

УДК 531.381

Г. Г. ДЕНИСОВ

О ВРАЩЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

Исследуется устойчивость тела, вращающегося вокруг центра масс в линейно сопротивляющейся среде при наличии момента, направленного вдоль одной из главных его осей, и устойчивость по части переменных при вращении в режиме выбега с применением функции Ляпунова. Показано, что условия устойчивости по Ляпунову в некоторых случаях кардинально отличаются от условий устойчивости на конечном интервале времени. Приведена оценка квазистационарных движений и исследована их устойчивость. Данной задаче посвящено значительное число работ [1-7], в которых рассматривались вопросы устойчивости вращения вокруг главных осей динамической симметрии тела.

1. Уравнения движения. Одна из особенностей постановки задачи об устойчивости в рассматриваемом случае состоит в выборе удобных для исследования координат. В предлагаемом исследовании рассмотрение проводится в координатах, равных проекциям u_1, u_2, u_3 орта кинетического момента \mathbf{H} и величине H , с использованием функции Ляпунова. Ограничений на величину H и коэффициенты сопротивления не предполагается.

Уравнения Эйлера, описывающие вращательные движения тела в сопротивляющейся среде и под действием момента, связанного с телом, имеют вид (остальные два уравнения получаются циклической перестановкой индексов 1, 2, 3; перестановка обозначается символом (1, 2, 3)):

$$A_1 \dot{\omega}_1 = (A_2 - A_3) \omega_2 \omega_3 - s_1 \omega_1 + m_1 \quad (1)$$

где A_i — моменты инерции тела; ω_i, m_i — проекции угловой скорости и момента на главные оси тела x_i ($m_i = \text{const}$), s_i — коэффициенты сопротивления.

Введем координаты

$$u_i = H_i / H = A_i \omega_i / H, \quad H = \left(\sum_{i=1}^3 A_i^2 \omega_i^2 \right)^{1/2} \quad (i=1, 2, 3)$$

Уравнения движения примут вид

$$u_i \dot{=} q_{23} H u_2 u_3 - \lambda_i u_i + u_1 \sum_{i=1}^3 \lambda_i u_i^2 - \frac{u_i}{H} \sum_{i=1}^3 m_i u_i + \frac{m_1}{H}$$

$$q_{23} = \frac{1}{A_3} - \frac{1}{A_2}, \quad \lambda_i = \frac{s_i}{A_i} \quad (1, 2, 3) \quad (2)$$

$$H = -H \sum_{i=1}^3 \lambda_i u_i^2 + \sum_{i=1}^3 m_i u_i, \quad \sum_{i=1}^3 u_i^2 = 1$$

где λ_i — коэффициенты затухания вращения, вдоль соответствующей оси, что непосредственно видно из уравнения (1) при $m_i = 0$ и $\omega_2 = \omega_3 = 0$. Полученные уравнения удобны для исследования устойчивости. Если только $m_3 \neq 0$, то имеется стационарное вращение $H_\infty = m_3 / \lambda_3$; $u_1 = u_2 = 0$. Очевидно, если момент направлен только по какой-либо другой оси, то и стационар-

ное вращение будет вокруг нее. Если все $m_i=0$, то имеется решение $H=H_0 \exp(-\lambda_3 t)$ $u_1=u_2=0$, соответствующее затухающему вращению вокруг оси x_3 , и подобные этому вращения вокруг x_1, x_2 .

2. Устойчивость стационарных вращений. Пусть только $m_3 \neq 0$. Система уравнений (2) имеет состояние равновесия $H_\infty = m_3/\lambda_3$, $u_1=u_2=0$, $u_3=1$. Линеаризованные уравнения имеют вид

$$u_1' = q_{23} H_\infty u_2 - \lambda_1 u_1 \quad (3)$$

$$u_2' = q_{31} H_\infty u_1 - \lambda_2 u_2, \quad \Delta H' = -\lambda_3 \Delta H$$

и устойчивы при положительных λ_i , если выполнено условие

$$\lambda_1 \lambda_2 - q_{23} q_{31} m_3^2 / \lambda_3^2 > 0 \quad (4)$$

откуда следует, что если A_3 — наибольший или наименьший момент инерции ($q_{23} q_{31} < 0$), то вращение устойчиво при любом m_3 , если же вращение происходит вокруг оси со средним моментом инерции, то оно устойчиво лишь при достаточно малых m_3 .

