

УДК 531.384

О. В. ХОЛОСТОВА

О БИФУРКАЦИОННЫХ МНОЖЕСТВАХ В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ЭЛЛИПСОИДА НА ГЛАДКОЙ ПЛОСКОСТИ

Рассматриваются бифуркационные множества в задаче о движении тяжелого трехосного эллипсоида на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости. Дается топологическое описание совместных уровней интегралов энергии и момента в фазовом пространстве задачи. Техника исследования основывается на работе [1]. Аналогичная задача для твердого тела с неподвижной точкой изучалась в [2–5]. В [6] определяются области возможного движения иглы внутри абсолютно гладкой полусферы.

1. Описание бифуркационного множества. Рассмотрим движение тяжелого твердого тела на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости. Тело ограничено эллипсоидальной поверхностью, главные оси которой совпадают с главными центральными осями инерции тела. Без потери общности будем считать, что скорость проекции центра тяжести тела на опорную плоскость равна нулю.

Введем связанную систему координат с началом в центре масс тела, ее оси направим по главным центральным осям инерции, а ориентацию относительно неподвижного пространства зададим с помощью углов Эйлера ψ, θ, φ , которые определяются обычным образом.

Рассматриваемая система допускает интегралы энергии и момента количества движения относительно вертикали:

$$E = \frac{1}{2} m z^2 + \frac{1}{2} (A \omega_1^2 + B \omega_2^2 + C \omega_3^2) + m g z = h \quad (1.1)$$

$$J = A \omega_1 \gamma_1 + B \omega_2 \gamma_2 + C \omega_3 \gamma_3 = p \quad (1.2)$$

где m — масса эллипсоида, z — высота центра тяжести над опорной плоскостью, A, B, C — главные центральные моменты инерции тела, $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ и $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — проекции на оси связанной системы координат вектора угловой скорости и единичного вектора вертикали соответственно.

Эффективный потенциал имеет вид [7] (a, b, c — полуоси эллипсоида):

$$V_p = m g z + \frac{1}{2} p^2 (A \gamma_1^2 + B \gamma_2^2 + C \gamma_3^2)^{-1} \quad (1.3)$$

$$z = f(\theta, \varphi) = (a^2 \gamma_1^2 + b^2 \gamma_2^2 + c^2 \gamma_3^2)^{1/2}$$

Формула (1.3) определяет функцию $V_{ph}(\theta, \varphi)$ на единичной сфере S^2 , причем θ и φ есть широта и долгота точки на сфере.

Топологический тип совместных многообразий уровня $I_{h,p}$ первых интегралов энергии и момента, так же как и многообразий

$$M_{h,p} = \{x \in S^2, V_{ph}(x) \leq h\} \quad (1.4)$$

меняется при прохождении бифуркационного множества Σ , которое описывается следующим образом [1]:

$$\Sigma = \{(p, V_{ph}(\Gamma)), \Gamma : \partial V_{ph}(\theta, \varphi) / \partial \theta = \partial V_{ph}(\theta, \varphi) / \partial \varphi = 0\} \quad (1.5)$$

Уравнения в (1.5) определяют относительные равновесия системы, являющиеся перманентными вращениями тела вокруг вертикали. В [8] дано описание перманентных вращений трехосного эллипсоида на глад-

кой плоскости, условия их существования, ветвления и устойчивости. В [9] та же задача решена для эллипсоида вращения с трехосным эллипсоидом инерции.

2. Эволюция кривых $V_{pk}(\Gamma)$. Примем следующие соотношения между моментами инерции и между полуосями эллипсоида $A > B > C$, $a > b > c$. Соотношения (1.5) позволяют определить приведенные ниже условия для относительных равновесий системы

