАЗНОГО КОМПОЗИТА СТОХАСТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ В ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

На основании отмеченной в [1] симметрии уравнений для плоских полей найдены эффективные модули упругости двухфазного композита стохастической структуры при статистической эквивалентности распределения фаз в плоскости изотропии. Даны решения плоской задачи теории упругости для случая изотропных фаз и для трех констант композита, образованного трансверсально-изотропными компонентами. Показана возможность применения методов теории протекания для описания критического поведения упругих систем с резко различающимися упругими свойствами. Рассмотрены случаи, когда самосогласованные решения совпадают с точными.

1. Эффективные модули в плоскости изотропии композита. Рассмотрим двухфазный композит в состоянии плоской деформации (материал, армированный волокнами) или в случае обобщенного плоского напряженного состояния (пластинка со случайно распределенными двумерными включениями). Концентрации обеих фаз равны, форма компонентов — произвольная, обеспечивающая статистически однородное и изотропное распределение их в плоскости. В обоих случаях локальные компоненты тензоров механических напряжений σ_{ik}, деформаций ξ_{ik} и локальные модули упругости $K(x_1, x_2)$, $\mu(x_1, x_2)$ композита будут функциями координат плоскости x_1, x_2. Основное предположение задачи — статистическая эквивалентность в распределении компонентов, благодаря которой в произвольной точке плоскости модули упругости с равной вероятностью принимают значения K_1, μ_1 или K_2, μ_2, соответствующие первому или второму компоненту.

Найдем эффективные модули упругости такой среды при эргодичности случайных полей материальных и полевых тензоров. Запишем систему определяющих уравнений плоской задачи в двух формах [2]:

$$\sigma_{ik}=2\mu\xi_{ik}+(k-\mu)\xi_{ll}\delta_{ik},\quad \xi_{ik}=(2\mu)^{-1}\sigma_{ik}+{}^1/_4(k^{-1}-\mu^{-1})\sigma_{ll}\delta_{ik}$$
$$(i,\ k,\ l=1,\ 2) \tag{1.1}$$

где μ — модуль сдвига, k — объёмный модуль, соответствующий дилатации в плоскости, причем

$$k=k_\xi=K+\mu/3=\mu(1-2\nu)^{-1}={}^1/_2(c_{11}+c_{12}) \tag{1.2}$$

в случае плоской деформации и

$$k=k_\sigma=9K\mu/(3K+4\mu)={}^1/_2\mathrm{E}(1-\nu)^{-1}={}^3/_2K(1-c_{12}/c_{11}) \tag{1.3}$$

для обобщенного плоского напряженного состояния; Е и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона изотропной среды, c_{ik} — тензор модулей упругости в матричной форме, K — модуль всестороннего сжатия. Перейдем к векторной записи системы (1.1), умножив оба уравнения на единичный вектор декартовой системы координат плоскости $\mathbf{i}_k$ $(k=1,\ 2)$:

$$\boldsymbol{\sigma}_i=2\mu\boldsymbol{\xi}_i+(k-\mu)\xi_{ll}\boldsymbol{\delta}_i,\quad \boldsymbol{\xi}_i=(2\mu)^{-1}\boldsymbol{\sigma}_i+{}^1/_4(k^{-1}-\mu^{-1})\sigma_{ll}\boldsymbol{\delta}_i \tag{1.4}$$

Эту систему следует дополнить уравнениями упругого равновесия $\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}_i=0$ и условиями совместности деформаций $\operatorname{Ink}\boldsymbol{\xi}=0$.

