

УДК 531.383:539.3

Ю. Г. МАРТЫНЕНКО, А. Ж. ОМАРОВ, В. В. ПОДАЛЖОВ

## ДВИЖЕНИЕ УПРУГОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В НЕКОНТАКТНОМ ПОДВЕСЕ

При несовпадении центра масс сферического ротора неконтактного гироскопа с его геометрическим центром влияние моментов силы тяжести можно уменьшить выбором угла нутации близкого к  $\varphi = \pi/2$  [1]. При этом ротор будет совершать движение близкое к регулярной прецессии Эйлера — Пуансо. Однако центробежные силы, возникающие при движении ротора, вызовут деформацию его поверхности, что приведет к появлению дополнительного возмущающего момента. В статье определяются деформации упругого ротора гироскопа, движение которого близко к регулярной прецессии Эйлера — Пуансо и оцениваются величины возмущающих моментов.

**1. Деформации ротора при его «двойном вращении».** Рассмотрим ротор неконтактного гироскопа, представляющий собой тонкую сферическую оболочку радиуса  $R$  и толщины  $h$ . В полюсах оболочки имеются отверстия радиуса  $r_1 = R \cos \alpha_0$  (фиг. 1).

Введем правый ортогональный трехгранник  $x_1x_2x_3$ , имеющий начало в центре масс недеформированного ротора — точке  $O$  и ось  $Ox_3$ , направленную по оси симметрии ротора. Обозначим через  $I_i$  моменты инерции недеформированного ротора относительно осей  $Ox_i$  ( $i=1, 2, 3$ ).

Если считать ротор абсолютно твердым, то при отсутствии внешних сил он будет совершать регулярную прецессию Эйлера — Пуансо, при которой проекции вектора мгновенной угловой скорости  $\omega$  на оси трехгранника  $x_1x_2x_3$  имеют вид [2]:

$$\omega_1 = a \cos vt, \quad \omega_2 = a \sin vt, \quad \omega_3 = b \quad (1.1)$$

Здесь  $a$  и  $b$  — проекции вектора  $\omega$  на оси  $Ox_1$  и  $Ox_3$  в начальный момент времени,  $v = (I_3 - I_1)b/I_1$ . При этом угол  $\varphi$  между вектором кинетического момента ротора  $L$  и его осью симметрии определяется уравнением  $\cos \varphi = I_3 b [(I_1 a)^2 + (I_3 b)^2]^{-1/2}$ .

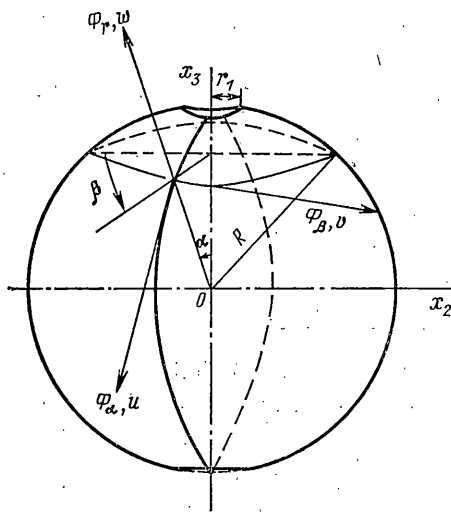
В трехграннике  $x_1x_2x_3$  введем сферическую систему координат  $\alpha, \beta$  с полярной осью  $Ox_3$ . Уравнение поверхности тела в сферических координатах определяется радиус-вектором  $r$  как функцией углов  $\alpha, \beta$ . При этом координаты точек поверхности ротора имеют вид  $x_1 = r(\alpha, \beta) \sin \alpha \cos \beta$ ,  $x_2 = r(\alpha, \beta) \sin \alpha \sin \beta$ ,  $x_3 = r(\alpha, \beta) \cos \alpha$  ( $\alpha_0 \leq \alpha \leq \pi - \alpha_0$ ,  $0 \leq \beta \leq 2\pi$ ). Плотность сил инерции, приложенных к этим точкам, определяется формулой  $\Phi = -\rho h \{ [\dot{\omega}, r] + \omega(\omega, r) - \omega^2 r \}$ . Здесь точкой обозначено дифференцирование по времени  $t$ ,  $\rho$  — плотность материала ротора.

