МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 · 1989

УДК 531.36

Б. В. УЛАНОВ

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ С НЕИЗВЕСТНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ БЕЗ ИЗМЕРЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ

Предлагается решение задачи стабилизации линейной управляемой динамической системы с изменяющимися произвольным образом в широких известных ограниченных пределах неизвестными параметрами без измерения производных регулируемой величины. Приводится пример стабилизации дополнительной силой состояния равновесия механической системы второго порядка.

1. Стабилизация динамических систем с нестационарными параметрами. Рассмотрим управляемую динамическую систему, описываемую уравнениями

$$x_i^{\bullet}=x_{i+1} \quad (i=1,\dots,n-1) \tag{1.1}$$

$$x_n^{\bullet}=-\sum_{i=1}^{n} a_i(t)x_i+u, \qquad y=x_1, \qquad t\geqslant t_0$$

где $(x_1,\dots,x_n)^T\in R^n$ — состояние, $u\in R$ — управление, x_1 — регулируемая величина, y — выход; $a_i(t)$ $(i=1,\dots,n)$ — неизвестные параметры системы. Предполагается, что $a_i(t)$ $(i=1,\dots,n)$ — измеримые относительно меры Лебега на $[t_0,\infty)$ функции, изменяющиеся почти всюду на $[t_0,\infty)$ в известных ограниченных пределах. Задача состоит в синтезе управления $u=u(y,t)$, при котором нулевое решение системы уравнений, описывающей получаемую замкнутую систему, асимптотически устойчиво в целом.

Сформулированная задача синтеза управления u по y без измерения производных регулируемой величины $x_1=y$ (т. е. без измерения $x_{i+1}=x_1^{(i)}$, $i=1,\dots,n-1$) актуальна для теории и практики управления [1—3]. В случае, когда параметры системы известны, задача решается введением динамических подсистем, оценивающих вектор состояния [1]. В случае неизвестных параметров системы задача сложна. В этом случае известные по литературе способы ее решения либо применимы при изменении параметров системы в любых ограниченных пределах и при любой ограниченной скорости их изменения, но связаны с трудоемкими вычислениями векторных функций Ляпунова [2], либо применимы в рамках адаптивного подхода при малой скорости изменения параметров системы [3].

Для решения задачи предлагается синтезировать управление u по следующему алгоритму:

$$u=u(y,t)=-ky+l\zeta_1(t)=-kx_1+l\zeta_1 \tag{1.2}$$

$$\zeta_i^{\bullet}=\zeta_{i+1}-q_{n-i}x_1 \quad (i=1,\dots,n-2), \qquad \zeta_{n-2}^{\bullet}=-\sum_{i=1}^{n-1} p_i\zeta_i-q_1x_1 \tag{1.3}$$

где k, l, p_i и q_i $(i=1,\dots,n-1)$ — параметры алгоритма, постоянные числа, подлежащие выбору. Уравнения (1.1)—(1.3) описывают замкнутую систему S.

При синтезе управления часто вводятся динамические подсистемы различных видов и на основе различных подходов [1—11]. Подсистема вида (1.3) и уравнение (1.2) введены на основе следующего предлагаемого преобразования координат. Предлагается от координат $(x_1,\dots,x_n,\zeta_1,\dots,\zeta_{n-1})$ перейти к новым координатам $(x_1,\dots,x_n,x_{n+1},\dots,x_{2n-1})$ согласно соотношениям $x_{n+j}=x_{n+1}^{(j-1)}$, $j=1,\dots,n-1$, где $x_{n+1}=-kx_1+l\zeta_1$. В силу уравнений (1.1), (1.3) будем иметь

$$x_{n+j}=(-kx_1+l\zeta_1)^{(j-1)}=-kx_j-l\sum_{i=1}^{j-1}q_{n-j+i}x_i+l\zeta_j$$

Откуда находим

$$l\zeta_j=x_{n+j}+kx_j+l\sum_{i=1}^{j-1}q_{n-j+i}x_i \qquad (i=1,\dots,n-1) \tag{1.4}$$

$$\dot{x}_{2n-1}=-l\sum_{i=1}^{n-1}q_ix_i-kx_n-\sum_{j=1}^{n-1}p_jl\zeta_j \tag{1.5}$$