1. $\sin \theta = 0$
2. $\cos \theta = 0, \quad \sin \varphi = 0$
3. $\cos \theta = 0, \quad \cos \varphi = 0$
4. $\cos \theta = 0, \quad mg(a^2 - b^2)(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{-1/2} =$
 $= p^2(A - B)(A \sin^2 \varphi + B \cos^2 \varphi)^{-2}$
5. $\sin \varphi = 0, \quad mg(b^2 - c^2)(b^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta)^{-1/2} =$
 $= p^2(B - C)(B \sin^2 \theta + C \cos^2 \theta)^{-2}$
6. $\cos \varphi = 0, \quad mg(a^2 - c^2)(a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta)^{-1/2} =$
 $= p^2(A - C)(A \sin^2 \theta + C \cos^2 \theta)^{-2}$
7. $mg(a^2 - b^2)(a^2 \gamma_1^2 + b^2 \gamma_2^2 + c^2 \gamma_3^2)^{-1/2} =$
 $= p^2(A - B)(A \gamma_1^2 + B \gamma_2^2 + C \gamma_3^2)^{-2}, \quad (A - B)c^2 + (C - A)b^2 + (B - C)a^2 = 0$

Первые три условия в (2.1) описывают равномерные вращения эллипсоида вокруг главных центральных осей инерции. Соответствующие им множества точек $(p, V_{pk}(\Gamma))$ представляют собой параболы, уравнения которых суть

$$\begin{aligned} V_{pk}^c &= mgc + p^2/2C \\ V_{pk}^b &= mgb + p^2/2B, \quad V_{pk}^a = mga + p^2/2A \end{aligned} \quad (2.2)$$

Эти параболы попарно пересекаются, причем абсциссы точек пересечения даются соотношениями (двойной индекс указывает, какая пара парабол рассматривается):

$$\begin{aligned} p_{ab}^2 &= 2mg(a-b)AB/(A-B), \quad p_{bc}^2 = 2mg(b-c)BC/(B-C) \\ p_{ac}^2 &= 2mg(a-c)AC/(A-C) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Взаимное расположение величин p_{ab}^2 , p_{bc}^2 , p_{ac}^2 зависит от знака величины

$$\chi = A(B-C)a + B(C-A)b + C(A-B)c \quad (2.4)$$

Если $\chi > 0$, то $p_{ab}^2 > p_{ac}^2 > p_{bc}^2$; если $\chi < 0$, то $p_{ab}^2 < p_{ac}^2 < p_{bc}^2$.

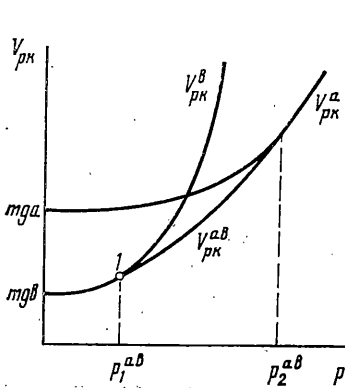
Относительные равновесия 4, 5, 6 в (2.1) суть равномерные вращения эллипсоида вокруг вертикальной оси, лежащей в одной из его главных центральных плоскостей инерции.

Исследуем поведение кривой, назовем ее $V_{pk}^{ab}(\Gamma)$, для относительного равновесия 4. В силу очевидной симметрии множества Σ относительно оси $p=0$ ограничимся рассмотрением полуплоскости $p > 0$. Эволюция кривой $V_{pk}^{ab}(\Gamma)$ при различных соотношениях между параметрами эллипсоида (моментами инерции и полуосями) показана на фиг. 1-3. Каждой точке кривой соответствует четыре точки на сфере S^2 .

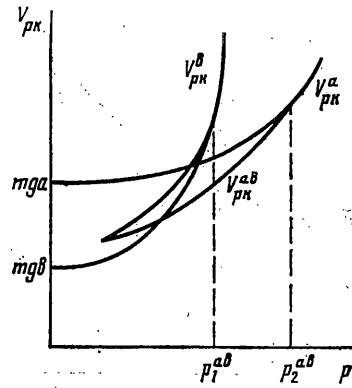
Кривая $V_{pk}^{ab}(\Gamma)$ касается парабол $V_{pk}^b(\Gamma)$ и $V_{pk}^a(\Gamma)$ в точках с абсциссами p_1^{ab} и p_2^{ab} соответственно, где

$$\begin{aligned} (p_1^{ab})^2 &= mgB^2(a^2 - b^2)[(A-B)b]^{-1} \\ (p_2^{ab})^2 &= mgA^2(a^2 - b^2)[(A-B)a]^{-1} \end{aligned} \quad (2.5)$$

