

УДК 539.3

В. Л. РАБИНОВИЧ, А. А. СПЕКТОР

**ВАРИАЦИОННО-АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ
ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ
С КРАЕВЫМИ ЭФФЕКТАМИ**

Рассматриваются пространственные контактные задачи для тел специальной формы, моделирующих детали машин с участками резкого изменения кривизны поверхности. Предлагается оригинальный вариационно-асимптотический метод их решения, базирующийся на переходе к эквивалентным вариационным задачам во внутренней и внешней частях области контакта и процедуре сращивания их решений. Даются асимптотические оценки точности получаемых решений. Приводятся результаты расчетов локальных максимумов давления в областях контакта, полученных на основе разработанного метода.

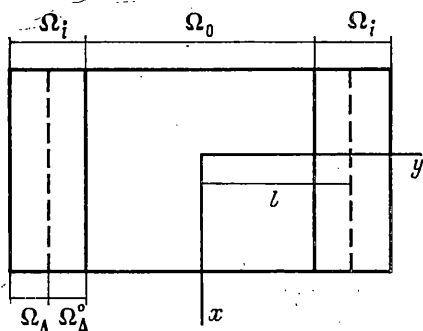
1. Введение. В контактных задачах на участках резкого изменения кривизны профиля контактирующих поверхностей реализуются локальные максимумы давления. При взаимодействии деталей машин эти максимумы возникают в областях краевых скосов, закруглений, фасок и т. д., причем их величины зависят от соответствующих радиусов кривизны и относительных перекосов деталей.

Первое решение подобной задачи в двумерной постановке для штампа с центральным прямолинейным участком и двумя симметричными закруглениями по краям получено в [1]. Краевой эффект также реализуется при вдавливании штампов, профили поверхностей которых описываются степенными функциями достаточно высокой степени. Осесимметричные задачи для таких штампов рассматривались в [2]. Решение задачи для эллиптического в плане штампа с краевым скруглением специальной формы получено в [3].

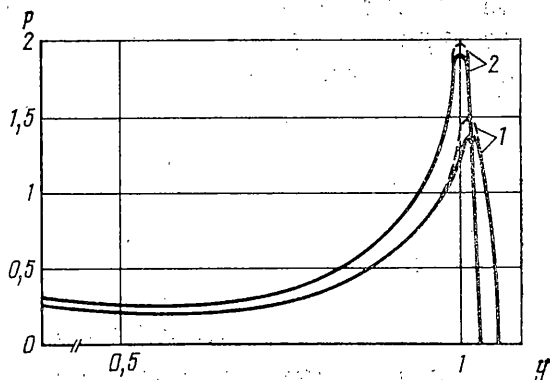
В настоящей работе рассматривается класс пространственных контактных задач для штампов с поверхностями, имеющими малый (нулевой) зазор с основанием в средней части, которая сопряжена с краевыми частями существенно большей кривизны, где зазор между поверхностями резко возрастает. Считается, что ширина краевых зон значительно меньше размеров области контакта. Предлагаемый метод решения не использует дополнительное условия вытянутости этой области. Допускаются перекосы штампа относительно основания.

Основной задачей является определение локальных максимумов давления в окрестностях краевых зон. Решение рассматриваемых задач в принципе можно получать численно путем «сквозного» счета, например, методом [4]. Однако узость зон, где реализуются пиковые значения давления снижает качество результатов или требует чрезвычайно большого машинного времени при использовании достаточно мелких сеток.

Для решения рассматриваемого класса задач с неизвестной площадкой контакта предлагается вариационно-асимптотический метод. При этом исходная задача разбивается на две — внешнюю — с полуизвестной границей — из которой определяется давление вне краевых зон, и внутреннюю — с неизвестной границей — из которой находятся искомые максимальные значения давления. Предлагается процедура сращивания решений двух задач. Дается ее обоснование, базирующееся на эквивалентной вариационной формулировке исходной задачи.



Фиг. 1



Фиг. 2

Вариационно-асимптотические методы применялись в [5, 6] для исследования и решения задач, описываемых дифференциальными уравнениями. Метод сращиваемых разложений для интегральных уравнений задач с вытянутой областью контакта разрабатывался в [7]. Решения интегральных уравнений контактных задач, имевшие «погранслойный» характер строились в [8].