Выражения для $l\zeta_j$ из (1.4) подставим в правую часть уравнения (1.5). Получим, что замкнутая система S в новых координатах описывается системой уравнений

$$\dot{x}_i=x_{i+1} \qquad (i=1,\dots,n-1), \qquad \dot{x}_n=-\sum_{i=1}^{n}a_i(t)x_i+x_{n+1}$$

$$\dot{x}_i=x_{i+1} \qquad (i=n+1,\dots,2n-2), \qquad \dot{x}_{2n-1}=-\sum_{i=1}^{2n-1}\alpha_i^0x_i \tag{1.6}$$

$$\alpha_i^0=lq_i+kp_i+l\sum_{j=i+1}^{n-1}p_jq_{n-j+i}, \qquad \alpha_{n+i}^0=p_i \qquad (i=1,\dots,n-1), \qquad \alpha_n^0=k$$

Нетрудно видеть, что выбором параметров алгоритма (1.2), (1.3) значения α_i^0 $(i=1,\dots,2n-1)$ могут быть сделаны любыми наперед заданными. Именно с целью обеспечения такой возможности и построен алгоритм вида (1.2), (1.3). Очевидно, что для заданных α_i^0 $(i=1,\dots,2n-1)$ могут быть определены параметры алгоритма (1.2), (1.3). Покажем теперь, как следует распорядиться выбором значений α_i^0 $(i=1,\dots,2n-1)$. Зададим числа $\delta_i=\mathrm{const}>0$ $(i=1,\dots,n)$, $\delta_0=0$. Введем обозначения:

$$\|\mathbf{v}\|=\sum_{i=1}^{r}|v_i|, \qquad \mathbf{v}=(v_1,\dots,v_r)^T\in R^r, \qquad \mathbf{x}=(x_1,\dots,x_{2n-1})^T$$

$$\mathbf{x}^i=(x_1,\dots,x_{2n-i})^T \qquad (i=1,\dots,n+1)$$

$$\alpha_i^j=\alpha_i^{j-1}/\alpha_{2n-j}^{j-1} \qquad (i=1,\dots,2n-j;\ j=1,\dots,n)$$

$$s_0=0, \qquad s_j=\sum_{i=1}^{2n-j}\alpha_i^jx_i \qquad (j=1,\dots,n)$$

Отметим, что

$$\alpha_{2n-j}^j=1, \qquad s_j=x_{2n-j}+\sum_{i=1}^{2n-j-1}\alpha_i^jx_i=x_{2n-j}+\alpha_{2n-j-1}^js_{j+1} \qquad (j=1,\dots,n-1)$$

В силу введенных обозначений и в силу уравнений (1.6) имеют место следующие соотношения:

$$\dot{x}_{2n-i}=-\overset{i-1}{\alpha}_{2n-i}s_i+s_{i-1} \qquad (i=1,\dots,n-1) \tag{1.7}$$

$$\dot{x}_n=-\sum_{j=1}^{n} a_j(t)x_j-\overset{n-1}{\alpha_n}s_n+s_{n-1} \tag{1.8}$$

$$\dot{x}_{n-1}=-\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j^n x_j+s_n \tag{1.9}$$

Далее будут рассматриваться следующие три системы уравнений:

$$\dot{x}_j=x_{j+1} \quad (j=1,\dots,n-1), \qquad \dot{x}_n=-\sum_{j=1}^{n}a_j(t)x_j+x_{n+1}$$
$$\dot{x}_j=x_{j+1} \quad (i=n+1,\dots,2n-i-1)$$
$$\dot{x}_{2n-i}=-\overset{i-1}{\alpha}_{2n-i}s_i+\psi_{i-1}(t,\mathbf{x}^i) \qquad (1\leqslant i\leqslant n-1) \tag{1.10}$$

$$\dot{x}_j=x_{j+1} \quad (j=1,\dots,n-1), \qquad \dot{x}_n=-\sum_{j=1}^{n}a_j(t)x_j-\overset{n-1}{\alpha_n}s_n+\psi_{n-1}(t,\mathbf{x}^n) \tag{1.11}$$

$$\dot{x}_j=x_{j+1} \quad (j=1,\dots,n-2), \quad \dot{x}_{n-1}=-\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j^n x_j+\psi_n(t,\mathbf{x}^{n+1}) \tag{1.12}$$