При $1 < a^2/b^2 < (4A-3B)/B$ кривая $V_{pk}^{ab}(\Gamma)$ имеет одну ветвь (фиг. 1). При $a^2/b^2 = (4A-3B)/B$ точка 1 на фиг. 1 становится двойной, и при дальнейшем увеличении отношения a^2/b^2 у кривой $V_{pk}^{ab}(\Gamma)$ появляется вторая ветвь (фиг. 2). Обе ветви кривой касаются друг друга в «вершине» с абс-



Фиг. 1



Фиг. 2

циссой p_{ab}^* , определяемой из уравнения

$$(p_{ab}^*)^2 = mg(a^2 - b^2) [(A - B)t^* + B]^2 [(a^2 - b^2)t^* + b^2]^{-1/2} (A - B)^{-1} \quad (2.6)$$

$$t^* = (A - B)^{-1} \{ [(p_{ab}^*)^2 (A - B) (4m^2 g^2 (a^2 - b^2))^{-1}]^{1/2} - B \}$$

Далее при увеличении a^2/b^2 точка с абсциссой p_1^{ab} «ползет» вверх по параболе $V_{pk}^b(\Gamma)$, достигает при $a^2/b^2 = ((2A - B)/B)^2$ точки пересечения парабол $V_{pk}^a(\Gamma)$ и $V_{pk}^b(\Gamma)$, затем при $a^2/b^2 = A^4/B^4$ оказывается $p_1^{ab} = p_2^{ab}$ и при $a^2/b^2 > A^4/B^4$ имеем $p_2^{ab} < p_1^{ab}$. Далее эволюция продолжается только при $B > A/2$: точка с абсциссой p_2^{ab} при $a^2/b^2 > (A/(2B - A))^2$ ползет вниз по параболе $V_{pk}^a(\Gamma)$ (кривая $V_{pk}^{ab}(\Gamma)$ по-прежнему имеет две ветви). Если, кроме того, $B > 3/4A$, то при $a^2/b^2 = A/(4B - 3A)$ точка с абсциссой p_2^{ab} становится двойной, первая ветвь исчезает, и при $a^2/b^2 > A/(4B - 3A)$ имеем одну ветвь, показанную на фиг. 3.

Эволюцию кривых $V_{pk}^{bc}(\Gamma)$ и $V_{pk}^{ac}(\Gamma)$, отвечающих относительным равновесиям 5 и 6, можно исследовать аналогичным образом. Отметим лишь, что, так же как и для кривой $V_{pk}^{ab}(\Gamma)$, для этих кривых вводятся величины p_i^{bc} и p_i^{ac} ($i=1, 2$) — абсциссы точек касания кривых с соответствующими параболой. Значения p_i^{bc} и p_i^{ac} получаются из (2.5) путем циклической перестановки величин A, B, C и a, b, c .

Взаимное расположение точек с абсциссами $p_i^{ab}, p_i^{bc}, p_i^{ac}$ ($i=1, 2$) на параболах $V_{pk}^a(\Gamma), V_{pk}^b(\Gamma), V_{pk}^c(\Gamma)$ зависит от знака величины κ , где

$$\kappa = (A - B)c^2 + (C - A)b^2 + (B - C)a^2 \quad (2.7)$$

Если $\kappa < 0$, то

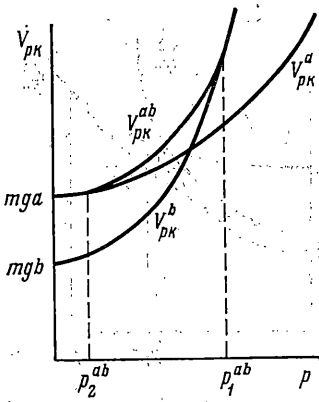
$$p_2^{ab} < p_2^{ac}, \quad p_1^{ab} < p_2^{bc}, \quad p_1^{ac} < p_1^{bc} \quad (2.8)$$

При $\kappa > 0$ знаки всех неравенств меняются на противоположные. (Отметим, что при $\kappa = 0$ имеем относительное равновесие 7, о котором будет сказано ниже).