С увеличением m_3 , когда нарушаются условия устойчивости (4) появляются два дополнительных устойчивых равновесных относительно тела положений кинетического момента, задаваемых координатами

$$H_3^\infty = \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2}{q_{31} q_{23}} \right)^{1/2}, \quad H_1^\infty = \pm \left[\frac{\lambda_2}{q_{12} q_{31}} \left(\lambda_3 - \frac{m_3}{H_3^\infty} \right) \right]^{1/2}$$

$$H_2^\infty = \pm \left[\frac{\lambda_1}{q_{12} q_{23}} \left(\lambda_3 - \frac{m_3}{H_3^\infty} \right) \right]^{1/2}$$

Отметим неизменность проекции кинетического момента в направлении действия момента сил при его увеличении и рост перпендикулярных проекций.

3. Устойчивость затухающих вращений. Пусть невозмущенное вращение происходит вокруг оси x_3 и $\lambda_3 \neq 0$. Для исследования устойчивости запишем уравнения для u_1, u_2 и H с учетом $u_3 = (1 - u_1^2 - u_2^2)^{1/2}$ (при противоположном вращении перед корнем следует изменить знак):

$$u_1' = q_{23} H u_2 u_3 + (\lambda_3 - \lambda_1) u_1 (1 - u_1^2) + (\lambda_2 - \lambda_3) u_1 u_2^2$$

$$u_2' = q_{31} H u_1 u_3 + (\lambda_3 - \lambda_2) u_2 (1 - u_2^2) + (\lambda_1 - \lambda_3) u_2 u_1^2 \quad (5)$$

$$H' = H [-\lambda_3 + (\lambda_3 - \lambda_1) u_1^2 + (\lambda_3 - \lambda_2) u_2^2]$$

В линейном по u_1, u_2 приближении в первые два уравнения можно подставить решение третьего уравнения $H(t)$ и говорить об устойчивости состояния равновесия $u_1=u_2=0$ неавтономной системы.

В общем случае можно говорить об устойчивости невозмущенного движения по части переменных u_1, u_2 [8]. Составим функцию $V = q_{13} u_1^2 + q_{23} u_2^2$, являющуюся интегралом системы при $\lambda_i=0$ и выражающуюся через известные интегралы квадрата кинетического момента и энергии T : $V = A_3^{-1} - 2TH^{-2}$. Вращению вокруг оси x_3 соответствует $V=0$, вокруг x_2 или сепаратрисному движению — $V=q_{23}$, вокруг x_1 — $V=q_{13}$. Производная от V в силу уравнений (5) приводится к виду

$$V' = 2(\lambda_3 - \lambda_1) (q_{13} - V) u_1^2 + 2(\lambda_3 - \lambda_2) (q_{23} - V) u_2^2 \quad (6)$$

Сделаем предварительно несколько замечаний. $V'=0$ не только при $\lambda_i=0$, но и в случае, когда все коэффициенты затухания одинаковы. Это означает, во-первых, что траектории движения кинетического момента относительно тела не отличаются от консервативных [3], и, во-вторых, равенство λ_i между собой с точки зрения устойчивости по переменным u_i может рассматриваться граничным.

Из соотношения (6) следует также возможность появления в координатах u_i замкнутых траекторий (циклов), когда выражения при u_1^2 и u_2^2 имеют разные знаки и V' в среднем за время движения по такой траектории равно нулю. При этом значение V на цикле зависит от комбинации коэффициентов затухания $(\lambda_3 - \lambda_1) / (\lambda_3 - \lambda_2) = W$.

Если A_3 — наименьший момент инерции, то q_{13} и q_{23} положительны, функция V — положительно определенная по u_1 и u_2 , и достаточные условия устойчивости будут

$$\lambda_3 - \lambda_1 \leq 0, \quad \lambda_3 - \lambda_2 \leq 0 \quad (7)$$

с областью притяжения к невозмущенному решению $V \leq q_{23}$ ($q_{23} < q_{13}$). Результат будет тем же, если A_3 — наибольший момент инерции, изменятся лишь знаки q_{13} , q_{23} , V и V' . Можно строго показать, что полученные условия устойчивости и необходимы, однако для краткости ограничимся следующими рассуждениями. Для устойчивости по Ляпунову требуется рассмотрение на бесконечном интервале времени. В линеаризованных уравнениях для u_1 , u_2 , полученных из (5), при достаточно большом t за счет экспоненциального убывания H первыми членами правых частей можно пренебречь, и, следовательно, устойчивость возможна только при выполнении условий (7). Эти условия жестче условия, полученного в [5] и выражающего собой сумму неравенств (7).