где $\psi_0\equiv0$, $\psi_i(t,\mathbf{x}^{i+1})$ $(i=1,\dots,n)$ — некоторая непрерывная функция, такая, что $|\psi_i(t,\mathbf{x}^{i+1})|\leqslant\delta_i\|\mathbf{x}^{i+1}\|$, $\forall(t,\mathbf{x}^{i+1})\in[t_0,\infty)\times R^{2n-i-1}$. Сформулируем условие Y: для данных чисел α_j^n $(j=1,\dots,n-1)$, δ_n существуют положительные числа γ, γ_0, такие, что для любого решения $\mathbf{x}^{n+1}(t)$ всякой системы вида (1.12) выполняется неравенство $\|\mathbf{x}^{n+1}(t)\|\leqslant$ $\leqslant\gamma\|\mathbf{x}^{n+1}(t')\|\exp(-\gamma_0(t-t'))$, $\forall t\geqslant t'\geqslant t_0$. Выбор значений α_i^0 $(i=1,\dots$ $\dots,2n-1)$ для решения задачи стабилизации системы (1.1) может быть осуществлен на основе следующего утверждения.

Теорема. Пусть выполняются условие Y и соотношения: для $j=1,\dots,n$:

$$\overset{j-1}{\alpha}_{2n-j}>\operatorname{vrai\,max}_{t\geqslant t_0}(-a_{2n-j}(t)+\overset{j}{\alpha}_{2n-j-1}+\delta_j+\delta_{j-1}+$$
$$+(\delta_j)^{-1}\max_{1\leqslant i\leqslant 2n-j-1}\{|\overset{j}{\alpha}_{i-1}-\overset{j}{\alpha}_{2n-j-1}\alpha_i^j-\alpha_n^j a_i(t)+\alpha_i^j a_{2n-j}(t)|+$$
$$+\delta_{j-1}(1+|\alpha_i^j|)+\delta_j(1+\xi_j|a_i(t)|+|\alpha_i^j|)\}) \tag{1.13}$$

где $\xi_j=1$ при $j\neq n$, $\xi_n=0$, $a_i(t)\equiv0$ на $[t_0,\infty)$ для $i=n+1,\dots,2n-1$. Тогда нулевое решение системы (1.6) асимптотически устойчиво в целом.

Доказательство. Для решения $\mathbf{x}(t)$ системы (1.6) сформулируем свойство C_j $(j=1,\dots,n+1)$: существует множество моментов $\{t_i\}_{i=0}^{j-1}$ (здесь t_0 то же, что и в (1.1)), такое, что $t_0\leqslant t_1\leqslant\dots\leqslant t_{j-1}$, для $i=1,\dots,j$:

$$|s_{i-1}(t)|\leqslant\delta_{i-1}\|\mathbf{x}^i(t)\|, \quad \forall t\geqslant t_{i-1} \tag{1.14}$$

и $\mathbf{x}^i(t)$ при $t\geqslant t_{i-1}$ — решение системы вида (1.10), если $i<n-1$, вида (1.11), если $i=n-1$, и вида (1.12), если $i=n$. Имеет место

Лемма 1. Пусть выполняются соотношения (1.13). Тогда для всякого решения $\mathbf{x}(t)$ системы (1.6) либо $\|\mathbf{x}(t)\|\to0$ при $t\to\infty$, либо выполняется свойство C_{n+1}.

Доказательство. Пусть $1\leqslant j\leqslant n$ и для решения $x(t)$ системы (1.6) выполняется свойство C_j (при $j=1$ это условие очевидно выполняется, так как $s_0\equiv0$ и $x(t)$ при $t\geqslant t_0$ — решение системы (1.10) с $i=1$ при $\psi_0\equiv0$).

