

УДК 539.3

М. Д. НИКОЛЬСКИЙ

## О ПОСТАНОВКЕ И ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Постановки нелинейных задач теории упругости отличаются большим разнообразием [1, 2]. Предлагается относительно простая, достаточно общая и удобная при численном решении задач постановка, основанная на лагранжевом описании в метрике натурального состояния системы и использовании нового понятия о секущей жесткости материала. Закон состояния Джона для полулинейного материала рассматривается как естественное обобщение закона Гука на геометрически нелинейные задачи, в которых деформации предполагаются малыми, а повороты элементов — конечными [2, 3].

Линеаризация задач нелинейной теории упругости основывается на определении и использовании понятий о касательной и секущей жесткости материала. Эти понятия естественным образом появляются при использовании метода Ньютона — Канторовича [4] для решения функциональных уравнений нелинейной теории упругости в приведенной здесь постановке. В публикуемой работе показано, что касательная жесткость полулинейного материала в его натуральном состоянии совпадает с жесткостью материала Гука. Для решения линейных задач, возникающих на каждом шаге итерационного процесса Ньютона, в работе используется метод конечных элементов [5, 6].

**1. Постановка задачи.** Рассматривается изотропное упругое твердое тело, которое в натуральном ненапряженном состоянии занимает объем  $\Omega$ , ограниченный поверхностью  $\Gamma$ . Лагранжево описание поведения тела под воздействием статической «мертвой» нагрузки выполняется в метрике натурального состояния. Если в натуральном состоянии тело имеет известное начальное положение во внешнем пространстве, то материальные координаты —  $\xi_i$ , внешние пространственные координаты —  $x_i$  и перемещения материальных точек —  $u_i$  связаны между собой соотношением:  $x_i = \xi_i + u_i$ . Однако для геометрически изменяемых систем начальное положение до нагружения не определено, а для систем с предварительным напряжением положение материальных точек в начальном состоянии заранее неизвестно. Поэтому понятие о перемещениях материальных точек не всегда определено и основными неизвестными задач теории упругости являются пространственные координаты материальных точек тела в текущем деформированном состоянии —  $x(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ .

Условия непрерывности деформаций тела сводятся к утверждению о существовании кусочно-непрерывных производных  $\partial x_i / \partial \xi_j$  или несимметричного тензора-градиента  $g = \nabla x$ . Область определения оператора  $\nabla$  составляют непрерывные функции  $x(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , удовлетворяющие заданным граничным условиям на части  $\Gamma_1$  граничной поверхности тела. Условия равновесия, записанные в метрике натурального состояния тела, имеют вид [2]:  $-\nabla \cdot s = p_0$  (в  $\Omega$ ),  $n \cdot s = p_n$  (на  $\Gamma_2$ ), где  $s$  — несимметричный тензор номинальных напряжений, а интенсивность мертвых объемных ( $p_0$ ) и поверхностных ( $p_n$ ) сил отнесены к натуральному объему и поверхности тела. В энергетическом гильбертовом пространстве [4, 5] уравнения равновесия определяются линейным оператором  $\nabla^*$ , сопряженным с оператором  $\nabla$ .

Тензор-градиент  $g$  и тензор номинальных напряжений  $s$  составляют энергетически сопряженную пару [2] и закон состояния материала определяется нелинейным оператором  $s = S(g)$  или  $s = dW/dg$ , где  $W$  — упру-

гий потенциал или плотность энергии деформации в расчете на единицу натурального объема. Тогда разрешающее операторное уравнение нелинейной теории упругости в координатах представляется в виде суперпозиции трех операторов

$$\nabla^* [S(\nabla x)] = p \quad (1.1)$$

из которых только оператор  $S$  нелинеен. Это уравнение представляет собой условие стационарности функционала полной энергии деформации тела [3].

**2. Секущая жесткость материала.** Пара сопряженных тензоров  $s, g$  зависит не только от деформации, но и от поворота материальной частицы. Упругий потенциал изотропного материала  $W$  от поворотов частиц не зависит и определяется через инварианты деформации. Используя полярное разложение тензора  $g$  [2], получаем определение мер деформации

$$g = Q \cdot \Lambda, \quad \Lambda = (g^r \cdot g)^{1/2}, \quad G = \Lambda^2 \quad (2.1)$$

где  $\Lambda$  — тензор кратности удлинений (мера деформации Коши),  $G$  — мера деформации Грина,  $Q$  — ортогональный тензор направляющих косинусов координатных векторов в деформированном положении тела.

