МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1989

УДК 539.3

С. В. КУЗНЕЦОВ

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЛАМЕ ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД

Фундаментальные решения уравнений равновесия (уравнений Ламе) в R^3 при произвольной анизотропии упругой среды построены в виде рядов по сферическим гармоникам. Получены теоремы о сходимости, предложен регулярный метод суммирования, рассмотрен пример расчета.

1. Введение. Решение краевых задач теории упругости методом граничных интегральных уравнений требует знания фундаментального решения. Для изотропной упругой среды фундаментальные решения уравнений статики (уравнений Ламе) хорошо известны — это решение Кельвина в R^3 и Кельвина — Буссинеска в R^2.

В случае анизотропной среды, начиная с работ Фредгольма [1], предлагались различные подходы для построения фундаментальных решений. В замкнутом виде эти решения были построены методом Леви лишь для плоских задач статики [2—5] и некоторых частных случаев ортотропии в пространстве [6—8].

В случае анизотропной упругой среды, незначительно отличающейся от изотропной, в [9] для построения фундаментального решения использовался метод малого параметра. При произвольной анизотропии среды в [10] предложен эвристический прием, сводящий задачу определения фундаментального решения к вычислению интегралов по диаметральным окружностям на сфере единичного радиуса в R^3. Аналогичный прием в последствии применялся в [11, 12]. Численные эксперименты, проведенные в [12], показали, что с вычислительной точки зрения этот метод неудобен из-за больших затрат машинного времени на вычисление указанных интегралов. Чтобы уменьшить затраты времени в [12] предложено решать вспомогательные задачи аппроксимации на сфере. Более строгим, хотя и приводящим к вычислению тех же интегралов по диаметральным окружностям, представляется метод разложения δ-функции на плоские волны (метод Радона). Применительно к фундаментальным решениям теории упругости этот метод предложено использовать в [13].

Для построения фундаментальных решений может применяться метод разложений по сферическим гармоникам (метод мультиполярных разложений). Идея использования таких разложений в теории упругости восходит к Фредгольму [1] и Цейлону [14]. Однако, отсутствие необходимой техники, связанной с действием преобразования Фурье на пространствах сингулярных и слабо сингулярных интегральных операторов, не позволило авторам работ [1, 14] получить собственно фундаментальные решения в виде указанных разложений. Аналогичные трудности встречаются и в более поздних публикациях [6, 15]. В полной мере метод мультиполярных разложений был разработан в [16, 17] применительно к сингулярным интегральным операторам, а в несколько более простой ситуации несингулярных операторов в [18].

Ниже фундаментальные решения статики в R^3 строятся методом разложений по сферическим гармоникам в случае произвольной анизотропии упругой среды. Это позволяет получить фундаментальные решения в виде сходящихся мультиполярных рядов.

2. Мультиполярные разложения. Уравнения статики в R^3 могут быть представлены в следующей форме

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) \equiv -\operatorname{div} \mathbf{C}[\nabla \mathbf{u}] = 0 \tag{2.1}$$

где $\mathbf{C}$ — тензор четвертого ранга, характеризующий упругие свойства анизотропной среды. Предполагается, что тензор $\mathbf{C}$ строго эллиптичен, т. е.

$$\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}\cdot\cdot\mathbf{C}[\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}]>0, \quad \mathbf{a}, \mathbf{b}\neq 0; \quad \mathbf{a}, \mathbf{b}\in R^3$$

для любых разложимых тензоров вида $\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}$.