2. Постановка задачи. Эквивалентная вариационная формулировка. Граничные условия для определения давления и области контакта штампа с основанием имеют вид

$$-w(p) = \delta + \varphi y + \psi x - f(x, y) = F(x, y), \quad p \geq 0 \quad (2.1)$$

либо

$$-w(p) > F(x, y), \quad p = 0 \quad (2.2)$$

где $w(p)$ — упругие смещения границы полупространства $z \leq 0$, δ — жесткое сближение штампа с основанием, φ , ψ — углы его поворота относительно осей x , y , p — контактное давление, $f(x, y)$ — функция, описывающая форму поверхности штампа; точки (x, y) расположены в Ω — области, заведомо охватывающей возможную область контакта.

Упругие перемещения определяются равенством

$$-w(p) = B(p) = \theta \int_{\Omega} \frac{p(x, y) dx dy}{[(x-x')^2 + (y-y')^2]^{3/2}}, \quad \theta = \frac{1-\nu^2}{\pi E} \quad (2.3)$$

где E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона материала.

Можно показать [4, 9], что граничная задача (2.1) — (2.3) эквивалентна вариационной

$$\min_{p \geq 0} \Phi(p) = 1/2 \int_{\Omega} B(p) p dx dy - \int_{\Omega} F p dx dy \quad (2.4)$$

Записывая условие минимальности Φ сначала при $\delta = \delta_1$, $p = p(\delta_1)$, затем при $\delta = \delta_2$, $p = p(\delta_2)$, ($f(x, y)$, φ , ψ в обоих случаях одинаковы), а также воспользовавшись положительной определенностью оператора B в пространстве $H^0_{-1/2}(\Omega)$, получим неравенство

$$c \|p(\delta_1) - p(\delta_2)\|_{-1/2}^2 \leq [P(\delta_1) - P(\delta_2)] (\delta_1 - \delta_2) \quad (2.5)$$

здесь $c = \text{const} > 0$, $P(\delta_1)$ и $P(\delta_2)$ значения интегральной силы, соответствующие сближениям δ_1 и δ_2 . Из (2.5) вытекает, что зависимость $P(\delta)$ — строго монотонна, и следовательно в задаче (2.1) — (2.3) между величиной сближения и интегральной силой существует однозначная связь. Поэтому наряду с постановкой задачи (2.1) — (2.3) при заданном δ можно рассматривать равноправную постановку с фиксированной величиной

$$P = \int_{\Omega} p(x, y) dx dy.$$

Далее с использованием различных модификаций вариационно-асимптотического метода будут изучаться пространственные задачи двух типов. Для первого из них (задачи типа I) характерно такое сочетание кривизны поверхности штампа, что площадка контакта близка к прямоугольнику с длиной сторон одного порядка. В задачах типа II площадка контакта близка к сильно вытянутому прямоугольнику.

3. Построение решения задачи I. Будем рассматривать штамп, поверхность которого в сечении $x=0$ описывается центральной дугой радиуса R_y , сопряженной в точках $y=\pm l$ с двумя симметричными дугами радиуса $\Delta \ll R_y$. В поперечном сечении поверхность штампа описывается дугой постоянного радиуса R_x .

Построение асимптотического решения состоит из следующих этапов. Сначала в области $\Omega_0 \cup \Omega_0^\Delta$ (фиг. 1) определяется внешнее вырожденное решение. Затем в промежуточной области Ω_0^Δ это решение уточняется. После чего из условий срачивания с внешним решением в Ω_0^Δ строится внутреннее решение во всей области $\Omega_i = \Omega_0^\Delta \cup \Omega_\Delta$.