Используя преобразование симметрии для плоских полей [1], введем новые неизвестные функции путем поворота системы координат на $\pi/2$ вокруг нормали $\mathbf{n}$ к плоскости:

$$\boldsymbol{\sigma}_i'=2(\mu_1\mu_2)^{1/2}\mathbf{n}\times\boldsymbol{\xi}_i+[(k_1k_2)^{1/2}-(\mu_1\mu_2)^{1/2}]\xi_{ll}\mathbf{n}\times\boldsymbol{\delta}_i \tag{1.5}$$
$$\boldsymbol{\xi}_i'={}^1/_2(\mu_1\mu_2)^{-1/2}\mathbf{n}\times\boldsymbol{\sigma}_i+{}^1/_4[(k_1k_2)^{-1/2}-(\mu_1\mu_2)^{-1/2}]\sigma_{ll}\mathbf{n}\times\boldsymbol{\delta}_i$$

Из системы (1.5) найдем зависимости $\boldsymbol{\sigma}_i(\boldsymbol{\xi}_i', \xi_{ll}')$, $\boldsymbol{\xi}_i(\boldsymbol{\sigma}_i', \sigma_{ll}')$ и подставим в систему (1.4). Для этого умножим уравнения (1.5) справа векторно на $\mathbf{n}$. Далее, с учетом ориентации первоначальной и штрихованной систем координат ($\mathbf{i}_1=-\mathbf{i}_2'$, $\mathbf{i}_2=\mathbf{i}_1'$), связи тензорного и векторного представлений тензоров в них ($\sigma_{ik}=\boldsymbol{\sigma}_i\mathbf{i}_k$) легко получить следующие соотношения между свертками тензоров: $\sigma_{ll}=2(k_1k_2)^{1/2}\xi_{ll}'$, $\xi_{ll}={}^1/_2(k_1k_2)^{-1/2}\sigma_{ll}'$. Тогда окончательно для искомой зависимости имеем

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\sigma}_i=2(\mu_1\mu_2)^{1/2}\boldsymbol{\xi}_i'\times\mathbf{n}+[(k_1k_2)^{1/2}-(\mu_1\mu_2)^{1/2}]\xi_{ll}'\boldsymbol{\delta}_i\\ \boldsymbol{\xi}_i={}^1/_2(\mu_1\mu_2)^{-1/2}\boldsymbol{\sigma}_i'\times\mathbf{n}+{}^1/_4[(k_1k_2)^{-1/2}-(\mu_1\mu_2)^{-1/2}]\sigma_{ll}'\boldsymbol{\delta}_i\end{gathered} \tag{1.6}$$

Подстановка уравнений (1.6) в систему (1.4) дает следующие соотношения для штрихованных переменных: $\sigma_{12}'=2\mu'\xi_{12}'$; $\sigma_{ll}'=2k'\xi_{ll}'$, где $\mu'=\mu_1\mu_2/\mu$, $k'=k_1k_2/k$ и принимают соответственно значения μ_2 и μ_1, k_2 и k_1 в областях 1 и 2 двухфазной системы. Но по предположению эти области статистически неразличимы, поэтому закон Гука (1.1), (1.4) выполняется и для переменных со штрихом.

Осталось проверить выполнение уравнений упругого равновесия и условий совместности деформаций для штрихованных величин. Для плоской задачи они имеют следующий вид [3]:

$$\begin{gathered}\partial\sigma_{11}/\partial x_1+\partial\sigma_{12}/\partial x_2=0,\quad \partial\sigma_{12}/\partial x_1+\partial\sigma_{22}/\partial x_2=0\\ \partial^2\xi_{11}/\partial x_2^2+\partial^2\xi_{22}/\partial x_1^2=2\partial^2\xi_{12}/\partial x_1\partial x_2\\ \partial^2\xi_{33}/\partial x_1^2=\partial^2\xi_{33}/\partial x_2^2=\partial^2\xi_{33}/\partial x_1\partial x_2=0\end{gathered} \tag{1.7}$$

Подставим σ_{ik} из (1.6) в уравнения равновесия:

$$\begin{gathered}\partial\xi_{11}'/\partial x_1=-\partial\xi_{12}'/\partial x_2+({}^1/_2)[1-(k_1k_2/\mu_1\mu_2)^{1/2}]\partial\xi_{ll}'/\partial x_1\\ \partial\xi_{22}'/\partial x_2=-\partial\xi_{12}'/\partial x_1+({}^1/_2)[1-(k_1k_2/\mu_1\mu_2)^{1/2}]\partial\xi_{ll}'/\partial x_2\end{gathered} \tag{1.8}$$