Принимая во внимание (1.1) и проектируя вектор  $\Phi$  на оси трехгранника  $x_1x_2x_3$ , получим

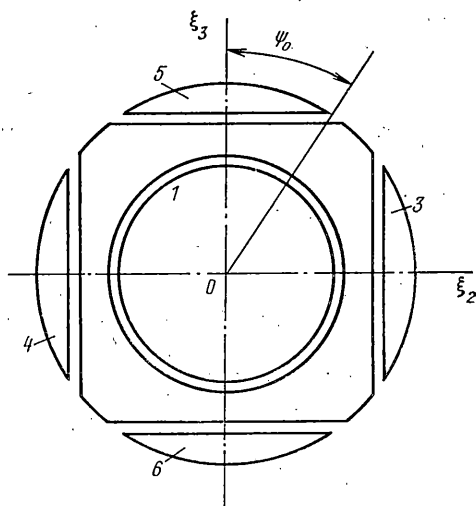
$$\begin{aligned} \Phi_1 &= -\rho h [-(a^2 \sin^2 vt + b^2)x_1 + a^2 (\cos vt \sin vt)x_2 + a(b+vt) (\cos vt)x_3] \\ \Phi_2 &= -\rho h [a^2 (\cos vt \sin vt)x_1 - (a^2 \cos^2 vt + b^2)x_2 + a(b+vt) (\sin vt)x_3] \\ \Phi_3 &= -\rho h [-a(v-b) (\cos vt)x_1 - a(v-b) (\sin vt)x_2 - a^2 x_3] \end{aligned} \quad (1.2)$$

Матрица направляющих косинусов между осями трехгранника  $x$  и единичными векторами  $e_r, e_\alpha, e_\beta$  сферической системы координат имеет вид

$$\begin{vmatrix} \sin \alpha \cos \beta & \sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \\ \cos \alpha \cos \beta & \cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \end{vmatrix} \quad (1.3)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Учитывая (1.3), перепроектируем силы инерции (1.2) в сферическую систему координат.

$$\Phi_r = -\rho h R [-(b^2 + a^2/2) + (b^2 - a^2/2) \cos^2 \alpha + ab \sin 2\alpha \times \cos(vt - \beta) + 1/2 a^2 \sin^2 \alpha \cos(2vt - 2\beta)] \quad (1.4)$$

$$\Phi_\alpha = -\rho h R [-(b^2 - a^2/2) \sin \alpha \cos \alpha + a(v + b \cos 2\alpha) \times \cos(vt - \beta) + 1/2 a^2 \sin \alpha \cos \alpha \cos(2vt - 2\beta)]$$

$$\Phi_\beta = -\rho h R [a(b + v) \cos \alpha \sin(vt - \beta) + 1/2 a^2 \sin \alpha \sin(2vt - 2\beta)]$$

Как видно из (1.4), силы инерции, действующие на ротор, являются периодическими функциями времени, причем, имеются как слагаемые, изменяющиеся с частотой  $\nu$ , так и с частотой  $2\nu$ .

В основу расчета деформации ротора под действием сил (1.4) положим дифференциальные уравнения равновесия безмоментной теории сферических оболочек [3], которые после преобразований примут следующий вид

$$\frac{\partial N_1}{\partial \alpha} + 2N_1 \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial S}{\partial \beta} = R(\Phi_r \operatorname{ctg} \alpha - \Phi_\alpha) \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} + 2S \operatorname{ctg} \alpha - \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial N_1}{\partial \beta} = -R \left( \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial \Phi_r}{\partial \beta} + \Phi_\beta \right)$$

Между перемещениями  $u$ ,  $v$  и  $w$  точек срединной поверхности оболочки и силовыми факторами  $S$ ,  $N_1$  имеют место зависимости

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} - u \operatorname{ctg} \alpha - \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta} = \frac{R}{Eh} (1 + \mu) (2N_1 - R\Phi_r) \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha} - v \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial u}{\partial \beta} = \frac{2R}{Eh} (1 + \mu) S$$

$$w = Eh^{-1} R [(1 + \mu) N_1 - \mu R \Phi_r] - \partial u / \partial \alpha \quad (1.7)$$

В этих уравнениях  $E$  — модуль упругости,  $\mu$  — коэффициент Пуассона.