Докажем, что тогда для решения $x(t)$ либо $\|\mathbf{x}(t)\|\to 0$ при $t\to\infty$, либо выполняется свойство C_{j+1}. Действительно, для решения $\mathbf{x}(t)$ либо

$$|s_j(t)|>\delta_j\|\mathbf{x}^{j+1}(t)\|,\quad \forall t\geqslant t_{j-1} \tag{1.15}$$

(здесь t_{j-1} — момент из свойства C_j), либо

$$\exists t_j:\ t_j\geqslant t_{j-1},\ |s_j(t_j)|\leqslant\delta_j\|\mathbf{x}^{j+1}(t_j)\| \tag{1.16}$$

Предположим, что имеет место (1.15). Пусть $s_j(t)>0$, $\forall t\geqslant t_{j-1}$ (случай $s_j(t)<0$, $\forall t\geqslant t_{j-1}$ рассматривается аналогично). Вычислим $s_j^{\bullet}(t)$ вдоль $\mathbf{x}^j(t)$ как решения при $t\geqslant t_{j-1}$ системы вида (1.10) с $i=j$, если $j<n$, или системы вида (1.11), если $j=n$. Выразим при этом в $s_j^{\bullet}(t)$ $x_{2n-j}(t)$ через $s_j(t)$ и компоненты вектор-функции $\mathbf{x}^{j+1}(t)$. Затем, учитывая, что в силу (1.15) $\|\mathbf{x}^{j+1}(t)\|<|s_j(t)|/\delta_j$, $\forall t\geqslant t_{j-1}$, получим в силу (1.13), что $s_j^{\bullet}(t)\leqslant\leqslant-\Delta_j s_j(t)$ при почти всех $t\geqslant t_{j-1}$, где $\Delta_j=\mathrm{const}>0$. (Отметим, что приведенные рассуждения показывают, что $|s_j(t)|\leqslant|s_j(t_{j-1})|$, $\forall t\in[t_{j-1}, t')$, если $|s_j(t)|>\delta_j\|\mathbf{x}^{j+1}(t)\|$, $\forall t\in[t_{j-1}, t')$ и для $x(t)$ имеет место свойство C_j с $(j-1)$-ым моментом t_{j-1}; этот факт будет использован при доказательстве следствия 2.) Поэтому $s_j(t)\to 0$ при $t\to\infty$ и, следовательно, в силу (1.15) $\|\mathbf{x}^{j+1}(t)\|\to 0$ при $t\to\infty$. Тогда $|x_{2n-j}(t)|\to 0$ при $t\to\infty$, поскольку $|x_{2n-j}(t)|\leqslant\leqslant\mathrm{const}\cdot(|s_j(t)|+\|\mathbf{x}^{j+1}(t)\|)$, так как $x_{2n-j}=s_j-\Sigma\alpha_i^j x_i$ (суммирование по i от 1 до $2n-j-1$). Следовательно, $\|\mathbf{x}^j(t)\|\to 0$ при $t\to\infty$. В таком случае из выполнимости неравенств (1.14) для $i=1,\ldots,j$ и определений s_{i-1} легко получаем, что $\|\mathbf{x}(t)\|\to 0$ при $t\to\infty$. Предположим теперь, что имеет место (1.16). Докажем, что тогда имеет место (1.14) при $i=j+1$. Предположим противное. Тогда $\exists(t', t'')$: $t''>t'\geqslant t_{j-1}$, $|s_j(t')|\leqslant\delta_j\|\mathbf{x}^{j+1}(t)\|$ и $|s_j(t)|>>\delta_j\|\mathbf{x}^{j+1}(t)\|$, $\forall t\in(t', t'')$. Очевидно, что $|s_j(t)|>0$, $\forall t\in(t, t'')$, Пусть $s_j(t)>0$, $\forall t\in(t', t'')$ (случай $s_j(t)<0$, $\forall t\in(t, t'')$ рассматривается аналогично). Рассмотрим абсолютно непрерывную на $[t_0, \infty)$ функцию $s_{j\delta}(t)==s_j(t)-\delta_j\|\mathbf{x}^{j+1}(t)\|$. В имеющейся ситуации будет $s_{j\delta}(t')\leqslant 0$ и $s_{j\delta}(t)>0$, $\forall t\in(t', t'')$. Вычислим $s_{j\delta}^{\bullet}(t)$ вдоль $\mathbf{x}^j(t)$ как решения при $t\geqslant t_{j-1}$ системы (1.10) с $i=j$ (при $j<n-1$) или системы (1.11) (при $j=n-1$). Выразим в $s_{j\delta}^{\bullet}(t)$ $x_{2n-j}(t)$ через $s_j(t)$ и компоненты вектор-функции $\mathbf{x}^{j+1}(t)$. Затем с учетом того, что $\|\mathbf{x}^{j+1}(t)\|\leqslant|s_j(t)|\delta_j$, $\forall t\in(t', t'')$, легко получаем, что в силу (1.13) $s_{j\delta}^{\bullet}(t)\leqslant-\Delta_j' s_j(t)$ при почти всех $t\in(t', t'')$, где $\Delta_j'=\mathrm{const}>0$. А отсюда с учетом того, что $s_{j\delta}(t')\leqslant 0$, следует, что $s_{j\delta}(t)\leqslant 0$, $\forall t\in(t', t'')$ — противоречие с тем, что $s_{j\delta}(t)>0$, $\forall t\in(t', t'')$. Значит, имеет место (1.14) при $i=j+1$. Тогда в силу одного из соотношений: (1.7) с $i=j+1$ (при $j<<n-1$), (1.8) (при $j=n-1$), (1.9) (при $j=n$), — очевидно, что $\mathbf{x}^{j+1}(t)$ при $t\geqslant t_j$ — решение одной из систем вида: (1.10) с $i=j+1$ (при $j<n-1$), (1.11) (при $j=n-1$), (1.12) (при $j=n$). Таким образом, для $\mathbf{x}(t)$ имеет место свойство C_{j+1}. Проведенные рассуждения доказывают лемму 1. Заметим, что при доказательстве леммы 1 системы (1.10) и (1.11) рассматривались как системы с большим коэффициентом усиления α_{2n-i}^{i-1} $(i=1,\ldots,n)$.