Энергетически сопряженными с мерами деформаций  $\Lambda$  и  $G$  являются [2, 3] соответственно тензор напряжений Яуманна — Био  $\sigma = dW/d\Lambda$  и симметричный (второй) тензор напряжений Пиола — Кирхгофа  $\theta = 1/2 dW/dG$ . Из определения тензоров  $s, \sigma, \theta$ , соотношений (2.1) вытекают уравнения

$$s = \theta \cdot g^r, \quad \sigma = \theta \cdot \Lambda \quad (2.2)$$

которые определяют закон состояния материала в квазилинейной форме. Тензор Пиола — Кирхгофа  $\theta$  в уравнениях (2.2) определяет зависимость между элементами энергетически сопряженных пар  $s, g$  и  $\sigma, \Lambda$ . Компоненты этого тензора имеют размерность напряжений, но физически интерпретируются как параметры жесткости материала. Подстановка (2.2) в (1.1) приводит к разрешающим уравнениям теории упругости в квазилинейной форме

$$\nabla^* (\theta \cdot \nabla x^r) = p \quad (2.3)$$

В фиксированном текущем состоянии тела (состоянии  $K$ ) тензор  $\theta_k$  определяет линейную зависимость между напряжениями  $s_k$  и градиентом  $\nabla x_k$  и в дальнейшем называется тензором секущей жесткости материала. При изменении положения тела и его деформации секущая жесткость материала изменяется, что и обуславливает нелинейность задачи (2.3). Определение тензора  $\theta$  через упругие константы материала и вектор  $x$  задает закон состояния материала.

**3. Геометрически нелинейные задачи.** Предполагается, что в начальном положении тело имеет натуральное состояние, для которого  $\Lambda = Q = I$ , где  $I$  — единичный тензор. Тогда можно ввести тензор деформации Коши  $\varepsilon = \Lambda - I$ , тензор поворотов  $\omega = Q - I$  и тензор деформации Грина  $E = (G - I)/2$ . Используя (2.1) и соотношение  $g = \nabla u + I$ , можно записать

$$\nabla u = \varepsilon + \omega + \omega \cdot \varepsilon \quad (3.1)$$

Главные значения тензора деформации Коши определяют относительные удлинения волокон в главных направлениях, тогда как главные значения тензора Грина  $E_i$  непосредственного физического смысла не имеют. При малых деформациях и углах поворота элемента тензоры  $\varepsilon$  и  $E$  совпадают с тензором линейной деформации  $e = (\nabla u + \nabla u^r)/2$ . Однако деформации Коши совпадают с линейными деформациями и при конечных удлинениях, если отсутствуют повороты элементов, что непосредственно следует из (3.1) при  $\omega = 0$  и  $\nabla u = \nabla u^r$ .

Закон состояния Джона для полулинейного материала [1—3] определяет линейную зависимость в форме закона Гука между напряжениями Яуманна — Био и деформациями Коши:  $\sigma = \lambda J_1 I + 2\mu \varepsilon$ , где  $\lambda, \mu$  — упругие постоянные Ляме, а  $J_1$  — первый инвариант тензора  $\varepsilon$ . Эта зависимость может быть представлена в форме (2.2), если секущая жесткость (тен-

зор Пиола — Кирхгофа —  $\theta$ ) определяется выражением

$$\theta = [\lambda J_1 - 2\mu] \Lambda^{-1} + 2\mu I \quad (3.2)$$

Зависимость между номинальными напряжениями  $s$  и градиентом  $g$  при этом является нелинейной, если деформации происходят с изменением главных направлений. При отсутствии поворотов  $\omega = 0$  имеем:  $\varepsilon = e = \nabla u = -\nabla u^r$ ,  $\sigma = s = s^r$  и закон Дюна тождественен с законом Гука. Таким образом, нелинейность поведения полулинейного материала связана исключительно с поворотами материальных частиц и закон состояния Дюна является естественным обобщением закона Гука на геометрически нелинейные задачи [3].

