МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1989

УДК 539.3

А. И. ГАСАНОВ, А. Б. ЕФИМОВ, М. М. ХАПАЕВ

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВНУТРЕННЕМ СЖАТИИ УПРУГИХ ТЕЛ

Задачи контактного взаимодействия упругих тел в плоской постановке обычно сводятся к сингулярным интегральным уравнениям на разомкнутых контурах. Как правило, область контакта неизвестна и должна определяться одновременно с решением уравнений из дополнительных условий. Для определения неизвестной границы области контакта обычно принимается требование обращения в нуль контактного давления в граничных точках (см., например [1–3]). Развитие методов численного решения сингулярных интегральных уравнений, в частности, метода граничных интегральных уравнений и метода дискретных вихрей, позволяет ставить задачу прямого численного решения основных интегральных уравнений плоских контактных задач с неизвестной областью контакта.

Предлагаемый подход использует разработанную в [4] теорию и алгоритмы решения сингулярных интегральных уравнений. На примере задачи о контакте упругого цилиндра, вставленного в отверстие в упругом теле с радиусом, близким к радиусу цилиндра, строится и обосновывается алгоритм вычисления области контакта и контактного давления. Дается сравнение с известным аналитическим решением.

1. Постановка задачи. Контактная задача о внутреннем сжатии упругих тел с круговыми границами при отсутствии трения приводит к решению интегродифференциального уравнения [5–6] следующего вида:

$$\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p^{\bullet}(\xi)\,\mathrm{ctg}\frac{\varphi-\xi}{2}\,d\xi-2\pi\gamma_1 p(\varphi)-\gamma_3\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p(\xi)\,d\xi=(8\pi\delta G_1\gamma_4)/R+(4\gamma_2/R)P_0\cos\varphi \tag{1.1}$$

$$\begin{gathered}\gamma_1=[(1-\varkappa_1)G_2-(1-\varkappa_2)G_1]/[(1+\varkappa_1)G_2+(1+\varkappa_2)G_1]\\ \gamma_2=(\varkappa_1G_2+G_1)/[(1+\varkappa_1)G_2+(1+\varkappa_2)G_1]\\ \gamma_3=(1+\varkappa_1)G_2/[(1+\varkappa_1)G_2+(1+\varkappa_2)G_1]\\ \gamma_4=G_2/[(1+\varkappa_1)G_2+(1+\varkappa_2)G_1]\\ G_k=E_k[2(1+\nu_k)]^{-1},\quad \varkappa_k=3-4\nu_k\quad (k=1,2)\end{gathered} \tag{1.2}$$

где E_1, E_2 и ν_1, ν_2 – модули упругости и коэффициенты Пуассона внешней и внутренней областей, соответственно, R – радиус внутреннего тела, $\delta>0$ – начальный зазор в радиальном направлении, – φ_0 и φ_0 – угловые координаты границы неизвестной области контакта. Предполагается, что внутреннее тело прижимается к границе кругового отверстия силой P_0 (фигура), которая уравновешивается контактным давлением $p(\varphi)$:

$$P_0=R\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0}\cos\varphi\, p(\varphi)\,d\varphi \tag{1.3}$$

Задача состоит в отыскании контактного давления и неизвестной области контакта.

2. Метод решения. Уравнение (1.1) содержит как функцию $p(\psi)$, так и ее производную $p^{\bullet}(\varphi)$. Его можно свести к сингулярному интегральному уравнению относительно $p(\varphi)$, либо относительно $p^{\bullet}(\varphi)$. Воспользуемся вторым подходом, так как он представляется более простым.

Из условия ограниченности контактного давления следует, что $p(\varphi)=p(-\varphi)=0$. Следовательно

$$p(\varphi)=\int_{-\varphi_0}^{\varphi}p^{\cdot}(\xi)\,d\xi,\qquad \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0}p(\xi)\,d\xi=-\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0}\xi p^{\cdot}(\xi)\,d\xi$$

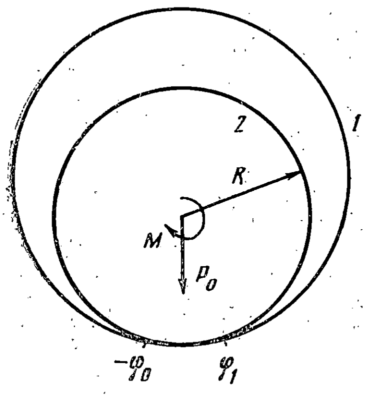
$$\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0}\cos\varphi p(\varphi)\,d\varphi=-\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0}\sin\varphi p^{\cdot}(\varphi)\,d\varphi$$