Следствие 1. В условиях теоремы для всякого решения $\mathbf{x}(t)$ системы (1.6) будет $\|x(t)\|\to 0$ при $t\to\infty$.

Доказательство. Если свойство C_{n+1} для $\mathbf{x}(t)$ не выполняется, то тогда согласно лемме 1 $\|\mathbf{x}(t)\|\to 0$ при $t\to\infty$. Пусть для $\mathbf{x}(t)$ выполняется свойство C_{n+1}. Тогда $\mathbf{x}^{n+1}(t)$ при $t\geqslant t_n$ — решение системы вида (1.12). Поэтому в силу условия Y $\|\mathbf{x}^{n+1}(t)\|\to 0$ при $t\to\infty$. А тогда в силу выполнимости неравенств (1.14) $(i=1,\ldots, n+1)$ и определений s_{i-1} легко получаем, что $\|\mathbf{x}(t)\|\to 0$ при $t\to\infty$.

Для решения $\mathbf{x}(t)$ сформулируем свойство $C_{j\delta}$ $(j=1,\ldots,n+1)$: для $\mathbf{x}(t)$ имеет место свойство C_j с множеством моментов $\{t_i\}_{i=0}^{j-1}$, фигурирующим в определении свойства C_j, таким, что $|s_i(t)|>\delta_i\|\mathbf{x}^{i+1}(t)\|$, $\forall t\in\in[t_{i-1}, t_i)$, $i=1,\ldots,j-1$ (при $j=1$ это условие отсутствует): кроме того, существует такой момент t_j, что $t_{j-1}\leqslant t_j\leqslant\infty$ и $|s_j(t)|>\delta_j\|\mathbf{x}^{j+1}(t)\|$, $\forall t\in[t_{j-1}, t_j)$ (при $j=n+1$ последнее неравенство опускается и считается, что $t_{n+1}=\infty$). Из рассуждений, проведенных при доказательстве леммы 1, вытекает следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть выполняются соотношения (1.13). Тогда для всякого решения $\mathbf{x}(t)$ системы (1.6) при некотором j, $1\leqslant j\leqslant n+1$, выполняется свойство $C_{j\delta}$ с фигурирующим в его определении моментом $t_j=\infty$.