Продифференцируем первое уравнение (1.8) по x_1, второе по x_2 и сложим, одновременно приводя переменные x_i к штрихованной системе координат ($x_1\to-x_2'$; $x_2\to x_1'$):

$$\begin{gathered}\partial^2\xi_{11}'/\partial x_2'^2+\partial^2\xi_{22}'/\partial x_1'^2=2\partial^2\xi_{12}'/\partial x_1'\partial x_2'+\\ +{}^1/_2[1-(k_1k_2/\mu_1\mu_2)^{1/2}]\Delta\xi_{ll}'\end{gathered}$$

Но $\Delta\xi_{ll}'=0$ [2, 3] и в результате получается условие совместности деформаций для штрихованных переменных. Представление ξ_{ll}' гармонической функцией обеспечивает также и выполнение последних трех равенств (1.7) в случае обобщенного плоского напряженного состояния.

Получим теперь из условий совместности деформаций уравнение, которому в равновесии должны удовлетворять компоненты тензора напряжений — уравнения Бельтрами — Мичелла [2, 3]. Подставим ξ_{ik} из (1.6) в третье уравнение (1.7), одновременно изменяя переменные дифференцирования:

$$\begin{gathered}\partial^2\sigma_{11}'/\partial x_2'^2+\partial^2\sigma_{22}'/\partial x_1'^2=2\partial^2\sigma_{12}'/\partial x_1'\partial x_2'+\\ +{}^1/_2[1+(\mu_1\mu_2/k_1k_2)^{1/2}]\Delta\sigma_{ll}'\end{gathered} \tag{1.9}$$

Поскольку же для изотропной среды $\Delta\sigma_{ll}'=0$ [2, 3], то уравнение (1.9) дает условие совместности напряжений в плоской задаче для линейно-упругого тела [3], которое выводится с учетом уравнений равновесия.

Таким образом, введенные неизвестные функции σ_{ik}' и ξ_{ik}' представляют собой действительное поле переменных решения, так как удовлетворяют всем условиям, обеспечивающим их термодинамически равновесное распределение.

Так как композит макроскопически однороден и изотропен, то проведенное выше рассмотрение справедливо и для средних по объему тензоров напряжений $\langle\sigma_{ik}\rangle$ и деформаций $\langle\xi_{ik}\rangle$ с тем же законом преобразования (1.5) при повороте системы координат. Поэтому, проводя аналогичное рассмотрение для усредненных тензоров, связанных эффективными свойствами среды $\langle\sigma_{ik}\rangle=2\mu^*\langle\xi_{ik}\rangle+(k^*-\mu^*)(\langle\xi_{11}\rangle+\langle\xi_{22}\rangle)\delta_{ik}$, получим $\mu^{*\prime}=\mu_1\mu_2/\mu^*$, $k^{*\prime}=k_1k_2/k^*$. Но так как $\mu^{*\prime}=\mu^*$, $k^{*\prime}=k^*$, то окончательно для эффективных модулей плоской задачи имеем

$$\mu^*=(\mu_1\mu_2)^{1/2},\quad k^*=(k_1k_2)^{1/2} \qquad (1.10)$$

Подставляя в (1.10) вместо k_1 и k_2 их соответствующие значения для плоской деформации (1.2) и обобщенного плоского напряженного состояния (1.3), найдем эффективный объёмный модуль для дилатации в плоскости изотропии и соответствующий поперечный модуль сдвига μ_T^*.

Следует подчеркнуть, что полученные решения являются точными, так как кроме предположения о статистической эквивалентности в распределении компонентов, обеспечивающего, кстати, статистическую однородность и изотропность композита, никаких дополнительных гипотез не привлекалось, а введенные функции, так же как и соответствующие выражения для усредненных тензоров удовлетворяют полной системе уравнений теории упругости.