Для исследования устойчивости затухающего вращения вокруг оси со средним моментом инерции (пусть $q_{23} > 0$, $q_{31} > 0$) ограничимся уравнениями для малых u_1 , u_2 :

$$\begin{aligned} u_1' &= q_{23} H u_2 + (\lambda_3 - \lambda_1) u_1 \\ u_2' &= q_{31} H u_1 + (\lambda_3 - \lambda_2) u_2 \\ H' &= -\lambda_3 H, \quad \lambda_3 > 0, \quad q_{23} + q_{31} = q_{21} \end{aligned} \quad (8)$$

Выберем $V = Q(H)(u_1^2 + u_2^2)$, $Q(H) = \exp[(H - H_0)q_{21}/\lambda_3]$ определено положительно по u_1 , u_2 при $0 \leq H \leq H_0$, так как выполняется неравенство $V > Q(0)(u_1^2 + u_2^2)$. Производная от V по времени в силу уравнений (8) приводится к виду

$$V' = Q(H)[-q_{21}H(u_1 - u_2)^2 + 2(\lambda_3 - \lambda_1)u_1^2 + 2(\lambda_3 - \lambda_2)u_2^2]$$

При $t \rightarrow \infty$ $H \rightarrow 0$ и условия устойчивости будут выполнены при $\lambda_3 < \lambda_1$ и $\lambda_3 < \lambda_2$.

Таким образом, наличие коэффициентов затухания при найденных соотношениях доставляет устойчивость по Ляпунову телу, вращающемуся вокруг оси со средним моментом инерции. Этот вывод находится в согласии с результатом об устойчивости стационарного вращения при малых m_3 и непрерывной зависимости решения уравнений (5) от начальных условий, в силу чего выбором весьма малых начальных значений u_1^0 , u_2^0 можно получить решение, близкое к невозмущенному.

Оценим, каким должно быть ограничение δ на начальные значения, чтобы отклонение от невозмущенного движения не превышало заданного сколь угодно малого ε . Рассмотрим поверхность

$$V = \exp[(H - H_0)q_{21}/\lambda_3](u_1^2 + u_2^2) = \text{const}$$

При $t = t_0$ $H = H_0$ и $V = u_{10}^2 + u_{20}^2 = \delta^2$. Если условия устойчивости выполнены, то $V' \leq 0$. Взяв крайний случай — равенства производной нулю, найдем, что при $t \rightarrow \infty$ ($H \rightarrow 0$) сумма $u_1^2 + u_2^2$ стремится к максимальному значению, которое примем за ε^2 . В результате будем иметь $\varepsilon^2 \exp[-H_0 q_{21}/\lambda_3] = \delta^2$. Отметим интенсивное уменьшение δ с ростом отношения H_0/λ_3 .

Итак, приходим к окончательному выводу: устойчивость по Ляпунову тела, вращающегося в линейно сопротивляющейся среде вокруг любой из главных осей динамической симметрии обеспечивается тогда, когда коэффициент затухания, соответствующий этой оси, минимален.

Этот вывод практически неприемлем по двум пунктам: во-первых, для устойчивости «средней» оси необходимы весьма жесткие ограничения, налагаемые на начальные условия; во-вторых, условия устойчивости экстремальных осей также завышены, так, как обеспечение устойчивости должно происходить при всех $t_0 \leq t < \infty$.

4. Устойчивость на конечном промежутке времени. Обратимся к исследованию устойчивости на конечном интервале времени и в случае практически приемлемых начальных отклонений [9, 10]. Будем придержи-

живаться одного из частных определений устойчивости, по которому невозмущенное движение считается устойчивым на отрезке $[t_0, T]$ относительно заданного предельного начального расстояния $\rho_0^* = (u_{10}^2 + u_{20}^2)^{1/2}$ если при выполнении неравенства $\rho_0 < \rho_0^*$ обеспечивается выполнение соотношения $\rho(t, t_0, u_{i0}) \leq \rho_0^*$ на данном отрезке времени.

Устойчивость в малом на конечном интервале времени экстремальных осей.