Внешней вырожденной (при $\Delta=0$) задачей в рассматриваемом случае является задача о вдавливании штампа с поверхностью $z=x^2/(2R_x)+y^2/(2R_y)$ в полупространство при частично заданной границе области их контакта. Фиксированная часть границы лежит на линиях $y=\pm l$, боковая часть — не задана. Существенно пространственный характер задачи предопределил использование численного метода ее решения. Он был разработан на базе вариационного подхода [4]. Непосредственное использование метода [4] при варьировании функционала в области с частично заданной границей не давало удовлетворительных результатов в окрестности линии $y=\pm l$. Для получения качественного решения применялась регуляризация функционала добавкой вида $\kappa \int_{\Omega} p^{v+1} dx dy$. В этом случае при любом отличном от 0 κ решение не имеет особенностей при подходе к линиям $y=\pm l$. С другой стороны при достаточно малых κ решение вне узких зон, примыкающих к этим линиям, близко к решению исходной задачи. Проблема состоит в выборе оптимального значения κ и показателя v . Апробация предлагаемого метода проводилась на задаче об эллиптическом в плане штампе с плоским основанием. Причем контроль качества осуществлялся по сравнению коэффициентов при особенностях в точном [2] и численном решениях. В качестве оптимальных значений были приняты $\kappa=0,05$; $v=1$. При этом точность определения коэффициентов при особенностях составляла около 10% (точность подсчета давлений во внутренней части области контакта достигала 3–5%). Отметим, что имеется [10] положительный опыт регуляризации интегральных уравнений контактной задачи с фиксированной областью контакта добавками вида κr^v .

Будем теперь строить внутреннее решение в области Ω_i . Пусть $\lambda = \lambda(\Delta)$ — характерная ширина внутренней области ($\lambda \rightarrow 0$ при $\Delta \rightarrow 0$). Предполагая, что давление во внутренней области меняется не слишком резко вдоль оси x ($\partial p_i / \partial x = O(1)$), получим следующую оценку для оператора смещений

$$\theta \int_{\Omega_i} \frac{p_i}{R} dx dy = \theta \int_{\Omega^\circ(x)} p_i(x, y') \ln \frac{4(a-x)(a+x)}{|y-y'|^2} dy' + O(\lambda) \quad (3.1)$$

где $\Omega^\circ(x)$ — сечение внутренней области плоскостью $x=\text{const}$. Таким образом, из (3.1) видно, что главный член асимптотики решения внутренней задачи совпадает с решением некоторой квазиплоской задачи, где координата x играет роль параметра.

Введем внутренние координаты по формулам $x=x$, $\eta=(y-l)/\lambda$. Тогда из (2.3) с учетом (3.1) получим аналогично [11] следующее выражение для смещений во внутренней области (вне концевых зон):

$$w_i = \theta \int_{\Omega^\circ(x)} p_0^\Delta(x, \eta') \ln \frac{4(a-x)(a+x)}{\lambda^2 |\eta - \eta'|^2} d\eta' + O(\lambda) + \begin{cases} 0 & (\eta \leq 0) \\ d(\eta, x) - \frac{\lambda^2 \eta^2}{2\Delta} & (\eta > 0) \end{cases} \quad (3.2)$$

где $d(\eta, x)$ — асимптотика $F-B_0(p_0) - B_0^\Delta(p_0^\Delta)$ в области Ω_Δ .

Чтобы получить окончательное выражение для смещений, требуется подставить в (3.2) на место p_0^Δ асимптотическое представление внешнего давления в области Ω_0^Δ . Это представление отвечает уточненному решению внешней задачи, которое получается, если учесть влияние краевых дуг

профиля штампа на протяженность области контакта. Указанное уточнение соответствует решению задачи о штампе, фиксированная часть границы области контакта которого лежит на линиях $y = \pm(l + \lambda\alpha)$, где $\alpha \geq 0$. Асимптотическое поведение функции p_0^Δ имеет вид

$$p_0^\Delta(x, \eta) = I(x) [\lambda(\alpha - \eta)]^{-1/2} \quad (3.4)$$

где $I(x)$ — коэффициент при особенности давления, определяемый из решения вырожденной задачи. Величина α является параметром срачивания; методика ее определения излагается ниже.