2. Анализ самосогласованных решений. Интересно сравнить решения (1.10) с модельными, полученными, например, в рамках метода самосогласования [4]. Такое сравнение, проведенное для тензора второго ранга [1, 5] в случае, когда влияние форм-фактора исключено (компоненты в форме круга, коэффициенты деполяризации во всех направлениях равны $n_k={}^1/_2$), дает совпадающие статистическое [1] и модельное [5] решения при равной концентрации компонентов, что придает дополнительную уверенность в полученном результате, так как детерминированный подход физически более нагляден.

В теории упругости роль форм-фактора играет S-тензор Эшелби. Из [6] видно, что помимо формы включений S-тензор Эшелби зависит также от коэффициента Пуассона. Поэтому для исключения его влияния нужно рассматривать самосогласованную модель для частиц круговой формы из несжимаемого материала ($\nu=\nu_1=\nu_2={}^1/_2$). Для плоского случая согласно [6] имеем: $I_k=4\pi n_k$, $I_{kk}=\pi/a^2$, $I_{ik}=\pi/3a^2$, $i\neq k=1, 2$; $R=0$, $Q=3/(4\pi)$ и для коэффициента b работы [4] получаем значение $b={}^1/_2$. Тогда при равных концентрациях компонентов ($c_1=c_2={}^1/_2$) результат самосогласованного решения [4] для поперечного модуля сдвига совпадает с (1.10).

При сопоставлении результатов для k^* необходимо рассмотреть случай плоской деформации для дилатации в плоскости. Из закона Гука видно, что при $\nu={}^1/_2$ фактически реализуется состояние трехосного гидростатического сжатия, так как $\sigma_{33}=\nu(\sigma_{11}+\sigma_{22})=-p$ при $\sigma_{11}=\sigma_{22}=-p$. Поэтому точный результат для k^* (равного в этом случае K) необходимо сравнивать с самосогласованной трехмерной моделью [7] при $c_1=c_2={}^1/_2$, в которой с учетом форм-фактора для цилиндра необходимо взять $\beta^*=b={}^1/_2$ (что соответствует трансверсально-изотропному материалу с цилиндрическими включениями). Тогда $\alpha^*=3-5\beta^*={}^1/_2$ [7] и результаты самосогласованной модели совпадают с (1.10).

3. Перколяционные особенности двухфазной среды. Полученное точное решение (1.10) ограничено случаем двухфазного композита с равными концентрациями компонентов. Однако такое решение для тензора второго ранга позволило доказать наличие фазового перехода металл — диэлектрик в статистической смеси и найти критическую концентрацию $c_*={}^1/_2$ [1], получить соотношения взаимности в двумерной теории протекания [8] и установить изоморфизм ряда задач различной физической природы [9], дать независимое доказательство связи между критическими индексами теории протекания [8, 9].

Поведение упругих систем с отличающимися на несколько порядков упругими свойствами должно иметь общие черты с системами, описываемыми теорией протекания, так как для ряда характеристик точные результаты [1, 5, 8] имеют одинаковую аналитическую форму (1.10). Предварительные результаты были получены методом самосогласования [10, 11] в трехмерном случае для пор и жестких включений в несжимаемой матрице ($K_2=\infty$). В последнем случае $K^*=\infty$ и для модуля сдвига имеем следующее выражение

$$\mu^*=\mu_2(1-c/\beta^*)^{-1} \tag{3.1}$$

Здесь c — концентрация упругой среды с $\mu_2\neq\infty$ или 0, а $\beta^*={}^2/_5$ в трехмерном случае [7] и $\beta^*={}^1/_2$ в плоской задаче [4, 6]. Условие $c=\beta^*$ соответствует критической концентрации, при которой происходит резкое изменение эффективных свойств (своеобразный фазовый переход), причем $c_*^{(3)}=0{,}4$ и $c_*^{(2)}=0{,}5$. Таким образом, в трехмерном случае упругость («протекание») начинается раньше, что согласуется с общими представлениями теории протекания $-c_*^{(3)}<c_*^{(2)}$ [12], а точный результат для $c_*^{(2)}$, равный также 0,5, можно получить из (1.10), аналогично [1, 8]. Для случая пор с концентрацией $c_1=1-c$:

$$\mu^*=\mu_2(1-\beta^*-c_1)/(1-\beta^*)=\mu_2(c-\beta^*)/(1-\beta^*) \tag{3.2}$$