Пусть для определенности $q_{13} > 0$; $q_{23} > 0$. Предполагая, что на конечном интервале времени условия устойчивости будут другими, возьмем функцию Ляпунова более общего вида: $V = q_{13}u_1^2 + q_{23}u_2^2 + 2au_1u_2$ определено положительную при $a^2 < q_{13}q_{23}$. Производная по времени в силу уравнений (5) после их линеаризации равна

$$V' = 2q_{13}(\lambda_3 - \lambda_1 - aH) + 2q_{23}(\lambda_3 - \lambda_2 + aH) + 2a(2\lambda_3 - \lambda_1 - \lambda_2)u_1u_2$$

и определено отрицательна при

$$\lambda_3 - \lambda_1 - aH < 0 \tag{9}$$

$$4q_{13}q_{23}(\lambda_3 - \lambda_1 - aH)(\lambda_3 - \lambda_2 + aH) > a^2(2\lambda_3 - \lambda_1 - \lambda_2)^2$$

Оптимизация этих неравенств по параметру a при $t = t_0$ дает соотношения

$$\left. \begin{aligned} 2\lambda_3 - \lambda_1 - \lambda_2 < 0, \\ 4q_{23}q_{13}H^2 + (\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2) > 0 \end{aligned} \right\} \tag{10}$$

Эти неравенства определяют устойчивость на конечном интервале времени.

Рассмотрим случай, когда вместе с выполнением последнего неравенства одно из условий устойчивости по Ляпунову не выполнено, например, $\lambda_3 - \lambda_1 > 0$, на $2\lambda_3 - \lambda_1 - \lambda_2 = -\kappa < 0$. Выберем $a = 1/2(\lambda_2 - \lambda_1)/H_0$ и первое из неравенств (9) будет таким $\lambda_3 - \lambda_1 - 1/2 \exp[-\lambda_3(t - t_0)] < 0$, по которому $T - t_0 < \lambda_3^{-1} \ln [1 + 1/2\kappa/(\lambda_3 - \lambda_1)]$

Итак, для каждого t_0 (или H_0) можно выбрать a , при котором за время $t_0 \leq t < T$ функция V (характеризующая расстояние до невозмущенного движения, если она определено положительна) убывает при условиях (10). Первое из них совпадает с условием, полученным методом осреднения в работе [5], в предположении о малости действующих на тело моментов $\lambda/(qH) = \varepsilon \ll 1$, а второе существенно ослабляет это ограничение.

Устойчивость вращения вокруг «средней оси» на конечном интервале времени обеспечивается при условиях, которые приводятся без доказательства

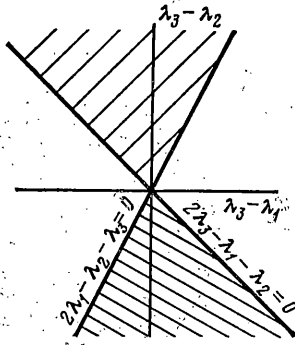
$$2\lambda_3 - \lambda_1 - \lambda_2 < 0 \tag{11}$$

$$-q_{23}q_{31}H^2 + (\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2) > 0$$

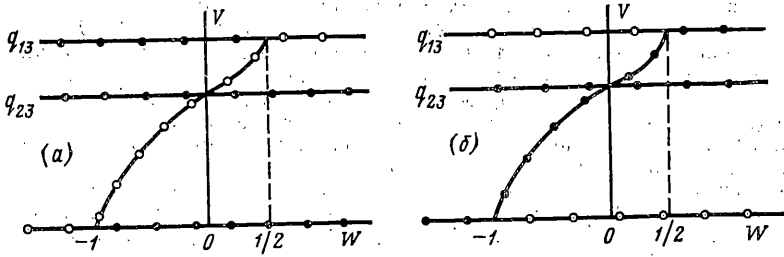
и возможна лишь при достаточно малом H .

5. Квазистационарные циклы в переменных u_i и их устойчивость. Поскольку первое условие (10) слабее условий устойчивости по Ляпунову (7), появляется возможность неустойчивости (или устойчивости) одновременно двух экстремальных осей при одних и тех же λ_i . При этом траектории на сфере $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$, исходя от неподвижных неустойчивых точек сгущаются в области вблизи некоторых замкнутых кривых. Если же неподвижные точки устойчивы, то подобные замкнутые кривые определяют границы областей притяжения этих точек. Области сгущения (или «водораздела») тем более локализованы вблизи замкнутых кривых на сфере, чем меньше ε .