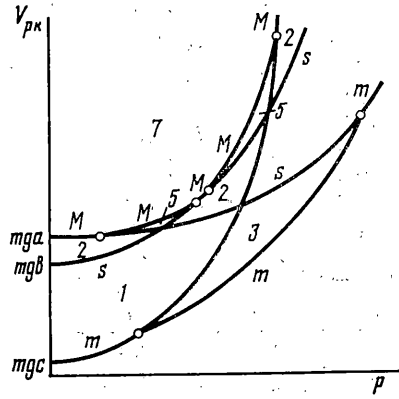
3. Вид бифуркационного множества и типы интегральных многообразий. Вид бифуркационного множества ε в плоскости переменных (p, v_{pk}) различен в зависимости от знаков величин χ и κ , определяемых в (2.4) и (2.7). В пространстве величин a, b, c уравнения $\chi = 0$ и $\kappa = 0$ задают плоскость и конус (рассматриваются только их части, лежащие в октанте $a > 0, b > 0, c > 0$). При каждом заданном наборе величин A, B, C точка в пространстве a, b, c может попасть в три или все четыре из перечисляемых ниже областей (исключаем случай $\kappa = 0$):

$$1) \kappa < 0, \chi < 0; 2) \kappa < 0, \chi \geq 0; 3) \kappa > 0, \chi < 0; 4) \kappa > 0, \chi \geq 0 \quad (3.1)$$

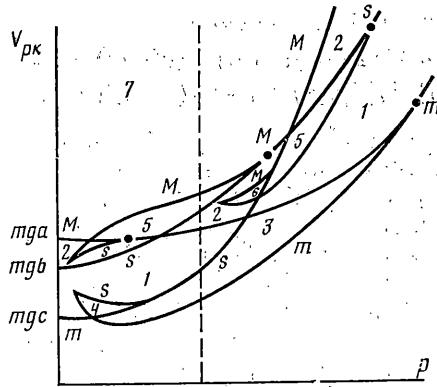
Бифуркационные множества Σ для области $\kappa < 0, \chi < 0$ представлены на фиг. 4–5. Выбраны некоторые характерные случаи взаимного расположения кривых $V_{pk}^{ab}(\Gamma), V_{pk}^{bc}(\Gamma), V_{pk}^{ac}(\Gamma)$. Другие варианты бифуркационных множеств для данных и трех остальных областей можно построить исходя из фиг. 1–3 и соотношений (2.3), (2.5), (2.6), (2.8).



Фиг. 3



Фиг. 4



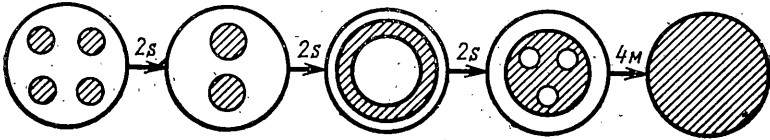
Фиг. 5

Буквы M , s , m на фиг. 4–5 означают максимум, седловую точку и минимум. Каждая точка на параболах соответствует паре критических точек на сфере S^2 , каждая точка на кривых $V_{pk}^{ab}(\Gamma)$, $V_{pk}^{bc}(\Gamma)$, $V_{pk}^{ac}(\Gamma)$ — четверке критических точек. За исключением точек ветвления, все критические точки являются невырожденными.