и из уравнения (1.1) с учетом (1.3) имеем следующую систему:

$$\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0}p^{\cdot}(\xi)\operatorname{ctg}\frac{\varphi-\xi}{2}\,d\xi-2\pi\gamma_1\int_{-\varphi_0}^{\varphi}p^{\cdot}(\xi)\,d\xi+$$
$$+\gamma_3\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0}\xi p^{\cdot}(\xi)\,d\xi=(8\pi\delta G_1\gamma_4)/R+(4\gamma_2/R)P_0\cos\varphi \tag{2.1}$$

$$\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0}p^{\cdot}(\xi)\,d\xi=0,\qquad F(\varphi_0)=\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0}\sin\varphi p^{\cdot}(\varphi)\,d\varphi+P_0/R=0$$

Первое уравнение системы (2.1) является сингулярным интегральным уравнением с ядром Коши и интегрированием по разомкнутой линии (подчеркнем, что во втором слагаемом верхний предел интегрирования является переменным). Его решение определяется единственным образом, для любого $\varphi_0>0$. Для построения дискретного аналога задачи (2.1) применим схему [4], которая характеризуется хорошей точностью и простотой реализации. Для этого функцию $p^{\cdot}(\xi)$ представим в виде $p^{\cdot}(\varphi_0 x)=\psi(x)/(1-x^2)^{-0,5}$, $-1\leqslant x\leqslant 1$, $\varphi_0 x=\xi$, а функцию $\psi(x)$ приближенно определим в узлах сетки $\{t_j=\cos[\pi(j-0,5)/N]\}$. Пусть $\tau_i=\cos(\pi i/N)$. Тогда аппроксимация данной задачи по методу дискретных вихрей дает систему



$$\frac{\varphi_0\pi}{N}\sum_{j=1}^{N}\operatorname{ctg}\left(\varphi_0\frac{\tau_i-t_j}{2}\right)\psi_j-2\pi\gamma_1\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0\tau_i}p^{\cdot}(\xi)\,d\xi+$$
$$+\gamma_3\frac{\varphi_0\pi}{N}\sum_{j=1}^{N}\varphi_0 t_j\psi_j=$$
$$=\frac{8\pi\delta G_1\gamma_4}{R}+\frac{4\gamma_2P_0}{R}\cos(\varphi_0\tau_i) \tag{2.2}$$

$$F_N(\varphi_0)=\frac{P_0}{R}+\frac{\varphi_0\pi}{N}\sum_{j=1}^{N}\psi_j\sin(\varphi_0 t_j)=0$$

а второе соотношение (2.1) аппроксимируется следующим образом:

$$\frac{\varphi_0\pi}{N}\sum_{j=1}^{N}\psi_j=0$$

φ/φ_0	1	2	3	4	5
0	240,23	1348	1644	364,4	306,4
0,16	235,71	1332	1623	359,9	302,6
0,31	222,63	1282	1563	346,6	291,1
0,45	202,39	1201	1464	324,7	272,8
0,59	176,89	1091	1330	394,8	247,5
0,71	148,18	953,4	1162	257,7	216,2
0,81	118,03	792,5	966,0	214,2	179,6
0,89	87,71	612,1	746,1	165,4	138,6
0,95	57,89	416,6	507,9	112,6	942,4
0,99	28,73	210,9	257,1	57,0	476,8
1,00	0	0	0	0	0

Для аппроксимации интегрального слагаемого в (2.2) применим формулу

$$\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0\tau_i} p^*(\xi)\,d\xi \approx \frac{\varphi_0\pi}{N}\sum_{j=1}^{i}\psi_j$$

Для определения области границы контакта, т. е. величины φ_0, строится итерационный процесс метода секущих [7]:

$$\varphi_0^{(k+1)}=\varphi_0^{(k)}-(\varphi_0^{(k)}-\varphi_0^{(k-1)})F_N(\varphi_0^{(k)})\,[F_N(\varphi_0^{(k)})-F_N(\varphi_0^{(k-1)})]^{-1}$$

$$\varphi_0^{(0)}=0{,}5\pi,\qquad \varphi_0^{(1)}=0{,}5\pi-0{,}2$$

а на каждом шаге решается система линейных алгебраических уравнений (2.2).

3. Результаты расчета. В качестве тестового расчета сначала по предложенному методу было решено уравнение (1.1) в случае, когда отсутствует зазор между телами, и они имеют одинаковые упругие свойства, т. е. $\delta=0$, $\gamma_1=0$. Аналитическое решение такого уравнения приведено в [5]. По данным [5] $\varphi_0=1{,}4809$, а максимальное контактное давление $p(0)=238{,}8$. В наших расчетах при $N=20$ оказалось $\varphi_0=1{,}4805$, $p(0)=240{,}23$. Значения контактного давления приведены в столбце 1 таблицы. При этом для нахождения неизвестной области контакта с машинной точностью потребовалось 5—6 итераций. При $N=40$ для решения этой задачи потребовалось примерно такое же количество итераций. При этом $\varphi_0=1{,}4809$, $p(0)=239{,}85$. Следовательно, относительная погрешность нахождения контактного давления составляет около 0,5%, что и является точностью предложенных алгоритмов. В расчетах принимались следующие данные: $E_1=E_2=2{,}06\cdot10^5$ МПа; $\nu_1=\nu_2=0{,}3$; $R=0{,}005$ М; $P_0=196$ Н.