В [2] полулинейный материал называется стандартным материалом первого порядка. Наряду с ним рассматривается стандартный материал второго порядка, основанный на законе состояния, определяющем линейную зависимость в форме закона Гука между вторым тензором Пиола — Кирхгофа и деформациями Грина. Такой материал часто используется в практических расчетах [6] при решениях геометрически нелинейных задач. Однако при отсутствии поворотов и конечных деформациях стандартный материал второго порядка не тождественен с материалом Гука, а нелинейность его поведения связана не только с поворотами материальных частиц.

**4. Касательная жесткость материала.** Предполагается, что в каждой точке области определения задачи (1.1) нелинейный оператор  $S$  имеет непрерывную производную Гато  $S'_k$ . Линейный оператор  $S'_k$  определяет касательный закон состояния материала в текущем положении тела

$$s^k = S'_k(\nabla u^k), \quad s_{ij}^k = r_{ijmn}^k \partial u_m^k / \partial \xi_n \quad (4.1)$$

где  $u^k$  — вектор перемещений материальных точек, из секущего состояния  $K$ ,  $s^k$  — приращения номинальных напряжений, а параметры касательной жесткости материала в состоянии  $K$  —  $r_{ijmn}^k$  определяются производными

$$r_{ijmn}^k = (\partial s_{ij} / \partial g_{mn})_k = (\partial^2 W / \partial g_{ij} \partial g_{mn})_k \quad (4.2)$$

Касательная жесткость материала может быть использована при решении нелинейной задачи (1.1) методом последовательных нагружений [6]. При этом на каждом шаге нагружения решается линейная задача

$$\nabla^* [S'_k(\nabla u^k)] = \Delta p_k \quad (4.3)$$

где  $\Delta p_k$  — приращение нагрузки. Однако более строгий и последовательный подход к численному решению задач нелинейной теории упругости связан с применением метода Ньютона — Канторовича [4] непосредственно к функциональному уравнению (1.1). Это позволяет построить последовательность приближенных решений задачи (1.1) в виде:  $x_{k+1} = x_k + u_k$ , где перемещения  $u_k$  определяются из решения линейной задачи (4.3), в которой приращения нагрузки на каждом шаге итерационного процесса вычисляются с учетом (2.3) в виде

$$\Delta p_k = p - \nabla^* (\theta_k \cdot \nabla x_k^r) \quad (4.4)$$

где  $p$  — заданная нагрузка, а  $\theta_k$  — секущая жесткость материала в текущем состоянии  $K$ . Условия, при которых последовательность  $x_0, x_1, x_2, \dots$  сходится к точному решению  $x$  задачи (1.1), подробно рассматриваются в [4].

Если в начальном положении тела его состояние и является натуральным, то секущая жесткость материала равна нулю, а касательная жесткость полулинейного материала совпадает с жесткостью материала Гука. Это позволяет рассматривать решение задач линейной теории упругости как первый шаг итерационного процесса Ньютона в геометрически нелинейных задачах для полулинейного материала.

5. Гибкие нити и шарнирно-стержневые системы. Особенность задачи о расчете гибкой нити заключается в том, что исследуемая область одномерна и материальные точки нити определяются одной координатой  $\xi$ , тогда как их положение в пространстве определяется вектором  $x(\xi)$ . При этом меры деформации Коши и Грина суть скалярные величины, тогда как градиент координат есть вектор:  $g = dx/d\xi$ ,  $G = \Lambda^2 = g \cdot g$ . Значение секущей жесткости нити определяется соотношением между скалярным значением продольной силы  $T$  и кратностью удлинения  $\Lambda$ , а также соотношением между вектором внутренних усилий  $s$  и градиентом координат  $g$ ;  $T = \theta \Lambda$ ,  $s = \theta g$ ,  $T^2 = s \cdot s$ . Для материала Гука имеем ( $EF$  — жесткость сечения нити):

$$W = (1/2)EF(\Lambda - 1)^2, \quad \theta = EF(1 - \Lambda^{-1}) \quad (5.1)$$

Для случая деформации нити из материала Гука в плоскости  $x, y$  касательная жесткость нити в соответствии с (4.2) и (5.1) определяется в виде

$$\begin{aligned} r_{11} &= \theta_k + (EF/\Lambda_k) \cos^2 \chi_k, & r_{22} &= \theta_k + (EF/\Lambda_k) \sin^2 \chi_k \\ r_{12} &= r_{21} = (EF/\Lambda_k) (\cos \chi_k) (\sin \chi_k) \\ \cos \chi_k &= (dx_h/d\xi)/\Lambda_k, & \sin \chi_k &= (dy_h/d\xi)/\Lambda_k \end{aligned} \quad (5.2)$$

В натуральном состоянии нити  $\Lambda_0 = 1$ ,  $\theta_0 = 0$  и (5.2) совпадает с жесткостью элемента шарнирно-стержневой системы в линейных задачах строительной механики.