а зависимость K^* от μ^* тривиальна [7, 10] и будет иметь такую же особенность. Условие обращения μ^* в нуль имеет вид $c_*=\beta^*$, что дает совпадающие с предыдущими критические концентрации упругой фазы в среде со сферическими и цилиндрическими включениями соответственно.

Таким образом, критическая концентрация, соответствующая «фазовому переходу» (сжимаемость-несжимаемость, упругость-неупругость) определяется формой эффективного зерна — β^* («топологией бесконечного кластера» [12]). Согласно [13] сферическому эффективному зерну соответствует двухкомпонентная смесь случайно распределенных в пространстве изотропных включений произвольной формы, что тем более согласуется с (3.1), (3.2) и общей постановкой задачи в работе [10]. Однако при выводе формулы (3.2) в [10] предпринята попытка независимого определения β^* из уравнения для K^*, что дает $\beta^*=(2+c_1)/5$ и, следовательно, форма эффективного зерна (β^*) сильно зависит от концентрации пор, изменяясь от сферической при $c_1=0$, до цилиндрической при $c_1={}^1/_2$. Поэтому результат для пор в [10] соответствует трансверсально-изотропному композиту с цилиндрическими включениями.

4. Сопоставление с решениями для матричных систем. Интересно сравнить формулы (1.10) с расчетами для композитов регулярной структуры. В случае пор, простирающихся в изотропном материале непрерывно в одном направлении [14], эффективный модуль сдвига в поперечной плоскости, рассчитанный по методу [15] для квадратной ячейки, обращается в нуль при $c_1\simeq0{,}8$ — для круглой поры и при $c_1\simeq0{,}6$ — для квадратной, тогда как для композита стохастической структуры $c_*=0{,}5$ (1.10). Такое расхождение связано с тем, что в случае регулярной плоской решетки и при $c_1>0{,}5$ существует непрерывный каркас из материала матрицы, который и воспринимает нагрузку. То есть фазы композита не являются статистически эквивалентными. Пример статистически эквивалентной среды с регулярной структурой — структура типа шахматной доски [1, 8], для которой $c_*=0{,}5$ (1.10), а при увеличении концентрации пор происходит «смятие» решетки.

5. Эффективный модуль сдвига в направлении, ортогональном плоскости изотропии. Исходя из геометрических соображений рассмотренный в настоящей работе композит с точки зрения его эффективных свойств обычно считают трансверсально-изотропным [11, 16] даже при изотропных компонентах. Для полного его описания, помимо поперечного модуля сдвига μ_T^* и объёмного модуля для дилатации в плоскости изотропии

k^* (1.10), необходимо ещё определить модуль Юнга E_L^* в направлении, перпендикулярном этой плоскости, продольный модуль сдвига μ_L^* и коэффициент Пуассона ν_{LT}^*, характеризующий поперечное сжатие в плоскости изотропии при растяжении в нормальном к ней направлении.

Для определения μ_L^* расширим определение плоской задачи [16, 17]. Положим, что $\sigma_{3i}(x_1, x_2)\neq 0$, $\xi_{3i}(x_1, x_2)\neq 0$ ($i=1, 2$) и связаны законом Гука $\boldsymbol{\sigma}_3=2\mu\boldsymbol{\xi}_3$; локальный модуль сдвига изотропных компонентов $\mu=\mu(x_1, x_2)$ и с равной вероятностью принимает значения μ_1 или μ_2 в каждой точке среды. Уравнения равновесия и условия совместности деформаций будут иметь следующий вид:

$$\partial\sigma_{31}/\partial x_1+\partial\sigma_{32}/\partial x_2=0 \tag{5.1}$$
$$\partial^2\xi_{32}/\partial x_1^2-\partial^2\xi_{31}/\partial x_1\partial x_2=0,\quad \partial^2\xi_{31}/\partial x_2^2-\partial^2\xi_{32}/\partial x_1\partial x_2=0$$