Матричный символ $\mathbf{A}^\vee$ дифференциального оператора (2.1) в компонентной форме имеет вид (здесь и в дальнейшем используется правило суммирования по повторяющемуся индексу):

$$A_{ij}^\vee = (2\pi)^2 C_{imjn}\xi_m\xi_n, \quad \xi\in R^3.$$

Обратный символ (преобразованное по Фурье фундаментальное решение) может быть записан в виде

$$\mathbf{E}^\vee = \mathbf{A}_0^\vee(\xi)/\det \mathbf{A}^\vee(\xi) \tag{2.2}$$

где $\mathbf{A}_0^\vee$ — матрица алгебраических дополнений символа $\mathbf{A}^\vee$. Ввиду строгой эллиптичности $\mathbf{C}$, определитель в (2.2) отличен от нуля при $\xi\neq 0$. Формула (2.2) показывает также, что $\mathbf{E}^\vee$ обладает следующими свойствами: $\mathbf{E}^\vee$ — однороден по ξ степени -2; $\mathbf{E}^\vee\in C^\infty(R^3\backslash 0, R^3\otimes R^3)$; $\mathbf{E}^\vee\in\varphi'(R^3, R^3\otimes R^3)$. Здесь $\varphi'(R^3, R^3\otimes R^3)$ — пространство медленно растущих распределений со значениями в $R^3\otimes R^3$.

Рассмотрим разложение $\mathbf{E}^\vee$ в ряд по поверхностным сферическим гармоникам при $|\xi|=1$:

$$\mathbf{E}^\vee = \sum_{n=0,2,\ldots}^{\infty} \sum_{k=1}^{2n+1} \mathbf{E}_{nk} Y_k^n(\xi'), \qquad \xi'=\xi/|\xi| \tag{2.3}$$

где Y_k^n — сферическая гармоника степени n, порядка k. Сферические гармоники Y_k^n связаны с присоединенными функциями Лежандра первого рода следующим образом [16]:

$$Y_k^n(\xi') = \left(\frac{2n+1}{2\pi}\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\right)^{1/2} P_n^k(\cos\theta)\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}(k\varphi)$$

Ввиду первого свойства суммирование в (2.3) осуществляется по сферическим гармоникам четных степеней. Матричные коэффициенты $\mathbf{E}_{nk}$ в (2.3) определяются интегрированием по сфере S:

$$\mathbf{E}_{nk} = \int_S \mathbf{E}^\vee(\xi') Y_k^n(\xi')\, d\xi'$$

где $d\xi'$ — индуцированная на S мера Лебега. Помимо ряда (2.3) рассмотрим ряд

$$\mathbf{E}^\vee(\xi) = \sum_{n=0,2,\ldots}^{\infty} \sum_{k=1}^{2n+1} \mathbf{E}_{nk} Y_k^n(\xi')/|\xi|^2 \tag{2.4}$$

Имеет место

Теорема 1. 1°. Ряд (2.3) сходится к символу $\mathbf{E}^\vee$ в $L^2(S, R^3\otimes R^3)$; 2°. Ряд (2.3) сходится к символу $\mathbf{E}^\vee$ в $L^q(S, R^3\otimes R^3)$, $0<q<2$; 3°. Ряд (2.4) сходится к символу $\mathbf{E}^\vee$ в слабой топологии $\varphi'(R^3, R^3\otimes R^3)$.

Доказательство. Условие 1° тривиально выполняется, поскольку $\mathbf{E}^\vee\in L^2(S, R^3\otimes R^3)$, а ряд (2.3) — это ряд Фурье по полной в $L^2(S)$ ортонормальной системе функций.

Условие 2° выполняется, поскольку на компакте S топология сходимости в среднем квадратичном мажорирует любую из топологий сходимости в среднем порядка q, $q<2$.

Для доказательства утверждения 3° рассмотрим ряд

$$\mathbf{E}^{\vee}\cdot\mathbf{f}=\sum_{n=0,2,\ldots}^{\infty}\sum_{k=1}^{2n+1}\mathbf{E}_{nk}\mathbf{f}\cdot(\xi)Y_k{}^n(\xi')/|\xi|^2 \tag{2.5}$$