С учетом (3.4) из (3.3) получаем выражение для производной смещений по η :

$$\begin{aligned} w_i' &= \frac{2\theta I(x)}{[\lambda(\alpha - \eta)]^{1/2}} \ln \left| \frac{(M + \alpha)^{1/2} + (\alpha - \eta)^{1/2}}{(M + \alpha)^{1/2} - (\alpha - \eta)^{1/2}} \right| \quad (-M \leq \eta \leq 0) \\ &= \frac{2\theta I(x)}{[\lambda(\alpha - \eta)]^{1/2}} \ln \left| \frac{(M + \alpha)^{1/2} + (\alpha - \eta)^{1/2}}{(M + \alpha)^{1/2} - (\alpha - \eta)^{1/2}} \right| - \frac{\lambda\eta}{\Delta} \quad (0 < \eta \leq \alpha) \\ &= \frac{2\theta I(x)}{[\lambda(\eta - \alpha)]^{1/2}} \left[\pi - 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{M + \alpha}{\eta - \alpha} \right)^{1/2} \right] - \frac{\lambda\eta}{\Delta} \quad (\eta > \alpha) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Значение $\eta = -M$ соответствует границе области Ω_0^Δ . Давление во внутренней области определяется выражением

$$p_i(x, \eta) = \frac{[(\beta - \eta)(\gamma + \eta)]^{1/2}}{2\pi^2\theta} \int_{-\gamma}^{\beta} \frac{w_i'(x, \xi) d\xi}{[(\beta - \xi)(\gamma + \xi)]^{1/2}(\xi - \eta)} \quad (3.6)$$

Для определения границ γ и β есть два известных из плоской задачи теории упругости соотношения (P_i — вдавливающая сила для внутренней задачи):

$$\int_{-\gamma}^{\beta} \frac{w_i'(x, \xi) d\xi}{[(\beta - \xi)(\gamma + \xi)]^{1/2}} = 0, \quad \int_{-\gamma}^{\beta} \frac{w_i'(x, \xi) \xi d\xi}{[(\beta - \xi)(\gamma + \xi)]^{1/2}} = -\pi P_i \quad (3.7)$$

Сопоставляя порядки коэффициентов в правых частях (3.5), получаем оценку порядка ширины внутренней области $\lambda = \Delta^{1/2}$. Срачивание внутреннего решения с асимптотикой (3.4) производится в некоторой точке с координатой $\eta = -\omega$ ($-\omega \geq -\gamma$):

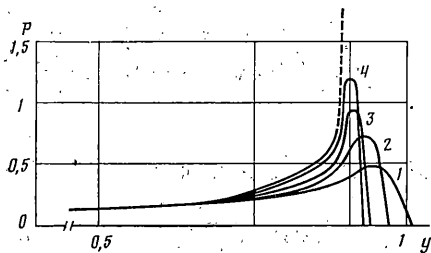
$$p_i(x, -\omega) = I(x) [\lambda(\alpha + \omega)]^{-1/2} \quad (3.8)$$

Внешняя задача решалась для $\eta \leq \alpha$, при заданном значении вдавливающей силы. В комбинированном асимптотическом решении внешнее решение используется для $\eta \leq -\omega$, а далее — для $-\omega \leq \eta < \beta$ — внутреннее решение. Поэтому часть полной силы, приходящаяся во внешнем решении на область $-\omega \leq \eta < \alpha$, совпадает с частью силы P_i , которая приходится на область $-\omega \leq \eta < \beta$. Таким образом, справедливо равенство

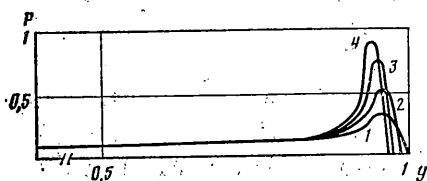
$$\int_{-\omega}^{\alpha} I(x) [\lambda(\alpha - \xi)]^{-1/2} d\xi = \int_{-\omega}^{\beta} p_i(x, \xi) d\xi \quad (3.9)$$

Был реализован следующий алгоритм решения внутренней задачи. По величине P_i , рассматриваемой как параметр срачивания, решалась система уравнений (3.7), (3.8), (3.9), откуда находились постоянные β , γ , α , и ω . После этого из формулы (3.6) определялось внутреннее давление.