Принимая во внимание вид функций  $\Phi_r$ ,  $\Phi_\alpha$  и  $\Phi_\beta$ , решение системы уравнений (1.5) можно представить в форме

$$N_1 = \sum_{m=0}^2 N_{1m}(\alpha) \cos(mvt - m\beta), \quad S = \sum_{m=1}^2 S_m(\alpha) \sin(mvt - m\beta) \quad (1.8)$$

Подставляя (1.8) в (1.5) и разделяя переменные, получим уравнения для определения  $N_{1m}$ ,  $S_m$  ( $m=0, 1, 2$ ). Для решения уравнений используем

граничные условия, которые для рассматриваемого случая заключаются в равенстве нулю растягивающего усилия на границе отверстия [4]:

$$N_1=0 \quad (\alpha=\alpha_0, \alpha=\pi-\alpha_0) \quad (1.9)$$

После соответствующих вычислений найдем

$$\begin{aligned} N_{10} &= \frac{1}{2} \rho h R^2 a^2 (1 - \sin^2 \alpha_0 / \sin^2 \alpha) \\ N_{11} &= \frac{2}{3} \rho h R^2 a v \left( -\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \sin^2 \alpha_0 \frac{\cos \alpha}{\sin^3 \alpha} \right) \\ N_{12} &= -\frac{1}{2} \rho h R^2 a^2 \left( 1 - \frac{\sin^4 \alpha_0}{1 + \cos^2 \alpha_0} \frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin^4 \alpha} \right) \\ S_1 &= \rho h R^2 \left( ab \sin \alpha - \frac{av}{3} \frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} - \frac{2}{3} av \frac{\sin^2 \alpha_0}{\sin^3 \alpha_0} \right) \\ S_2 &= -\frac{1}{2} \rho h R^2 a^2 \left( \cos \alpha - \frac{\sin^4 \alpha_0}{1 + \cos^2 \alpha_0} \frac{\cos \alpha}{\sin^4 \alpha} \right) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Подставляя (1.10) в (1.8) и (1.6), получим дифференциальные уравнения для определения перемещений  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . Исключая из них тангенциальные перемещения  $u$ ,  $v$ , найдем функцию нормального прогиба

$$w = \sum_{m=0}^2 [w_m^*(\alpha) + w_m^{**}(\alpha)] \cos(mvt - m\beta) \quad (1.11)$$

$$w_0^* = \frac{\rho R^3}{E} \left[ \left( b^2 - \frac{a^2}{2} \mu \right) - (2 + \mu) \left( b^2 - \frac{a^2}{2} \right) \cos^2 \alpha \right] \quad (1.12)$$

$$w_1^* = -\frac{\rho R^3}{E} (2 + \mu) ab \sin 2\alpha, \quad w_2^* = -\frac{\rho R^3 a^2}{2E} (2 + \mu) \sin^2 \alpha$$

$$w_0^{**} = \frac{\rho R^3}{2E} a^2 (1 + \mu) \sin^2 \alpha_0 \left( 1 + \cos \alpha \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right| \right)$$

$$w_1^{**} = \frac{\rho R^3}{3E} av (1 + \mu) (2 + \sin^2 \alpha_0) \left( \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \sin \alpha \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right| \right) \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} w_2^{**} &= -\frac{\rho R^3}{2E} a^2 (1 + \mu) \frac{\sin^4 \alpha_0}{1 + \cos^2 \alpha_0} \left[ \frac{4 \cos \alpha}{\sin^3 \alpha} \left( \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \sin \alpha \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right| \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1 + \cos^2 \alpha)}{\sin^2 \alpha} \left( 1 + \cos \alpha \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right| \right) \right] \end{aligned}$$

В реальных конструкциях угол  $\alpha_0 \approx \pi/12$ . Анализ соотношений (1.12) и (1.13) при указанном значении  $\alpha_0$  показывает, что функции  $|w_0^{**}(\alpha)|$ ,  $|w_1^{**}(\alpha)|$  существенно (по крайней мере на два-три порядка) меньше функций  $|w_0^*(\alpha)|$ ,  $|w_1^*(\alpha)|$ , функция  $w_2^{**}(\alpha)$  имеет множитель  $\sin^4 \alpha_0 / \sin^4 \alpha$ , поэтому в малой окрестности границы функций  $|w_2^{**}(\alpha)|$  и  $|w_2^*(\alpha)|$  оказываются соизмеримы, а вне указанной окрестности  $|w_2^{**}(\alpha)|$  резко убывает и становится малым по сравнению с  $|w_2^*(\alpha)|$ .