Для расчета шарнирно-стержневых систем и гибких нитей автором составлена программа, реализующая метод Ньютона. Решение линейных задач типа (4.3), возникающих на каждом шаге алгоритма выполняется на основе метода конечных элементов [5, 6]. Матрицы касательной и секущей жесткостей элементов построены с использованием зависимости (5.2). Для иллюстрации основных положений, связанных с постановкой геометрически нелинейных задач в настоящей работе, приведем некоторые результаты расчетов плоских ферм.

На фиг. 1, а приведена расчетная схема симметричной арочной фермы, нагруженной сосредоточенной силой  $P$ . Пояса фермы очерчены по окружности;  $EF = 10^5$  кН,  $l = 30$  м. В данной задаче начальное положение фермы полностью определяется как натуральные длины ее элементов, так и начальное приближение  $x_0$  при ее расчете по методу Ньютона. На фиг. 1, б представлена зависимость координаты  $y_p$  точки приложения силы от величины  $P$  этой силы.

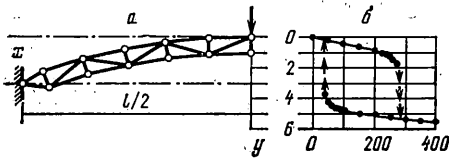
На фиг. 2, а приведена схема мгновенно-изменяемой вантовой фермы, нагруженной сосредоточенной силой  $P$ . Верхний пояс фермы очерчен по параболе; жесткость ее элементов  $EF = 10^5$  кН. Приведенная схема определяет натуральные длины элементов, но не может быть использована в качестве начального приближения  $x_0$  при расчете фермы по алгоритму Ньютона, так как касательная жесткость изменяемой системы в натуральном состоянии вырождена. Начальное приближение, которое использовалось при расчете фермы, представлено на фиг. 2, а штриховой линией, а эпюра перемещений узлов нижнего пояса фермы приведена на графике под схемой (а). Начальное напряжение в элементах фермы можно создать путем симметричного натяжения верхнего ванта (фиг. 2, б). При этом положение фермы в начальном состоянии определяется расчетом при отсутствии внешней нагрузки и сокращении натуральных длин крайних элементов верхнего ванта. На фиг. 2, б приведено начальное положение фермы при укорочении этих элементов на 50 см. Под схемой (б) представлена эпюра перемещений узлов нижнего пояса такой предварительно напряженной фермы при воздействии на нее центральной узловой силы  $P = 100$  кН.

6. Плоская деформация гибких тел. Рассматривается случай плоской деформации (плоское поле перемещений при  $\Lambda_3 = 1$ ) при относительно малых деформациях и больших перемещениях, связанных с поворотами. Закон состояния полулинейного материала в условиях плоской деформации задается в соответствии с [1] в виде

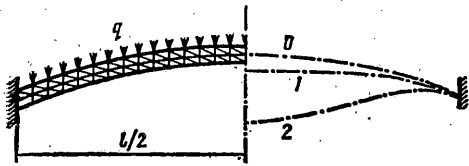
$$s_{11} = \kappa \cos \chi + 2\mu x_{1,1}, \quad s_{12} = \kappa \sin \chi + 2\mu x_{2,1} \quad (6.1)$$

$$s_{21} = -\kappa \sin \chi + 2\mu x_{1,2}, \quad s_{22} = \kappa \cos \chi + 2\mu x_{2,2}$$

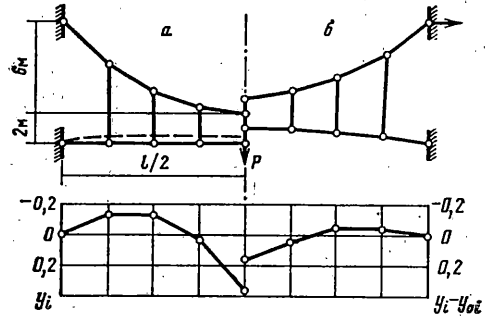
где приняты обозначения  $a = x_{1,1} + x_{2,2}$ ,  $b = x_{2,1} - x_{1,2}$ ,  $q = (a^2 + b^2)^{1/2}$ ,  $\kappa = \lambda(q - 2) - 2\mu$ ,  $\cos \chi = a/q$ ,  $\sin \chi = b/q$ .