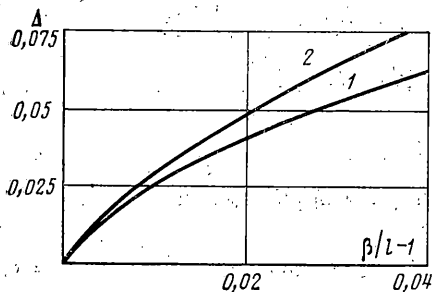
Для проверки разработанного метода, в частности, использования в нем выражения (3.4) для давления в области Ω_0^Δ и предложенной методики срачивания был проанализирован ряд плоских контактных задач с известным точным решением [1]. На фиг. 2 приведено сравнение точного (штриховая линия) и асимптотического (сплошная линия) решений для двух значений радиуса закругления штампа ($1 - \Delta = 0,03$; $2 - \Delta = 0,0125$). Здесь линейные размеры отнесены к полудлине среднего плоского участка профиля поверхности штампа, давление обезразмерено на величину θ . Видно, что отличие асимптотического решения от точного не превышает 7%.



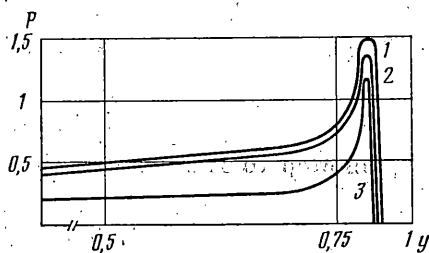
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

На рис. 3–6 приведены результаты численного решения нескольких новых пространственных задач. Рассматривается взаимодействие с полупространством штампа, центральная часть которого описывается функцией $z=0,67x^2$ ($R_y=\infty$, $R_x=0,746$); все линейные характеристики обезразмерены на полуширину площадки контакта в центральной ее части. Координаты линии сопряжения центральной части и кромок $y=\pm 0,9$, а величина вдавливающей силы $P=0,9$ (давление обезразмерено на величину θ). Поверхности кромок штампа описываются функциями $z=(y\pm 0,9)^2/(2\Delta)$. Результаты, приведенные на фиг. 3 отвечают центральному сечению области контакта $x=0$; на фиг. 4 – сечениям $|x|=2/3$. Кривые 1–4 соответствуют значениям радиуса закругления штампа $\Delta=0,06$; $0,03$; $0,0125$; $0,0075$. Штрихами показаны соответствующие решения внешней задачи. На фиг. 5 приведена зависимость протяженности площадки контакта от радиуса закругления штампа. Кривые 1, 2 соответствуют тем же сечениям, что и результаты, приведенные на фиг. 3, 4. На фиг. 6 показано влияние поперечного перекоса ($\psi=0,3$) на эпюру контактного давления. Кривая 1 соответствует сечению максимального давления $x=-1/6$; кривые 2 и 3 отвечают сечениям $x=-2/3$ и $x=2/3$.

4. Асимптотические оценки решения. Используя эквивалентные вариационные постановки задач в исходной и асимптотической формулировках можно получить оценку их близости в энергетической норме.

Граничные условия (2.1)–(2.3) во внешней и внутренней задачах можно записать в виде

$$\int_{\Omega_0} [B_0(q_0) + B_0^\Delta(q_0^\Delta)] q_0 dx dy = \int_{\Omega_0} F q_0 dx dy \quad (4.1)$$

$$\int_{\Omega_i} B_i(p_i) p_i dx dy = \int_{\Omega_i} [F - B_0(q_0) + D(\lambda)] p_i dx dy \quad (4.2)$$

где $q(q=q_0$ в Ω_0 , $q=q_0^\Delta$ в Ω_0^Δ) – решение внешней задачи, p_i – решение внутренней задачи, $B_0(\)$, $B_0^\Delta(\)$, $B_i(\)$ – смещения в областях Ω_0 , Ω_0^Δ , Ω_i ; $D(\lambda)$ – малые члены, которыми пренебрегается при решении внутренней задачи.