Легко проверить, что введенные на плоскости функции

$$\boldsymbol{\sigma}_3'=2(\mu_1\mu_2)^{1/2}\mathbf{n}\times\boldsymbol{\xi}_3,\quad \boldsymbol{\xi}_3'={}^1/_2(\mu_1\mu_2)^{-1/2}\mathbf{n}\times\boldsymbol{\sigma}_3 \tag{5.2}$$

удовлетворяют закону Гука с модулем сдвига $\mu'=\mu_1\mu_2/\mu$. Условия совместности деформаций для штрихованных переменных получаются из уравнения равновесия (5.1) после подстановки напряжений (5.2) и поочередного дифференцирования по x_1 и x_2 с учетом поворота системы координат, а подстановка деформаций (5.2) в условия совместности (5.1) приводит к уравнениям, являющимся следствием уравнений равновесия (5.1) для штрихованных переменных. Повторяя аналогичную процедуру для средних тензоров $\langle\sigma_{3i}\rangle$ и $\langle\xi_{3i}\rangle$ приходим, как и ранее, к значению эффективного модуля сдвига

$$\mu_L^*=\mu_T^*=\mu^*=(\mu_1\mu_2)^{1/2} \tag{5.3}$$

Это означает, что несмотря на анизотропную геометрическую структуру композита с изотропными включениями, симметрия его эффективных упругих свойств остается изотропной, что согласуется с принципом Неймана о соотношении геометрической симметрии и симметрии физических свойств.

Таким образом, две независимые константы (1.10) упруго изотропного композита полностью описывают его эффективные свойства. Другие константы композита можно получить из соотношений между упругими модулями (1.2), (1.3). Заметим попутно, что решение (5.3) совпадает с самосогласованным решением [4] для продольного модуля сдвига при $c_1=c_2={}^1/_2$ безо всяких оговорок, что подтверждает в основном статистический характер вывода этой формулы в [4].

6. **Частное решение для модуля всестороннего сжатия.** В силу симметрии тензора напряжений (деформаций) должно существовать преобразование координат и для тензора σ_{i3} (ξ_{i3}), приводящее к такому же соотношению для эффективного модуля сдвига — (5.3). Легко проверить, что таким преобразованием может быть инверсия I в плоскости X_1X_2 (инверсия — преобразование координат, переводящее вектор $\mathbf{r}$ в вектор $-\mathbf{r}$ [18]).

С учетом этого результата еще расширим определение плоской задачи, положив $\sigma_{33}(x_1, x_2)\neq 0$, $\xi_{33}(x_1, x_2)\neq 0$. Тогда закон Гука, подобно (1.4), можно записать в трехмерной форме, а новые неизвестные функции будут иметь вид:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\sigma}_\alpha'=2(\mu_1\mu_2)^{1/2}I\boldsymbol{\xi}_\alpha+[(K_1K_2)^{1/2}-{}^2/_3(\mu_1\mu_2)^{1/2}]\xi_{ll}I\delta_\alpha\quad(\alpha, l=1, 2, 3)\\ \boldsymbol{\xi}_\alpha'={}^1/_2(\mu_1\mu_2)^{-1/2}I\boldsymbol{\sigma}_\alpha+{}^1/_3[({}^1/_3)(K_1K_2)^{-1/2}-{}^1/_2(\mu_1\mu_2)^{-1/2}]\sigma_{ll}I\delta_\alpha\end{gathered} \tag{6.1}$$