где $\mathbf{f}\in\varphi(R^3,R^3)$. Обозначим N-е частичные суммы рядов (2.3), (2.5) через $\mathbf{S}_N^{(3)}$ и $S_N^{(5)}$ соответственно. Переходя к сферическим координатам, получаем следующую оценку для $\|S_N^{(5)}-\mathbf{E}^{\vee}\cdot\mathbf{f}\|_{L^1}$

$$\|S_N^{(5)}-\mathbf{E}^{\vee}\cdot\mathbf{f}\|_{L^1(R^3,R^3)}\leqslant\int_0^{\infty}d\rho\int_S|\mathbf{S}_N^{(3)}-\mathbf{E}^{\vee}(\xi')|\cdot|\mathbf{f}(\xi'\cdot\rho)|d\xi'\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^{\infty}F(\rho)d\rho\int_S|\mathbf{S}_N^{(3)}-\mathbf{E}^{\vee}(\xi')|d\xi'=\int_0^{\infty}F(\rho)d\rho\cdot\|\mathbf{S}_N^{(3)}-\mathbf{E}^{\vee}\|_{L^1(S,R^3\otimes R^3)}$$

$$F(\rho)=\sup_{\xi'\in S}|\mathbf{f}(\xi'\cdot\rho)|$$

Ввиду того, что $\mathbf{f}\in\varphi(R^3,R^3)$ имеем следующую оценку: $F(\rho)=o(\rho^{-\beta})$, $\rho\to\infty$, $\forall\beta>0$. Эта оценка показывает, что $F(\rho)$ интегрируемо. Принимая во внимание утверждение 2° теоремы, получаем сходимость ряда (2.5) в $L^1(R^3,R^3)$, что доказывает утверждение 3°.

Почленное обратное преобразование Фурье ряда (2.4) дает [18]:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x})=\sum_{n=0,2,\ldots}^{\infty}\sum_{k=1}^{2n+1}\mathbf{E}_{nk}'Y_k{}^n(\mathbf{x}')/|x|$$

$$\mathbf{x}'=\mathbf{x}/|x|,\qquad \mathbf{x}\in R^3 \tag{2.6}$$

$$\mathbf{E}_{nk}'=(-1)^{n/2}\pi^{1/2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)\mathbf{E}_{nk}$$

Имея ввиду, что преобразование Фурье осуществляет топологический изоморфизм φ' на себя (в слабой топологии) и применяя теорему 1, получаем доказательство следующей теоремы.

Теорема 2. Мультиполярный ряд (2.6) сходится к фундаментальному решению уравнений статики анизотропной упругой среды в слабой топологии φ'.

Замечание 1. Известно [19], что задача суммирования ряда Фурье, коэффициенты которого определены приближенно, некорректно поставлена в паре метрических пространств l_2-C_u (C_u — пространство непрерывных функций с топологией равномерной сходимости). Это обстоятельство заставляет применять специальные методы регуляризации при суммировании мультиполярного ряда (2.6). Один из таких методов состоит в построении матричного символа $\mathbf{G}^{\vee}$, связанного с символом $\mathbf{E}^{\vee}$ соотношением

$$\mathbf{G}^{\vee}=\Delta_{\xi'}{}^2\mathbf{E}^{\vee}(\xi) \tag{2.7}$$

где $\Delta_{\xi'}$ — та часть оператора Лапласа, в которой дифференцирование осуществляется только по сферическим координатам

$$\Delta_{\xi'}=\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)$$

так что $\Delta=\Delta_r+r^{-2}\Delta_{\xi'}$. Нетрудно показать, что коэффициенты разложения символа (2.7) в мультиполярный ряд связаны с коэффициентами разложения $\mathbf{E}^{\vee}$ в тот же ряд формулой [18]:

$$\mathbf{G}_{nk}=(n(n+1))^2\mathbf{E}_{nk},\quad n\geqslant 4 \tag{2.8}$$

Формула (2.8) показывает, что малые (в метрике l_2) ошибки в определении коэффициентов $\mathbf{G}_{nk}$ приводят к малым (в метрике l_1) ошибкам в определении коэффициентов $\mathbf{E}_{nk}$. Стандартные оценки, вытекающие из неравенства Маркова для присоединенных функций Лежандра первого рода, в этом случае обеспечивают абсолютную и равномерную сходимость ряда (2.6) на S. Таким образом, при условии, что коэффициенты $\mathbf{E}_{nk}$ определены формулой (2.8), задача суммирования мультиполярного ряда (2.6) оказывается корректно поставленной в паре метрических пространств l_2—C_u.