Следовательно, основной вклад в искажение поверхности ротора вносит функция  $w^*$ . Поэтому, пренебрегая  $w^{**}$  в (1.11), будем считать, что деформированная поверхность ротора имеет вид

$$r^* = R + w^*(\alpha, \beta) \quad (1.14)$$

В случае, когда в (1.4)  $a=0$ , т. е. ротор совершает вращение вокруг оси симметрии, уравнение (1.14) совпадает с известной формулой для деформированной центробежными силами упругой сферической оболочки, совершающей вращение вокруг неподвижной оси [5].

**2. Построение силовой функции возмущающих моментов.** Перейдем к расчету момента, действующего на деформированный ротор (1.14) в неконтактном подвесе.

Для определенности рассмотрим электростатический подвес, в котором подвес обеспечивает три пары взаимно ортогональных электродов (фиг. 2).

Введем правый ортогональный трехгранник  $\xi_1 \xi_2 \xi_3$  с осями  $O\xi_i$ , направленными по осям симметрии электродов. Электроды пронумеруем таким образом, чтобы положительному направлению оси  $O\xi_i$  соответствовал  $(2i-1)$ -й электрод, а отрицательному  $(2i)$ -й электрод ( $i=1, 2, 3$ ). Введем в трехграннике  $\xi_1 \xi_2 \xi_3$  сферическую систему координат  $\vartheta_1, \varphi_1$  с полярной осью  $O\xi_3$ :  $\xi_1 = r \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1$ ,  $\xi_2 = r \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1$ ,  $\xi_3 = r \cos \vartheta_1$  и предположим, что электроды представляют собой сферические сегменты углового размера  $\psi_0$ . При этом уравнение поверхности, например, пятого электрода в сферических координатах будет иметь вид  $0 \leq \vartheta_1 \leq \psi_0$ ,  $0 \leq \varphi_1 \leq 2\pi$ .

Пусть геометрический центр ротора совпадает с началом трехгранника  $\xi_1 \xi_2 \xi_3$  и плотность поддерживающих сил под каждым электродом является постоянной. Тогда согласно [6], проекции возмущающего момента, действующего на ротор со стороны пятого электрода имеют вид:

$$M_1^{(5)} = f_5 R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\psi_0} \left( \frac{\partial r}{\partial \vartheta_1} \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1 + \frac{\partial r}{\partial \varphi_1} \cos \vartheta_1 \cos \varphi_1 \right) d\vartheta_1 d\varphi_1 \quad (2.1)$$

$$M_2^{(5)} = f_5 R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\psi_0} \left( -\frac{\partial r}{\partial \vartheta_1} \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1 + \frac{\partial r}{\partial \varphi_1} \cos \vartheta_1 \sin \varphi_1 \right) d\vartheta_1 d\varphi_1$$

$$M_3^{(5)} = f_5 R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\psi_0} \left( -\frac{\partial r}{\partial \vartheta_1} \sin \vartheta_1 \right) d\vartheta_1 d\varphi_1$$

Здесь  $f_5$  — плотность поддерживающих сил под пятым электродом.