Оценим разность значений функционала на асимптотическом (p) и точном (p_e) решениях. С учетом (4.1) и (4.2) из (2.4) получим

$$\begin{aligned} \Phi(p) - \Phi(p_e) = & 1/2 \int_{\Omega} [B_0(q_0) - F] (p - p_e) dx dy + 1/2 \int_{\Omega_0} [B(p_e) - B(q)] q_0 dx dy + \\ & + 1/2 \int_{\Omega_i} D(\lambda) p_i dx dy \end{aligned} \quad (4.3)$$

Оценим величину каждого слагаемого в правой части (4.3). Так как оператор B действует из пространства $H_{1/2}^0(\Omega)$ в $H_{1/2}(\Omega)$ [12], то из неравенства Коши имеем

$$\int_{\Omega} [B_0(q_0) - F] (p - p_e) dx dy \leq \|B_0(q_0) - F\|_{1/2} \|p - p_e\|_{-1/2} \quad (4.4)$$

Оценим теперь правую часть (4.4). Известно [12], что

$$\|g\|_{1/2}^2 = \int_{\Omega} g^2(x, y) dx dy + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|g(x, y) - g(x', y')|^2 dx dy dx' dy'}{[(x - x')^2 + (y - y')^2]^{1/2}} \quad (4.5)$$

Так как $B_0(q_0) - F = 0$ в Ω_0 и $B_0(q_0) - F \approx c[x - \alpha]^{1/2}$ вне Ω_0 , то из (4.5) вытекает

$$\|B_0(q_0) - F\|_{1/2} = O(\sqrt{\lambda}) \quad (4.6)$$

Для второго слагаемого в правой части (4.3) справедлива оценка

$$\int_{\Omega_0} [B(p_e) - B(q)] q_0 dx dy = O(\lambda) \quad (4.7)$$

Последнее слагаемое допускает оценку

$$\int_{\Omega_0} D(\lambda) p_i dx dy = O(\lambda^{3/2}) \quad (4.8)$$

Для квадратичного функционала $\Phi(p)$ с учетом положительной определенности оператора B имеем оценку

$$c \|p - p_e\|_{-1/2} \leq |\Phi(p) - \Phi(p_e)| \quad (4.9)$$

Таким образом, из (4.4), (4.6) – (4.9) получаем неравенство

$$\|p - p_e\|_{-1/2}^2 \leq O(\sqrt{\lambda}) \|p - p_e\|_{-1/2} + O(\lambda) + O(\lambda^{3/2}).$$

Откуда вытекает, что $\|p - p_e\|_{-1/2} = O(\sqrt{\lambda})$.

5. Построение решения задачи II. Внешняя вырожденная задача в случае II отвечает контакту с основанием штампа с поверхностью $z = x^2/(2\varepsilon)$ и острыми торцевыми кромками при $y = \pm l$. При $\varepsilon \ll l$ область контакта близка к вытянутому прямоугольнику. Аналогично [13] прием гипотезу о представлении решения внешней вырожденной задачи в виде

$$p_0(x, y) = 4\mu [(\chi + 1)\varepsilon]^{-1} (h^2 + x^2)^{1/2} p_0(y) \quad (5.1)$$

где h – неизвестная ширина области контакта в Ω_0 , μ, χ – постоянные Ляме.

Подставляя выражение (5.1) в граничные условия, получим для функции $p_0(y)$ уравнение

$$\frac{\theta k l^2 \lambda}{4\pi} \int_{-1}^1 p(t) K\left(\frac{y-t}{\lambda}\right) dt = \delta \quad (5.2)$$

$$\lambda = h/l \ll 1, \quad k = 4\mu/[(\chi + 1)\varepsilon], \quad p(t) = p_0(lt) \quad (5.2)$$

$$K(y) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[I_0\left(\frac{|u|}{2}\right) K_0\left(\frac{|u|}{2}\right) + I_1\left(\frac{|u|}{2}\right) K_1\left(\frac{|u|}{2}\right) \right] e^{-iuy} du$$

где I_0, K_0, I_1, K_1 – модифицированные функции Бесселя.