В [7] впервые указано на существование таких кривых («квазистационарных движений») и рассчитано их положение при малом ε . В данной работе оценка этих особых траекторий (циклов) была произведена с помощью функции Ляпунова. Для случая $A_3 < A_2 < A_1$ значение функ-



Фиг. 1



Фиг. 2

ции V_c на цикле оценивается неравенством

$$q_{23}(1+W)(1+\alpha W)^{-1} < V_c < (1-W^2)(1-\alpha W^2)^{-1} q_{23}$$

$$W = (\lambda_3 - \lambda_1) / (\lambda_3 - \lambda_2), \quad \alpha = q_{23} / q_{13} < 1$$

При этом функция V бралась в виде: $V = q_{13}u_1^2 + q_{23}u_2^2 + 2au_1u_2(1-u_1^2-u_2^2)^n$, а параметры a и n подбирались из условия, чтобы ограничения для V_c снизу и сверху по возможности меньше различались. Оценка производилась по правилу: если цикл устойчив, то $V^* < 0$ при $V > V_c$ и $V^* > 0$ при $V < V_c$. Если же цикл неустойчив, то имеют место обратные неравенства.

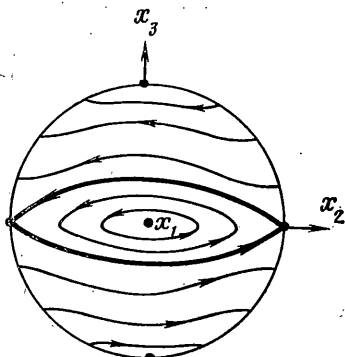
Результаты исследования устойчивости на конечном интервале времени иллюстрируются на фиг. 1, 2. На фиг. 1 выделены область устойчивости осей тела с максимальным и минимальным моментами инерции (частая штриховка) и область неустойчивости двух этих осей (редкая штриховка). На фиг. 2 приведена качественная картина зависимости устойчивости состояний равновесия на единичной сфере, наличия на ней замкнутых циклов их положения и устойчивости в зависимости от параметра W для верхней полуплоскости $\lambda_3 - \lambda_2 > 0$ (а), и для нижней $\lambda_3 - \lambda_2 < 0$ (б): Светлыми кружками помечена устойчивость, а темными неустойчивость особых элементов.

Легко проследить за изменением особых элементов и их характера при изменении W . При $\lambda_3 > \lambda_2$ (фиг. 2, а) и $W < -1$ имеются три состояния равновесия, из них лишь состояние $V=0$ (вращение вокруг оси x_3) устойчиво. При $W=-1$ из устойчивого состояния равновесия рождается устойчивый цикл, охватывающий ось x_3 , вместе со сменой устойчивости состояния равновесия. Дальнейший рост W приводит к увеличению размеров цикла, слиянию его с сепаратрисой ($V=q_{23}$) при $W=0$ и превращению в цикл, охватывающий ось x_1 . При $W=1/2$ цикл сливается с состоянием равновесия, соответствующим вращению вокруг оси x_1 , которое становится устойчивым. Изменение особых элементов при $\lambda_3 < \lambda_2$ можно проследить аналогично по фиг. 2, б.

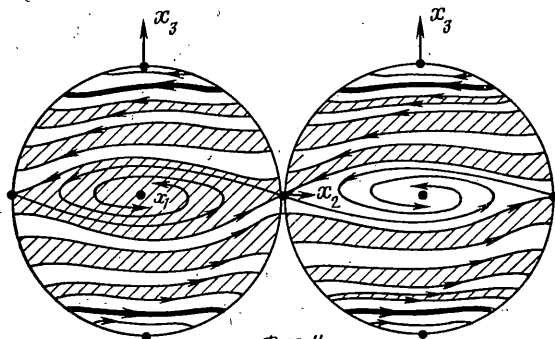
Особо отметим (это следует из формулы (6) и фиг. 2, а), что при $\lambda_3 = \lambda_1$ и $\lambda_3 - \lambda_2 > 0$ все движения стремятся к сепаратрисному. При этом с течением времени след вектора кинетического момента на единичной сфере проходит все ближе от оси x_2 , движения вдоль траектории становятся весьма неравномерными, «застревая» все дольше у этой оси. Посторонний наблюдатель видит в основном вращение вокруг оси со средним моментом инерции то в прямую, то в обратную сторону.