Для того, чтобы воспользоваться формулами (2.1) необходимо перейти в уравнении (1.15) деформированного ротора от сферических координат  $\alpha, \beta$  к сферическим координатам  $\vartheta_1, \varphi_1$ . Сделаем упрощающее предположение о том, что вектор кинетического момента  $L$  лежит в плоскости  $\xi_1 \xi_2$  и образует угол  $\eta$  с осью  $O\xi_3$ . Определим положение трехгранника  $x_1 x_2 x_3$  относительно  $\xi_1 \xi_2 \xi_3$  следующей последовательностью поворотов

$$\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xrightarrow[\xi_2, \xi_2']{\eta} \xi_1' \xi_2' \xi_3' \xrightarrow[\xi_3', \xi_3'']{\psi} \xi_1'' \xi_2'' \xi_3'' \xrightarrow[\xi_1'', x_1']{\vartheta} x_1' x_2' x_3' \xrightarrow[x_3', x_3]{\varphi} x_1 x_2 x_3$$

Здесь  $\psi, \vartheta, \varphi$  — обычные углы Эйлера, задающие положение трехгранника  $x_1 x_2 x_3$  относительно трехгранника  $\xi_1' \xi_2' \xi_3'$ . Как известно, при регулярной прецессии Эйлера — Пуансо углы Эйлера изменяются согласно уравнениям

$$\cos \vartheta = I_3 b / L = \text{const}, \quad \dot{\varphi} = -vt + \varphi_0, \quad \dot{\psi} = (L/I_1)t \quad (2.2)$$

Сферические координаты  $\alpha, \beta$  связаны с координатами  $\vartheta_1, \varphi_1$  соотношениями

$$x = B\xi, \quad x_i = \sum_{j=1}^3 \beta_{ij} \xi_j \quad (i=1, 2, 3)$$

или

$$\begin{vmatrix} \sin \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha \sin \beta \\ \cos \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1 \\ \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1 \\ \cos \vartheta_1 \end{vmatrix} \quad (2.3)$$

Здесь  $\beta_{ij}$  — косинусы углов между осями  $\chi_i$  и  $\xi_j$ , которые следующим образом выражаются через углы Эйлера и угол  $\eta$ :

$$\begin{aligned}\beta_{11} &= \cos \eta \cos \psi \cos \varphi - \cos \eta \cos \vartheta \sin \psi \sin \varphi + \sin \eta \sin \vartheta \sin \varphi \\ \beta_{12} &= \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \cos \vartheta \sin \varphi \\ \beta_{13} &= -\sin \eta \cos \psi \cos \varphi + \sin \eta \cos \vartheta \sin \psi \sin \varphi + \cos \eta \sin \vartheta \sin \varphi \\ \beta_{21} &= -\cos \eta \cos \psi \sin \varphi - \cos \eta \cos \vartheta \sin \psi \cos \varphi + \sin \eta \sin \vartheta \cos \varphi \\ \beta_{22} &= -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \vartheta \cos \varphi \\ \beta_{23} &= +\sin \eta \cos \psi \sin \varphi + \sin \eta \cos \vartheta \sin \psi \cos \varphi + \cos \eta \sin \vartheta \cos \varphi \\ \beta_{31} &= \cos \eta \sin \vartheta \sin \psi + \sin \eta \cos \vartheta, \quad \beta_{32} = -\cos \psi \sin \vartheta \\ \beta_{33} &= -\sin \eta \sin \vartheta \sin \psi + \cos \eta \cos \vartheta\end{aligned}\quad (2.4)$$

Подставляя выражения для  $\sin \alpha \sin \beta$ ,  $\sin \alpha \cos \beta$ ,  $\cos \alpha$  из (2.3) в (1.15), получим уравнение деформированной поверхности ротора в трехграннике  $\xi_1 \xi_2 \xi_3$ :

$$\begin{aligned}r^*(t, \vartheta_1, \varphi_1) &= R + \rho R^3 E^{-1} \{ (b^2 - a^2 \mu / 2) - (2 + \mu) [ (b^2 - a^2 / 2) (\beta_{31} \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1 + \\ &+ \beta_{32} \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1 + \beta_{33} \cos \vartheta_1)^2 + 2ab \cos vt (\beta_{11} \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1 + \\ &+ \beta_{12} \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1 + \beta_{13} \cos \vartheta_1) (\beta_{31} \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1 + \beta_{32} \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1 + \\ &+ \beta_{33} \cos \vartheta_1) + 2ab \sin vt (\beta_{21} \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1 + \beta_{22} \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1 + \beta_{23} \cos \vartheta_1) \times \\ &\times (\beta_{31} \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1 + \beta_{32} \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1 + \beta_{33} \cos \vartheta_1) + 1/2 a^2 \cos 2vt (\beta_{11} \sin \vartheta_1 \times \\ &\times \cos \varphi_1 + \beta_{12} \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1 + \beta_{13} \cos \vartheta_1)^2 - 1/2 a^2 \cos 2vt (\beta_{21} \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1 + \\ &+ \beta_{22} \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1 + \beta_{23} \cos \vartheta_1)^2 + a^2 \sin 2vt (\beta_{11} \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1 + \beta_{12} \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1 + \\ &+ \beta_{13} \cos \vartheta_1) (\beta_{21} \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1 + \beta_{22} \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1 + \beta_{23} \cos \vartheta_1) \} \end{aligned}\quad (2.5)$$