Следствие 2. В условиях теоремы $\exists H=\mathrm{const}>0$: для всякого решения $\mathbf{x}(t)$ системы (1.6) будет $\|\mathbf{x}(t)\|\leqslant H\|\mathbf{x}(t_0)\|$, $\forall t\geqslant t_0$.

Доказательство. Докажем, что существуют числа $\{h_i\}_{i=0}^{n}$, такие, что если для какого-либо решения $\mathbf{x}(t)$ системы (1.6) имеет место свойство $C_{j\delta}$ $(j=1,\ldots,n+1)$, то $\|\mathbf{x}(t)\|\leqslant h_{j-1}\|\mathbf{x}(t_{j-1})\|$, $\forall t\in[t_{j-1},t_j)$ (здесь t_{j-1} и t_j из определения свойства $C_{j\delta}$). Пусть $j:1\leqslant j\leqslant n+1$ и пусть для решения $\mathbf{x}(t)$ имеет место свойство $C_{j\delta}$. Далее $\{\beta_i\}$ — числа, не зависящие от решения. Если $j\leqslant n$, то для $\mathbf{x}(t)$, удовлетворяющего свойству $C_{j\delta}$, имеет место неравенство

$$|s_j(t)|>\delta_j\|\mathbf{x}^{j+1}(t)\|,\quad \forall t\in[t_{j-1},t_j) \tag{1.17}$$

Тогда, как отмечено при доказательстве леммы 1, $|s_j(t)|\leqslant|s_j(t_{j-1})|$, $\forall t\in[t_{j-1},t_j)$. С учетом этого в силу (1.17) получим $\|x^{j+1}(t)\|\leqslant|s_j(t)|/\delta_j\leqslant|s_j(t_{j-1})|/\delta_j\leqslant\leqslant\beta_1|\mathbf{x}^j(t_{j-1})\|$, $\forall t\in[t_{j-1},t_j)$. Но тогда будет $|x_{2n-j}(t)|\leqslant\beta_2(|s_j(t)|+\|\mathbf{x}^{j+1}(t)\|)\leqslant\leqslant\beta_3\|\mathbf{x}^j(t_{j-1})\|$, $\forall t\in[t_{j-1},t_j)$. Значит, $\|\mathbf{x}^j(t)\|\leqslant\beta_4\|\mathbf{x}^j(t_{j-1})\|$, $\forall t\in[t_{j-1},t_j)$. Далее с учетом выполнимости неравенств (1.14) $(i=1,\ldots,j)$ и определений s_{i-1} получаем, что $\|\mathbf{x}(t)\|\leqslant\beta_5\|\mathbf{x}^j(t_{j-1})\|\leqslant\beta_5\|\mathbf{x}(t_{j-1})\|$, $\forall t\in[t_{j-1},t_j)$ и в этом случае следует положить $h_{j-1}=\beta_5$. Если же $j=n+1$, то $t_{n+1}=\infty$ и $\mathbf{x}^{n+1}(t)$ при $t\geqslant t_n$ – решение системы (1.12), и тогда в силу условия Y $\|\mathbf{x}^{n+1}(t)\|\leqslant\gamma\|\mathbf{x}^{n+1}(t_n)\|$, $\forall t\geqslant t_n$. Затем с учетом выполнимости (1.14) $(i=1,\ldots,n+1)$ и определений s_{i-1} находим, что в случае $j=n+1$ будет $\|\mathbf{x}(t)\|\leqslant\beta_6\|\mathbf{x}^{n+1}(t_n)\|\leqslant\beta_6\|\mathbf{x}(t_n)\|$, $\forall t\in[t_n,t_{n+1})$ и в этом случае следует положить $h_n=\beta_6$. Проведенные рассуждения доказывают существование чисел $\{h_i\}_{i=0}^{n}$, о которых сказано выше. Можно считать, что $h_i\geqslant1$, $i=0,1,\ldots,n$. Отметим, что если для $\mathbf{x}(t)$ имеет место свойство $C_{j\delta}$ $(j=2,\ldots,n+1)$ с множеством моментов $\{t_i\}_{i=0}^{j-1}$, то для $\mathbf{x}(t)$ имеет место свойство $C_{j-1\delta}$ с множеством моментов $\{t_i\}_{i=0}^{j-1}$. Поэтому очевидно, что если для $\mathbf{x}(t)$ выполняется свойство $C_{j\delta}$ $(j=1,\ldots,n+1)$ с фигурирующим в нем моментом $t_j=\infty$, то $\|\mathbf{x}(t)\|\leqslant(\Pi_{i=0}^{j-1}h_i)\|\mathbf{x}(t_0)\|$, $\forall t\geqslant t_0$. Положим $H=\Pi_{i=0}^{n}h_i$.