Аналогично [14] главный член решения (5.2) может быть представлен в виде

$$p(t) = 4\pi\delta(\theta k l^2 \lambda^2)^{-1} q[(1+t)/\lambda] q[(1-t)/\lambda] \quad (5.3)$$

где $q(t)$ — оригинал преобразования по Лапласу (p — параметр преобразования)

$$Q(p) = (1/p) [(ap-1)(d+p) \ln(b+ap) / \{\ln(ap)(b+ap-1)\}]$$

для $b=1$, $a = \exp[(C-1-\ln 4)/2]$, $d=1$, C — постоянная Эйлера.

Максимальная ширина области контакта h определяется из уравнения

$$h^2 \ln(l/ah) = \pi \delta (\chi+1) \varepsilon / (\mu \theta) \quad (5.4)$$

Таким образом, решение внешней задачи определяется формулами (5.3), (5.4).

Для уточнения решения в области Ω_0^Δ и построения внутреннего решения необходимо знание коэффициента при особенности внешнего давления в окрестности острой кромки штампа. Этот коэффициент может быть получен аналитически из представления (5.3). Для него справедлива формула

$$I(x) = [4\delta \sqrt{\pi} / (\theta l^2 \lambda^{3/2})] \{ (h^2 - x^2) / \ln(2/a\lambda) \}^{1/2} \quad (5.5)$$

Для решения внутренней задачи введем внутренние координаты по формулам $\xi = (y-l)/\lambda$, $\eta = x/\lambda$, растягивая внутреннюю область по обоим направлениям. Отметим, что поскольку продольный и поперечный радиусы поверхности штампа одного порядка ($\varepsilon \simeq \Delta$), внутренняя задача является существенно пространственной.

Для смещений в точках области контакта, принадлежащих Ω_i , справедливо выражение $w_i = -F - B_0(p_0)$. Аналогично задаче I примем уточненное выражение для давления в области Ω_0^Δ в виде

$$p_0^\Delta(\xi, \eta) = 4\delta / (\theta l^2 \lambda) \{ \pi (l^2 - \eta^2) / [(\alpha - \xi) \ln(2/a\lambda)] \}^{1/2} \quad (5.6)$$

что соответствует асимптотическому поведению решения задачи с фиксированными границами области контакта на линиях $\xi = \pm \alpha$. Коэффициент при особенности выбирается из решения внешней вырожденной задачи и задается формулой (5.5).

С учетом (5.6) главный член смещений w_i имеет вид

$$\begin{aligned} w_i &= -F - B_0(p_0) = J(\xi) - \lambda^2 \eta^2 / (2\varepsilon) \quad (-M \leq \xi \leq 0) \\ &= J(\xi) - \lambda^2 \eta^2 / (2\varepsilon) - \lambda^2 \xi^2 / (2\Delta) \quad (0 < \xi \leq \alpha) \\ &= J(\xi) - J_\infty(\xi) + \delta - \lambda^2 \eta^2 / (2\varepsilon) - \lambda^2 \xi^2 / (2\Delta) \quad (\xi > \alpha) \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$J(\xi) = \frac{4\delta \sqrt{\pi}}{\theta l^2 [\ln(2/a\lambda)]^{1/2}} \int_{-M}^{\alpha} \int_{-l}^l \frac{[l^2 - \eta'^2]^{1/2} d\xi' d\eta'}{\{(\alpha - \xi') [(\xi - \xi')^2 + \eta'^2]\}^{1/2}}$$

$$J_\infty(\xi) = \frac{4\delta \sqrt{\pi}}{\theta l^2 [\ln(2/a\lambda)]^{1/2}} \int_{-\infty}^{\alpha} \int_{-l}^l \frac{[l^2 - \eta'^2]^{1/2} d\xi' d\eta'}{\{(\alpha - \xi') [(\xi - \xi')^2 + \eta'^2]\}^{1/2}}$$

Здесь $-M$ — координата границы области Ω_0^Δ .

Таким образом, внутреннее давление $p_i(\xi, \eta)$ определяется как решение задачи (с неизвестной границей) о гладком штампе, форма которого отличается от исходной и определяется выражением (5.7). Эта задача может быть решена путем перехода к эквивалентной вариационной задаче

$$\min_{p_i \geq 0} \Phi_i(p_i) = 1/2 \int_{\Omega_i} B_i(p_i) p_i d\xi d\eta - \int_{\Omega_i} [F + B_0(p_0)] p_i d\xi d\eta \quad (5.8)$$

Квадратичный функционал (5.8) может быть эффективно минимизирован методом [4].