Цифрами на фиг. 4–5 отмечены области, соответствующие непустым интегральным многообразиям. Ниже указаны топологические типы интегральных многообразий $M_{h,p}^k$, соответствующих каждой области [10], а также топологические типы интегральных многообразий $I_{h,p}$ для связных $M_{h,p}^k$ (для несвязных $M_{h,p}^k$ необходимо объединить интегральные многообразия, соответствующие связным составляющим $M_{h,p}^k$): области 1 соответствуют $2D^2$, области 2 — $D^1 \times S^1$, области 3 — $4D^2$, области 4 — $6D^2$, области 5 — D_3^2 , области 6 — D_5^2 , области 7 — S^2 ; для компоненты D^2 соответствующий тип $I_{h,p}$ есть $S^3 \times S^1$, для $D^1 \times S^1$ — $S^2 \times T^2$, для D_3^2 — $S_3^3 \times S^1$, для D_5^2 — $S_5^3 \times S^1$, для S^2 — $SO(3) \times S^1$. Здесь введены следующие обозначения: D^k — диск размерности k , D_k^k — круг с k «дырками», $S_k^3 = \partial D_k^4$ — граница четырехмерного диска с k дырками.

Многообразия $M_{h,p}^k$ можно трактовать как множества, которые пересекает вертикальная ось на единичной сфере S^2 , жестко связанной с эллипсоидом, при движении эллипсоида [3].

Рассмотрим в качестве примера изменение топологического типа множеств $M_{h,p}^k$ при движении вдоль штриховой линии, показанной на фиг. 5. Имеем следующую последовательность множеств: $4D^2 \rightarrow 2D^2 \rightarrow D^1 \times S^1 \rightarrow D_3^2 \rightarrow S^2$. Указанные множества гомеоморфны областям, заштрихованным на фиг. 6. Над стрелками на фиг. 6 указаны типы критических точек, через которые, пересекая множество Σ , проходит штриховая линия (фиг. 5), и их кратность.



Фиг. 6

4. Устойчивость перманентных вращений. Вопрос об устойчивости перманентных вращений эллипсоида решается на основании теорем Рауса и Кельвина — Четаева и зависит от характера соответствующих критических точек. В точках минимума стационарное вращение устойчиво (степень неустойчивости $\lambda=0$), в седловых точках неустойчиво ($\lambda=1$), а в точках максимума ($\lambda=2$) для выяснения характера устойчивости необходимо дополнительное исследование, привлекающее теорию Колмогорова — Арнольда — Мозера, которое здесь не проводится.

Полученные выводы об устойчивости совпадают с результатами [8]. Изложим их в обозначениях, принятых в данной работе.

Для стационарного движения 1 степень неустойчивости λ меняется в зависимости от p следующим образом ($\kappa > 0$): $\lambda=0$ при $0 \leq p^2 < (p_1^{bc})^2$ (устойчивость), $\lambda=1$ (неустойчивость) при $(p_1^{bc})^2 < p^2 < (p_1^{ac})^2$, $\lambda=2$ при $p^2 > (p_1^{ac})^2$. При $\kappa < 0$ p_1^{bc} и p_1^{ac} меняются местами.

Для стационарного движения 2 при $\kappa > 0$ имеем $\lambda=1$ (неустойчивость) при $0 \leq p^2 < (p_2^{bc})^2$ и при $p^2 > (p_1^{ab})^2$, $\lambda=0$ (устойчивость) при $(p_2^{bc})^2 < p^2 < (p_1^{ab})^2$; при $\kappa < 0$ имеем $\lambda=1$ (неустойчивость) при $0 \leq p^2 < (p_1^{ab})^2$ и при $p^2 > (p_2^{bc})^2$, $\lambda=2$ (в соответствующем месте в [8] допущена неточность) при $(p_1^{ab})^2 < p^2 < (p_2^{bc})^2$.

Для стационарного движения 3 ($\kappa > 0$): $\lambda=2$ при $0 \leq p^2 < (p_2^{ac})^2$, $\lambda=1$ (неустойчивость) при $(p_2^{ac})^2 < p^2 < (p_2^{ab})^2$, $\lambda=0$ (устойчивость) при $p^2 > (p_2^{ab})^2$. При $\kappa < 0$ p_2^{ab} и p_2^{ac} меняются местами.