С учетом леммы 2 для такого H утверждение следствия 2 справедливо.

Из следствий 1 и 2, очевидно, вытекает утверждение теоремы.

Отметим, что условия теоремы всегда могут быть выполнены выбором параметров алгоритма (1.2), (1.3) в такой последовательности: выбираем α_i^n $(i=1,\ldots,n-1)$ и δ_n так, чтобы выполнялось условие Y; задаем $\delta_j>0$ $(i=1,\ldots,n-1)$; вначале для $j=1$, затем для $j=2$ и т. д. вплоть до $j=n$ с помощью (1.13) выбираем α_{n-1+j}^{n-j} и определяем $\alpha_i^{n-j}=\alpha_i^{n-j+1}\cdot\alpha_{n-1+j}^{n-j}$ $(i=1,\ldots,n+j-2)$; по α_i^0 $(i=1,\ldots,2n-1)$ определяем параметры алгоритма.

2. Стабилизация динамических систем со стационарными параметрами. Особо выделим случай, когда параметры системы (1.1) стационарны: $a_i=\mathrm{const}$, $i=1,\ldots,n$. В этом случае наряду с изложенным выше результатом для исследования алгоритма (1.2), (1.3) можно предложить совершить переход от координат $(x_1,\ldots,x_n,\zeta_1,\ldots,\zeta_{n-1})$ к новым координатам $(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1},\ldots,x_{2n-1})$ согласно соотношениям $x_{n+1}=\dot{x}_n$, $x_{n+j}=x_{n+1}^{(j-1)}$, $j=2,\ldots,n-1$. В новых координатах система S будет описываться системой уравнений

$$\dot{x}_j=x_{j+1}\quad(j=1,\ldots,2n-2),\qquad \dot{x}_{2n-1}=-\sum_{i=1}^{2n-1}\nu_ix_i \tag{2.1}$$

$$\nu_i=lq_i+kp_i+l\sum_{j=i+1}^{n-1}p_jq_{n-j+i}+\sum_{j=1}^{i}p_ja_{i+1-j}$$

$$\nu_{n+i}=p_i+a_{i+1}+\sum_{j=i+1}^{n-1}p_ja_{n+i-j+1}\qquad(i=1,\ldots,n-1)$$

$$\nu_n=k+a_1+\sum_{j=1}^{n-1}p_ja_{n-j+1}$$

Очевидно, что если параметры a_i $(i=1,\ldots,n)$ известны, то выбором параметров в (1.2), (1.3) значения ν_i $(i=1,\ldots,2n-1)$ могут быть сделаны наперед заданными и тем самым может быть обеспечена устойчивость нулевого решения системы (2.1). При неизвестных параметрах a_i можно рекомендовать выбором параметров в (1.2), (1.3) удовлетворить условия критерия Рауса — Гурвица (для всех значений $a_i (i=1, \ldots, n)$ из заданных пределов), обеспечивающие асимптотическую устойчивость в целом нулевого решения дифференциального уравнения $(2n-1)$-го порядка, которому эквивалентна система уравнений (2.1).