С уменьшением величины H смена направлений вращения становится все реже, и, наконец, когда инерционные моменты становятся меньше вязких, устанавливается устойчивое вращение вокруг оси со средним моментом инерции с направлением, весьма сложно зависящим от начальных условий.

Зная соотношения между коэффициентами затухания и величиной H , можно определить особые элементы на единичной сфере (состояния равновесия и циклы),



Фиг. 3



Фиг. 4

их устойчивость и полностью представить картину поведения траекторий на сфере. На фиг. 3 для консервативного случая ($\lambda_i=0$) и для случая $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$ изображены траектории, идущие по полусфере $u_1>0$ на плоскости x_2x_3 . Проекция траекторий другой полусферы те же самые с измененным направлением движения.

На фиг. 4 приведены траектории при $-1<W<0$, $\lambda_3-\lambda_2<0$ для $u_1\geq 0$ (слева) и для $u_1\leq 0$ (справа). Вращения вокруг экстремальных осей x_1 , x_3 устойчивы и траектории стремятся к ним, отходя от двух неустойчивых циклов, охватывающих ось x_3 , и являющихся границами областей притяжения равновесных точек $u_3=\pm 1$.

Вид областей притяжения точек $u_1=\pm 1$ очень сложен, особенно в случае малых коэффициентов затухания (или малой их разницы) и вблизи неустойчивых циклов (жирные линии), когда скрутка траекторий незначительна и зоны, принадлежащие одной из областей притяжения становятся весьма узкими и переплетаются с зонами другой области. На фиг. 4 штриховкой отмечена область притяжения точки $u_1=+1$. В силу сказанного весьма мало различающимся начальным условиям вблизи неустойчивых циклов будут соответствовать при $t\rightarrow\infty$ вращения вокруг оси x_1 противоположных направлений.

При том же W , но $\lambda_3-\lambda_2>0$ состояния равновесия будут неустойчивы, а циклы устойчивы. Подобным образом можно нарисовать качественную картину поведения траекторий и при других параметрах.

Таким образом, стационарные вращения тела вокруг экстремальной оси в сопротивляющейся среде при наличии крутящего момента вдоль этой оси устойчивы всегда; подобное вращение вокруг оси со средним моментом инерции устойчиво лишь при достаточно малом моменте, ограниченном неравенством (4).

Вращение вокруг любой из главных осей тела при наличии только моментов сопротивления устойчиво по Ляпунову тогда и только тогда, когда коэффициент затухания, соответствующий исследуемой оси, наименьший.

Устойчивость на конечном промежутке времени при наличии только моментов сопротивления обеспечивается для экстремальной оси, если соответствующий ей коэффициент затухания меньше полусуммы других и при условии (10), наложенном на кинетический момент; для оси со средним моментом инерции при условиях (11).

Подчеркнем неожиданный результат: устойчивость по Ляпунову вытекающего вращения вокруг оси со средним моментом инерции и наименьшим коэффициентом затухания и стремление траекторий к сепаратрисным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крылов А. Н., Круглов Ю. А. Общая теория гироскопов и некоторых технических их применений. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1932, 356 с.
2. Булгаков Б. В. Прикладная теория гироскопов. М.: Изд-во МГУ, 1976, 401 с.
3. Кошляков В. И. О некоторых частных случаях интегрирования динамических уравнений Эйлера, связанных с движением гироскопа в сопротивляющейся среде // ПММ, 1953, Т. 17, Вып. 2, С. 137-148.
4. Магнус К. Гироскоп. Теория и применение. М.: Мир, 1974, 526 с.
5. Леценко Д. Д. О движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в слабо сопротивляющейся среде // Прикл. механика, 1975, Т. II, Вып. 3, С. 89-94.
6. Нейштадт А. И. Об эволюции вращения твердого тела под действием суммы постоянного и диссипативного возмущающих моментов // Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 6, С. 30-36.

7. Акуленко Л. Д., Леценко Д. Д., Черноусько Ф. Л. Быстрое движение вокруг неподвижной точки тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 3. С. 5—13.
8. Румянцев В. В., Озиранер А. С. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987. 253 с.
9. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. М.: Гостехиздат, 1955. 207 с.
10. Карачаров К. А., Пилютик А. Г. Введение в техническую теорию устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1962. 243 с.

Горький

Поступила в редакцию
19.1.1988