Фиг. 1



Фиг. 3



Фиг. 2

Секущая жесткость материала определяется по (3.2), что в случае плоской деформации дает

$$\begin{aligned} \theta_{11} &= \kappa \Lambda_{22} / J_2 + 2\mu, & \theta_{22} &= \kappa \Lambda_{11} / J_2 + 2\mu \\ \theta_{12} &= \theta_{21} = -\kappa \Lambda_{12} / J_2 \\ \Lambda_{11} &= x_{1,1} \cos \chi + x_{2,1} \sin \chi, & \Lambda_{22} &= -x_{1,2} \sin \chi + x_{2,2} \cos \chi \\ \Lambda_{12} &= \Lambda_{21} = x_{1,2} \cos \chi + x_{2,2} \sin \chi \end{aligned} \quad (6.2)$$

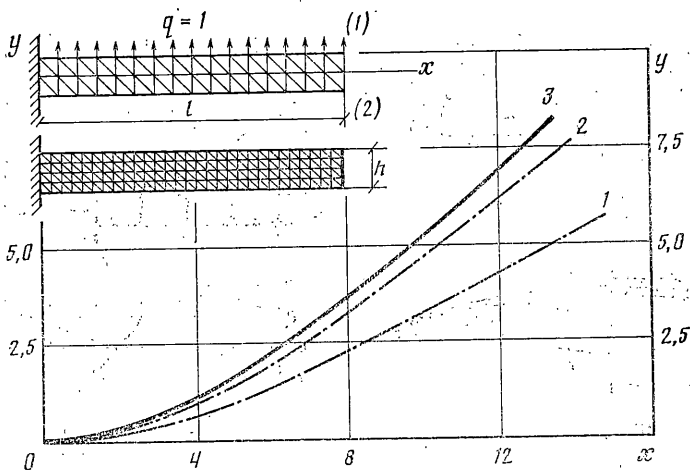
где  $J_2$  — второй инвариант тензора  $\Lambda$ , а запятая обозначает производную по соответствующей материальной координате ( $x_{i,j} = \partial x_i / \partial \xi_j$ ).

Касательная жесткость полулинейного материала в условиях плоской деформации определяется в соответствии с (4.2) с учетом (6.1). Линейная зависимость (4.1) между приращениями напряжений  $s_{ij}^k$  и перемещениями  $u_i^k$  из текущего состояния  $K$  принимает вид

$$\begin{aligned} s_{11}^k &= (\alpha - \beta s^2) u_{1,1}^k + \beta c s u_{2,1}^k - \beta c s u_{1,2}^k + (\lambda - \beta s^2) u_{2,2}^k \\ s_{12}^k &= \beta c s u_{1,1}^k + (\alpha - \beta c^2) u_{2,1}^k + (\beta c^2 - \lambda) u_{1,2}^k + \beta c s u_{2,2}^k \\ s_{21}^k &= -\beta c s u_{1,1}^k + (\beta c^2 - \lambda) u_{2,1}^k + (\alpha - \beta c^2) u_{1,2}^k - \beta c s u_{2,2}^k \\ s_{22}^k &= (\lambda - \beta s^2) u_{1,1}^k + \beta c s u_{2,1}^k - \beta c s u_{1,2}^k + (\alpha - \beta c^2) u_{2,2}^k \\ \alpha &= \lambda + 2\mu, & \beta &= 2(\lambda + \mu) / q_k, & c &= \cos \chi_k, & s &= \sin \chi_k \end{aligned} \quad (6.3)$$

Зависимости (6.2) и (6.3) позволяют построить матрицу секущей и касательной жесткости треугольного элемента простейшей симплексной модели метода конечных элементов [5, 6]. Если в начальном положении тело имеет натуральное состояние, то в первом приближении имеем  $a=2$ ,  $b=0$  и зависимость (6.3) совпадает с отношениями закона Гука. Поэтому первый шаг итерационного процесса Ньютона при указанном условии дает решение соответствующей задачи для материала Гука при малых поворотах. Для задач с относительно малыми поворотами элементов различие между решениями геометрически нелинейных и линейных задач незначительно. Однако при расчетах гибких тел на воздействие поперечной нагрузки (фиг. 3, 4) нелинейные решения отличаются от линейных приближений не только количественно, но и качественно.