Замечание 2. В тех случаях, когда требуется фундаментальное решение, имеющее особенность в произвольной точке $\mathbf{y}\in R^3$, более удобные формулы получаются, если в мультиполярном ряде (2.6) перейти от сферических координат к декартовым

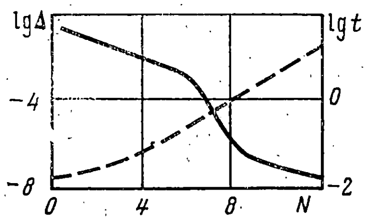
$$\cos\theta = x_3/r, \quad \cos\varphi = x_1/r', \quad \sin\varphi = x_2/r'$$
$$r = (x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{1/2}, \quad r' = (x_1^2+x_2^2)^{1/2}$$

Подстановка декартовых координат в мультиполярный ряд (2.6) позволяет записать фундаментальное решение с особенностью в точке $\mathbf{y}\in R^3$ в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \sum_{n=0,2,\ldots}^{\infty} \sum_{k=1}^{2n+1} \mathbf{E}_{nk}' V_k^h(\mathbf{x}-\mathbf{y})/|x-y|^{n+1} \tag{2.9}$$

где V_k^n — пространственная гармоника (шаровая функция), сужение которой на S совпадает с Y_k^n.

3. Пример. Ниже рассматривается определение фундаментального решения уравнений статики ортотропной упругой среды, характеризуемой следующими компонентами тензора упругости: $C_{1111}=3{,}999$, $C_{2222}=1{,}209$, $C_{3333}=1{,}091$, $C_{1212}=0{,}082$, $C_{1313}=0{,}074$, $C_{2323}=0{,}068$, $C_{1122}=2{,}429$, $C_{1133}=5{,}036$, $C_{2233}=1{,}210$. Приведенные значения соответствуют ортогонально армированному слоистому стеклопластику [20].



Для построения фундаментального решения ограничимся конечной степенью сферических гармоник (N), входящих в мультиполярные ряды. Подставляя усеченное разложение E в форме (2.9) в дифференциальные уравнения статики (2.1), получим $\delta\mathbf{I}+\mathbf{K}$, где $\mathbf{I}$ — единичная матрица, а $\mathbf{K}$ — матричный сингулярный оператор, возникающий вследствие усечения ряда (2.9) и ошибок в определении коэффициентов $\mathbf{E}_{nk}'$. Мультипликатор этого оператора в компонентной форме имеет вид (δ_p^t — дельта Кронекера):

$$m_p^t(\xi) = \sum_{n=0,2,\ldots}^{\infty} \sum_{k=1}^{2n+1} C_{pqrs} E_{nk}^{rt} \frac{\xi_q\xi_s}{|\xi|^2} Y_k^n(\xi') - \delta_p^t, \qquad \xi'\in S$$

Теорема Планшереля показывает, что спектральная L^2 — норма оператора $\mathbf{K}$ мажорируется величиной $\|m\|_\infty$, где $\|m\|_\infty$ — спектральная L^∞ — норма мультипликатора $\mathbf{m}$. Ввиду однородности степени 0 мультипликатора $\mathbf{m}$, оценку этой нормы естественно производить на сфере S. Обозначим

$$\Delta = \sup_{1\leqslant t\leqslant 3} \sup_{\xi'\in S} \sum_{p=1}^{3} |m_t^p(\xi')|$$

Величина Δ, как легко видеть, мажорирует спектральную L^∞ — норму $\mathbf{m}$ и служит естественной оценкой точности построенного фундаментального решения.