3. Пример. Рассмотрим задачу стабилизации положения равновесия механической системы второго порядка, описываемой уравнениями $\dot{x}_1=x_2$, $\dot{x}_2=-a_1(t)x_1-a_2(t)x_2+u$, $y=x_1$, $t\geqslant t_0$, где $a_i(t)$, $i=1, 2,$ — непрерывные на $[t_0, \infty)$ функции и $|a_i(t)|\leqslant 1$, $\forall t\geqslant t_0$, $i=1, 2$, дополнительной силой u. В данном случае алгоритм (1.2), (1.3) имеет вид: $u=-kx_1+l\zeta_1$, $\dot{\zeta}_1=-p_1\zeta_1-q_1x_1$, а система (1.12) — вид: $\dot{x}_1=-\alpha_1^2x_1+\psi_2(t, x_1)$, где $|\psi_2(t, x_1)|\leqslant\delta_2|x_1|$, $\forall(t, x_1)\in[t_0, \infty)\times R$. При $\alpha_1^2>\delta_2$ условие Y выполняется. Пусть $\delta_1=\delta_2=1$, $\alpha_1^2=1,1$. Соотношение (1.13) для $j=2$ выполняется при $\alpha_2^1=11,7$; находим $\alpha_1^1=\alpha_1^2\alpha_2^1=12,87$. Для $j=1$ (1.13) выполняется при $\alpha_3^0=190$; находим: $\alpha_1^0=\alpha_1^1\alpha_3^0=2445,3$; $\alpha_2^0=\alpha_2^1\alpha_3^0=2223$. Так как в данном случае $\alpha_3^0=p_1$, $\alpha_2^0=k$, $\alpha_1^0=lq_1+kp_1$, то можно положить $p_1=190$, $k=2223$, $q_1=1000$, $l=-419,9247$. Все параметры алгоритма, при которых рассматриваемая задача согласно теореме решена, определены. Обратим внимание на то, что расчет параметров алгоритма, основанный на использовании соотношений (1.13), хотя и выполним при любом порядке и при нестационарных параметрах системы, приводит к большим значениям параметров алгоритма. Поэтому применение такого способа расчета на практике может быть ограниченным (при существовании ограничений на величину u). Если для данной механической системы $a_i(t)\equiv a_i=\text{const}$, $i=1, 2$ (при $a_1(t)\equiv\text{const}$ и $a_2(t)\equiv 0$ имеем известную задачу стабилизации неустойчивого верхнего положения равновесия маятника [2]), то в этом случае при малом порядке системы для расчета параметров алгоритма целесообразнее использование условия Гурвица для определения асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения $\dddot{x}+(p_1+a_2)\ddot{x}+(k+p_1a_2+a_1)\dot{x}+(lq_1+kp_1+p_1a_1)x=0$ $(x\in R)$, которому эквивалентна система уравнений, описывающая замкнутую систему. Условие Гурвица [12] в этом случае выполняется при всех a_i, таких, что $|a_i|\leqslant 1$ $(i=1, 2)$, если $k=7$, $l=-2,9$; $p_1=2,5$; $q_1=5$. Таким образом, в случае системы со стационарными параметрами значения параметров алгоритма получены меньшими, чем в рассмотренном выше случае системы с нестацинарными параметрами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. М.: Мир. 1971. 400 с.
2. *Фурасов В. Д.* Устойчивость движения, оценки и стабилизация. М.: Наука. 1977. 245 с.
3. *Фомин В. Н., Фрадков А. Л., Якубович В. А.* Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука. 1981. 447 с.
4. *Kalman R. E.* A new approach to linear filtering and prediction problems // Trans. ASME. Ser. D. J. Basic Eng. 1960. V. 82. No. 1. P. 35—45.
5. *Kalman R. E., Bucy R. S.* New results in linear filtering and prediction theory // Trans. ASME. Ser. D. J. Basic Eng. 1961. V. 83. No. 1. P. 95—108.
6. *Красовский Н. Н.* О стабилизации неустойчивых движений дополнительными силами при неполной обратной связи // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 4. С. 641—663.
7. *Luenberger D. G.* Observing the state of a linear system // IEEE Trans. Military Electronics. 1964. V. MIL—8. No. 2. P. 74—80.
8. *Luenberger D. G.* An introduction to observes // IEEE Trans. on Automatic Control. 1971. V. AC—16. No. 6. P. 596—602.
9. *Brash F. M., Pearson J. B.* Pole placement using dynamic compensators // IEEE Trans. on Automatic Control. 1970. V. AC—15. No. 1. P. 34—43.
10. *Брайсон А., Хо Ю-ши.* Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир. 1972. 544 с.
11. *Уонэм М.* Линейные многомерные системы управления. М.: Наука. 1980. 375 с.
12. *Меркин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука. 1971. 312 с.

Уральск

Поступила в редакцию
8.IV.1988