На фиг. 3 представлена расчетная схема симметричного цилиндрического свода, работающего в условиях плоской деформации. Свод пролетом 30 м очерчен по окружности радиуса 40 м и имеет толщину 1 м. В расчетах принималось  $\lambda=2400$  МПа,  $\mu=3400$  МПа. На фиг. 3 изображены очертания оси свода, полученные расчетом по алгоритму Ньютона при интенсивности нагрузки  $q=2,3$  МН/м — кривая 1, и при  $q=2,4$  МН/м — кривая 2. Использование для расчета свода метода последовательных нагружений приводит к существенному искажению результатов. Так, значение верхней критической нагрузки, определенное методом последовательных нагружений при числе шагов от 15 и выше, оценивается величиной  $q=2,9$  МН/м, что дает погрешность свыше 20%.



Фиг. 4

На точность решения задачи влияет обусловленность матрицы касательной жесткости системы, которая в состояниях близких к критическим почти вырождена. За исключением этих особых случаев точность приближенных решений обуславливается точностью решений по методу конечных элементов линейных задач, возникающих на каждом шаге итерационного процесса Ньютона. Теоретические оценки точности таких решений и способы ее повышения хорошо известны [6, 7]. Однако для гибких тел характерно значительное превышение одного из размеров над другим, что приводит к плохой обусловленности разрешающих систем уравнений метода конечных элементов и требует применения специальных методов регуляризации решений [8].

Для оценки точности решений были выполнены численные эксперименты на примере консольных балок с различными отношениями  $l/h$  и при различных сетках элементов (фиг. 4). Эксперименты показали, что при отношении  $l/h > 10$  решение линейных задач при поперечной нагрузке полностью обесценивается из-за ошибок округления уже при сетках  $4 \times 32$ , типа схемы 2 на фиг. 4. При расчетах балок с отношением  $l/h$  в пределах от 5 до 10 достаточное повышение точности может быть достигнуто путем экстраполяции решений, полученных на последовательности вложенных сеток, по формуле Ричардсона [7]. На фиг. 4 приведены две последовательные вложенные схемы разбиения на элементы балки длиной  $l=16$  м и высотой  $h=2$  м, а также очертания изогнутой оси балки, полученные при расчетах по схеме 1, по схеме 2 и экстраполяцией этих решений по Ричардсону — кривая 3. Оценка точности аналогичных схем решения линейных задач теории упругости позволяет надеяться на точность не ниже 10% при определении координат узлов.

Напряжения при использовании симплексных моделей метода конечных элементов определяются разрывными функциями с постоянными значениями на элементе. При малых поворотах элементов в сечениях близких к заделке различие между напряжениями Яуманна—Бю  $\sigma_{ij}$  и номинальными напряжениями  $s_{ij}$  невелики. Однако для сечений, достаточно удаленных от заделки, это различие становится достаточно существенным. Так, максимальные номинальные напряжения в сечении на расстоянии  $x=8$  м от заделки при расчете по схеме 2 фиг. 4 составили:  $s_{xx}=20,08$ ;  $s_{xy}=18,58$ ;  $s_{yx}=2,91$  условных единиц, а соответствующие напряжения Яуманна—Бю равны:  $\sigma_{xx}=26,99$ ;  $\sigma_{xy}=\sigma_{yx}=4,42$ . Точность определения напряжений ниже точности определения перемещений, а их значения не могут уточняться экстраполяцией по Ричардсону. В заключение отметим, что совместное использование элементов гибкой нити и рассмотренных здесь треугольных элементов позволяет выполнять расчеты армированных систем с предварительным напряжением арматуры.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
2. Черных К. Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1986. 336 с.
3. Никольский М. Д. Вариационные постановки геометрически нелинейных задач теории упругости // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 6. С. 66–70.
4. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.
5. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977. 349 с.
6. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М.: Мир, 1976. 464 с.
7. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980. 535 с.
8. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 287 с.