Метод сращивания внешнего и внутреннего решений аналогичен разработанному в задаче I. Сращивание производится по линии $\xi = -\omega$, $(-\omega, 0) \in \Omega_0^\Delta$ из условия выхода внутреннего решения на асимптотику

внешнего решения

$$p_i(-\omega, 0) = 4\delta/(\theta\lambda) \{ \pi/[l(\alpha+\omega)\ln(2/a\lambda)] \}^{1/2} \quad (5.9)$$

Еще одним условием сращивания является равенство полных сил во внешней и в полной задаче, для которой строится комбинированное решение.

Следовательно, справедливо равенство

$$\int_{-\omega}^{\alpha} \int_{-l}^l \frac{4\delta\sqrt{\pi}[l^2-\eta^2]^{1/2} d\xi d\eta}{\theta l^{3/2}\lambda[\ln(2/a\lambda)(\alpha-\xi)]^{1/2}} = \int_{\alpha_l} p_i(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (5.10)$$

являющееся аналогом равенства (3.9) в задаче I. Таким образом, определение давления во внутренней области сводится к совместному решению вариационной задачи (5.8) и двух уравнений (5.9) и (5.10) относительно α и ω . В задаче II также может быть получена асимптотическая оценка точности построенного решения. Путь получения этой оценки тот же, что и в задаче I, однако в рассматриваемом случае правые части аналогов равенств (4.6), (4.7) выражаются как $O(\lambda\{\ln\lambda^{-1}\}^{1/2})$ и $O(\{\ln\lambda^{-1}\}^{-2})$ соответственно. В итоге имеем оценку близости в энергетической норме точного и асимптотического решений

$$\|p-p_e\|_{-1/2} = O([\ln(1/\lambda)]^{-1})$$

Однако в случае задачи II за счет узости области контакта сама норма решения стремится к нулю при $\lambda \rightarrow 0$. Поэтому имеет смысл введение относительной оценки отклонения асимптотического решения от точного

$$\|p-p_e\|_{-1/2}/\|p_e\|_{-1/2} = O([\ln(1/\lambda)]^{-1/2})$$

Авторы признательны Р. В. Гольдштейну за полезные обсуждения работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 270 с.
2. *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 491 с.
3. *Шишканова С. Ф.* О вдавлении в упругое полупространство эллиптического штампа со скругленным краем // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 3. С. 77-80.
4. *Рабинович В. Л., Спектор А. А.* Решение некоторых классов пространственных контактных задач с неизвестной границей. Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 2. С. 93-100.
5. *Мосолов А. П., Мясников В. П.* Механика жесткопластических сред. М.: Наука, 1981. 208 с.
6. *Бердичевский В. Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 447 с.
7. *Sivashinsky G. I.* The problem of a slender die // J. Elast. 1975. V. 5. № 2. P. 161-166.
8. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
9. *Гольдштейн Р. В., Спектор А. А.* Вариационные методы решения и исследования пространственных контактных и смешанных задач теории упругости с условиями в форме неравенств. М., 1983. 64 с. (АН СССР. Ин-т проблем механики. Препринт № 219).
10. *Курбатов А. В., Лазарев М. И.* К решению задачи о вдавлении жесткого штампа в упругое полупространство. Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 4. С. 77-82.
11. *Kalker J. J.* On elastic line contact Trans. ASME. Ser. E. J. appl. Mech. 1972. V. 39. № 4. P. 1125-1132.
12. *Эскин Г. И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973. 232 с.
13. *Вородачев Н. М., Галин Л. А.* Контактная задача для штампа с основанием в виде узкого прямоугольника ПММ. // 1974. Т. 38. Вып. 1. С. 125-130.
14. *Александров В. М., Сумбатов М. А.* Асимптотическое решение интегральных уравнений типа свертки с логарифмической особенностью трансформанты ядра и приложение в задачах механики // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 2. С. 80-88.

Москва

Поступила в редакцию
17.III.1988