Сплошной линией на фигуре построен график изменения Δ в зависимости от максимальной степени (N) присутствующих в разложениях гармоник. Приведенный график показывает, что Δ убывает с ростом N, причем в диапазоне $N=6\div8$ изменение Δ происходит более, чем на два порядка. В дальнейшем скорость убывания Δ замедляется. Контрольные вычисления, проведенные при $N=20$ показали, что Δ приблизительно равно 10^{-8}, незначительно отличаясь от значения при $N=12$. Этот факт может объясняться чисто вычислительными аспектами: погрешностью квадратурных формул, ошибками при вычислении полиномов и присоединенных функций Лежандра, тригонометрических функций и т. д., что не позволяет уменьшить Δ. Штриховой линией на фигуре показана зависимость затрат процессорного времени (в секундах) от N.

Характеризуя полученные результаты с точки зрения практики, следует отметить, что точность вычисления фундаментального решения при $N=6\div8$ достаточна для большинства приложений и превосходит ту точность, с которой в ходе экспериментов определяются упругие параметры материалов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fredholm I.* Sur les équations de l'équilibre d'un corps solide élastique // Acta Math. 1900. V. 23. 42 p.
2. *Купрадзе В. Д., Башелейшвили М. О.* Новые интегральные уравнения теории упругости анизотропных тел // Сообщ. АН ГССР. 1954. Т. 15. № 6. С. 327–334.
3. *Бурчуладзе Т. В.* О некоторых плоских граничных задачах для анизотропных упругих тел // Тр. Тбил. мат. ин-та. 1960. Т. 27. С. 293–332.
4. *Бурчуладзе Т. В.* О некоторых граничных задачах для одного класса эллиптических систем // Сообщ. АН ГССР. 1963. Т. 31. № 3. С. 513–520.
5. *Хатиашвили Г. М.* Фундаментальные решения уравнений статики двумерного напряженного состояния анизотропной среды // Сообщ. АН ГССР. 1982. Т. 108. № 3. С. 509–512.
6. *Kröner E.* Das Fundamentalintegral der anisotropen elastischen Differentialgleichungen // Z. Physik. 1953. Bd. 136, H. 4. S. 402–410.
7. *Башелейшвили М. О.* О фундаментальных решениях дифференциальных уравнений анизотропного упругого тела // Сообщ. АН ГССР. 1957. Т. 19. № 4. С. 393–400.
8. *Кахниашвили Н. С.* Об одном случае элементарного представления фундаментальных решений дифференциальных уравнений анизотропного упругого тела // Тр. Тбил. ун-та. 1957. Т. 64. С. 123–126.
9. *Leibfrid G.* Versetzungen in anisotropen Material // Z. Physik. 1953. Bd. 135. H. 1. S. 23–43.
10. *Лифшиц И. М., Розенцвейг Л. Н.* О построении тензора Грина для основного уравнения теории упругости в случае неограниченной упруго-анизотропной среды // ЖЭТФ. 1947. Т. 17. Вып. 9. С. 783–791.
11. *Synge J. L.* The Hypercircle in mathematical physics. Cambridge: Cambr. Univ. Press, 1957. 424 p.
12. *Wilson R. B., Cruse T. A.* Efficient implementation of anisotropic three dimensional boundary-integral equation stress analysis // Intern. J. Numer. Methods Engng. 1978. V. 12. N. 9. P. 1383–1397.
13. *Vogel S. M., Rizzo F. J.* An integral equation formulation of three dimensional anisotropic elastostatic boundary value problems // J. Elast. 1973. V. 3. N. 3. P. 203–216.
14. *Zeilon N.* Das Fundamentalintegral der algemeinen partiellen linearen Differentialgleichung mit Konstanten Koeffizienten // Ark. Mat. Astr. Fys. 1911. V. 6. N. 38. 32 p.
15. *Bross H.* Das Fundamentalintegral der Elastizitätstheorie für kubische Medien // ZAMP. 1968. V. 19. N. 3. P. 434–446.
16. *Calderón A. P., Zygmund A.* Singular integral operators and differential equations // Amer. J. Math. 1957. V. 79. N. 4. P. 901–921.
17. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962. 254 с.
18. *Bochner S.* Harmonic Analysis and the Theory of Probability. Berkeley: Univ. Calif. Press, 1955. 176 p.
19. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974. 223 с.
20. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.

Москва

Поступила в редакцию 23.I.1988