Все необходимые уравнения упругого поля уже выписаны (1.7), (5.1). Функции (6.1) удовлетворяют закону Гука в штрихованных переменных с упругими модулями $\mu'=\mu_1\mu_2/\mu$, $K'=K_1K_2/K$. При статистической эквивалентности фаз в плоскости X_1X_2 и изотропности композита в целом последние равенства порождают соотношения для эффективного модуля сдвига (5.3) и модуля всестороннего сжатия

$$K^*=(K_1K_2)^{1/2} \tag{6.2}$$

Однако подстановка функций (6.1) в уравнения равновесия и условия совместности показывает, что равенство (6.2) справедливо лишь при $\nu_1=\nu_2$, что является отражением условий совместности продольных деформаций и напряжений для многосвязного тела. Ограничение дает последнее условие совместности (1.7), требующее линейности σ_{33} и ξ_{33} от x_1 и x_2. Это вполне естественное в плоской теории упругости условие в общем не реализуется для многосвязного трехмерного тела, так как функции $\sigma_{33}(x_1, x_2)$ и $\xi_{33}(x_1, x_2)$ при переходе через границу компонентов согласно закону Гука будут испытывать скачок. Поэтому для обеспечения последнего условия совместности (1.7) очевидно необходимо, чтобы при изменении поперечных размеров образца продольные деформации (напряжения) на границе компонентов совпадали. Это и означает равенство коэффициентов Пуассона. При этом условии формула (6.2) дает эффективный модуль всестороннего сжатия трехмерного композита с геометрией и функциями состояния, удовлетворяющими расширенной постановке плоской задачи. При этом также решение (6.2) обращает формулы связи (1.2), (1.3) для эффективных объемных модулей плоской задачи и модуля всестороннего сжатия в тождества.

Обобщение результатов (1.10), (5.3) на случай трансверсально-изотропных компонентов с параллельными оси X_3 осями симметрии очевидно, в силу независимости продольного и поперечного сдвигов. Для определения остальных констант трансверсально-изотропного композита можно, например, воспользоваться формулами [4], полученными на основе однородного приближения для упругого поля в каждом компоненте.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дыхне А. М.* Проводимость двумерной двухфазной системы // Ж. эксперим. и теорет. физики. 1970. Т. 59. Вып. 1. С. 110–115.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с.
3. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1984. 560 с.
4. *Hill R.* Theory of mechanical properties of fibre-strengthened materials-III. Self-consistent model // J. Mech. and Phys. Solids. 1965. V. 13. No. 4. P. 189–198.
5. *Швидлер М. И.* Статистическая гидродинамика пористых сред. М.: Недра, 1985. 288 с.
6. *Эшелби Дж.* Континуальная теория дислокаций. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 247 с.
7. *Hill R. A.* A self-consistent mechanics of composite materials // J. Mech. and Phys. Solids. 1965. V. 13. No. 4. P. 213–222.
8. *Балагуров Б. Я.* Соотношения взаимности в двумерной теории протекания // Ж. эксперим. и теорет. физики. 1981. Т. 81. Вып. 2. С. 665–671.
9. *Балагуров Б. Я.* Об изоморфизме некоторых задач теории протекания // Ж. эксперим. и теорет. физики. 1983. Т. 85. Вып. 2. С. 568–584.
10. *Budiansky B.* On the elastic moduli of some heterogeneous materials // J. Mech. and Phys. Solids. 1965. V. 13. No. 4. P. 223–227.
11. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 334 с.
12. *Шкловский Б. И., Эфрос А. Л.* Теория протекания и проводимость сильно неоднородных сред // Успехи физ. наук. 1975. Т. 117. Вып. 3. С. 401–435.
13. *Шермергор Т. Д.* Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 399 с.
14. *Горбачев В. И.* Задача приведения для упругого пространства, ослабленного системой цилиндрических пор // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. Вып. 5. С. 63–67.
15. *Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
16. *Ванин Г. А.* Микромеханика композиционных материалов. Киев: Наук. думка, 1985. 302 с.
17. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
18. *Любарский Г. Я.* Теория групп и ее применение в физике. М.: Гостехиздат, 1957. 356 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию 23.V.1988