Устойчивость стационарных движений 4, 5, 6 зависит от знаков величин $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ соответственно, где

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 3(A-B)(a^2 \sin^2 \varphi_* + b^2 \cos^2 \varphi_*) + Ab^2 - Ba^2 \\ \alpha_2 &= 3(B-C)(b^2 \sin^2 \theta_* + c^2 \cos^2 \theta_*) + Bc^2 - Cb^2 \\ \alpha_3 &= 3(A-C)(a^2 \sin^2 \theta_* + c^2 \cos^2 \theta_*) + Ac^2 - Ca^2 \end{aligned} \quad (4.1)$$

(φ_* или θ_* — соответствующие рассматриваемому движению стационарные значения углов φ или θ).

При $\kappa > 0$ для стационарного движения 4 $\lambda=0$ (устойчивость) при $\alpha_1 > 0$ и $\lambda=1$ (неустойчивость) при $\alpha_1 < 0$; для стационарного движения 5 $\lambda=0$ (устойчивость) при $\alpha_2 > 0$ и $\lambda=1$ (неустойчивость) при $\alpha_2 < 0$; для стационарного движения 6 $\lambda=1$ (неустойчивость) при $\alpha_3 > 0$ и $\lambda=2$ при $\alpha_3 < 0$.

Если $\kappa < 0$, то степень неустойчивости для стационарных движений 4 и 6 увеличивается на единицу, для стационарного движения 5 уменьшается на единицу.

Пусть теперь параметры задачи таковы, что $\kappa=0$. В этом случае относительные равновесия системы определяются седьмым соотношением в (2.1), а положение оси вращения эллипсоида может быть произвольным. В частности, возможны перманентные вращения, определяемые условиями 1–6 в (2.1). Для этих частных вращений вид бифуркационных кривых аналогичен построенным выше кривым (только теперь $p_2^{ab}=p_2^{ac}$, $p_1^{ab}=p_2^{bc}$, $p_1^{ac}=p_1^{bc}$ и точки ветвления становятся двойными). Однако каждая точка на кривых $V_{pk}^{ab}(\Gamma)$, $V_{pk}^{bc}(\Gamma)$, $V_{pk}^{ac}(\Gamma)$ (при $\kappa=0$) является вырожденной критической точкой.

Отметим, что в случае эллипсоида, близкого к шару, условие $\kappa=0$ совпадает с необходимым условием существования дополнительного интеграла в данной задаче [11].

Подробнее случай $\kappa=0$ рассмотрен в [8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Смейл С. Топология и механика // Успехи мат. наук. 1972. Т. 27. № 2. С. 77–120.
2. Капок С. Б. Бифуркационные множества и интегральные многообразия в задаче о движении тяжелого твердого тела // Успехи мат. наук. 1972. Т. 27. № 2. С. 126–133.
3. Кузьмина Р. П. О бифуркационном множестве в задаче о движении твердого тела с неподвижной точкой // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 1. С. 3–10.
4. Татаринев Я. В. К исследованию фазовой топологии компактных конфигураций с симметрией // Вестн. МГУ. Математика, механика. 1973. № 5. С. 70–77.
5. Татаринев Я. В. Портреты классических интегралов задачи о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Вестн. МГУ. Математика, механика. 1974. № 6. С. 99–105.
6. Шапошников В. П. Области возможного движения иглы внутри гладкой сферической поверхности // Устойчивость и колебания нелинейных механических систем. М.: МАИ. 1987. С. 44–47.
7. Карапетян А. В. Об устойчивости стационарных движений тяжелого твердого тела на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 3. С. 504–511.
8. Карапетян А. В., Рубановский В. Н. О бифуркации и устойчивости перманентных вращений тяжелого трехосного эллипсоида на гладкой плоскости // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 2. С. 260–267.
9. Эприкашвили Г. П. О бифуркации и устойчивости перманентных вращений тяжелого эллипсоида вращения на гладкой плоскости // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ АН СССР, 1987. С. 73–82.
10. Милнор Дж. Теория Морса // М.: Мир, 1965. 184 с.
11. Буров А. А., Карапетян А. В. О несуществовании дополнительного интеграла в задаче о движении тяжелого твердого эллипсоида по гладкой плоскости // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 3. С. 501–503.

Москва

Поступила в редакцию
25.V.1988