С целью изучения влияния зазора на характер распределения контактного давления проводились расчеты в случае, когда $N=20$, $\delta_1=6\cdot10^{-5}$ М и $\delta_2=9\cdot10^{-5}$ М, при остальных данных, указанных выше. Полуширина области контакта при этом равна, соответственно, $\varphi_0[\delta_1]=0{,}1899$, $\varphi_0[\delta_2]=0{,}1556$. Для указанных данных в столбцах 2 и 3 таблицы показаны значения контактного давления в узлах t_i ($N=20$), начиная с центра области контакта. Нетрудно видеть, что даже сравнительно малые значения зазора приводят к совершенно иным результатам по сравнению со случаем $\delta=0$. Дальнейшее увеличение зазора ($\delta=9\cdot10^{-5}$ М) по сравнению с предыдущими результатами несколько уменьшает значения угла контакта и, соответственно, увеличивает значения контактного давления в соответствующих узлах сетки.

Представляет интерес изучение влияния различных модулей упругости вала и втулки на характер распределения контактного давления и угла контакта. Это важно еще и потому, что многие приближенно-аналитические формулы получены для случая $\gamma_1=0$, что имеет место при $E_1=E_2$. В таблице приведено значение контактного давления для материалов $E_1=E_2=2{,}06\cdot10^5$ МПа (столбец 4) и $E_1=2{,}06\cdot10^5$ МПа, $E_2=1{,}08\cdot10^5$

МПа (столбец 5) (здесь $N=20$; $\nu_1=\nu_2=0,3$; $R=0,0185$ М; $P_0=196$ Н; $\delta=6^{-5}\cdot 10$ М). Отличие полученных результатов составляет 20%, что и есть точность соответствующих аналитических формул. При этом $\varphi_0=0,1899$ – для случая $E_1=E_2$ и $\varphi_0=0,2266$ – для случая $E_1\neq E_2$.

В данной работе для решения нелинейного уравнения применен метод секущих. С методом секущих в некоторых задачах связано явление «разболтки» счета [7]. В наших расчетах этого явления не возникало. Способы устранения разболтки приведены в [7].

Приближенное решение задачи с трением можно получить ([5]) из построенных выше решений задачи без трения смещением области контакта на угол $\beta=\operatorname{arctg}\rho$ (ρ – коэффициент трения) в сторону, противоположную действию момента (фигура). Более точное решение задачи с трением может быть получено с помощью модификации предложенного выше алгоритма. Соответствующие уравнения приведены в [5–6].

Необходимо отметить, что сходные постановки задач встречаются и в других разделах теории упругости. Такие задачи включают в себя некоторые сингулярные интегральные уравнения или уравнения со слабой особенностью, неизвестную границу области контакта и нелинейные уравнения для определения этих границ. Известны работы (см., например, [8]), в которых указанные задачи решаются численно. В данной работе, в отличие от [8], применяются более точные для рассматриваемого класса задач схемы со сгущением сетки к краям отрезка интегрирования [9].

Авторы выражают признательность Ю. Н. Дроздову и И. К. Лифанову за полезные обсуждения и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Развитие теории контактных задач в СССР/Под ред. Галина Л. А., М.: Наука, 1976. 493 с.
2. *Малый В. И., Ефимов А. Б., Воробьев В. Н.* О решении пространственных контактных задач теории упругости // Докл. АН СССР. 1973. Т. 209. № 2. С. 316–319.
3. *Гасанов А. И.* Численный метод решения контактной задачи теории упругости при отсутствии сил трения // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 7. С. 1156–1161.
4. *Белоцерковский С. М., Лифанов И. К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М., Наука, 1985. 253 с.
5. *Теплый М. И.* Контактные задачи для областей с круговыми границами. Львов. Вища шк., 1983. 176 с.
6. *Коровчинский М. В.* О некоторых вопросах эластореологии, имеющих приложение в теории износа // Трение и износ в машинах. М.: Изд-во АН СССР, 1962. Т. 17. С. 121–164.
7. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
8. *Кудиш И. И.* Численные методы решения одного класса нелинейных интегральных и интегродифференциальных уравнений // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1986. Т. 26. № 10. С. 1493–1511.
9. *Хапаев М. М.* Численный метод для одной контактной задачи // Метод дискретных особенностей в задачах математической физики и его роль в развитии численного эксперимента на ЭВМ. Харьков. 1987. С. 168–169.

Москва

Поступила в редакцию 3.III.1987