Уравнение (2.5) подставим в (2.1). Принимая во внимание соотношения (2.2) и (2.4), выполним интегрирование и осредним полученные выражения по времени. После необходимых вычислений для момента поддерживающих сил, действующих на ротор, получим

$$M_1^{(5)} = 0, \quad M_1^{(5)} = f_5 M_0 \sin \eta \cos \eta, \quad M_3^{(5)} = 0 \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned}M_0 &= -\frac{\rho R^5}{E} (2 + \mu) \frac{L^2}{2} \left[ \frac{\sin^2 \vartheta}{I_1^2} (3 \sin^2 \vartheta - 1) + \frac{6}{I_1 I_3} \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta + \right. \\ &\left. + \frac{\cos^2 \vartheta}{I_3^2} (3 \cos^2 \vartheta - 1) \right] \cos \psi_0 \sin^2 \psi_0\end{aligned}$$

В общем случае, когда вектор кинетического момента ротора не лежит ни в одной координатной плоскости трехгранника  $\xi_1 \xi_2 \xi_3$ , имеем

$$M_1^{(5)} = -f_5 M_0 \gamma_2 \gamma_3, \quad M_2^{(5)} = f_5 M_0 \gamma_3 \gamma_1, \quad M_3^{(5)} = 0 \quad (2.7)$$

Здесь  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  — направляющие косинусы вектора кинетического момента. Аналогичные вычисления для момента сил, создаваемого шестым электродом, приведут к результату:

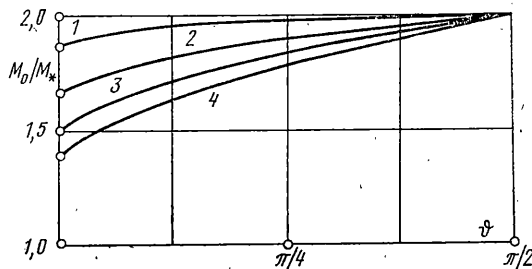
$$M_1^{(6)} = -f_6 M_0 \gamma_2 \gamma_3, \quad M_2^{(6)} = f_6 M_0 \gamma_3 \gamma_1,$$

$M_3^{(6)} = 0$ . Выражения для проекции момента, создаваемого остальными электродами, получаются из (2.7) соответствующей перестановкой индексов у  $\gamma_i$ .

Согласно [6] плотность поддерживающих сил в электростатическом подвесе определяется формулой

$$f_i = (u_i - u_b)^2 / (8\pi d^2 R^2), \quad d = (R_2 - R) / R \quad (i=1, \dots, 6) \quad (2.8)$$

Здесь  $u_i$  — потенциал  $i$ -го электрода,  $u_b$  — потенциал ротора,  $R_2$  — радиус сферы, на которой расположены электроды.



Фиг. 3

Учитывая выражения для плотности поддерживающих сил (2.8), запишем силовую функцию возмущающих моментов в следующем виде

$$W(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \frac{M_0}{16\pi d^2 R^2} \left\{ \sum_{i=1}^3 [u_{2i-1}^2 + u_{2i}^2 - 2u_0(u_{2i-1} + u_{2i})] \gamma_i^2 \right\}$$

На фиг. 3 приведена зависимость модуля возмущающего момента от угла  $\varphi$  определяющего размер конуса регулярной прецессии, при различных значениях моментов инерции ротора. На этой фигуре  $M_* = -\rho R^3 (2 + \mu) L^2 \cos \psi_0 \sin^2 \psi_0 / (2EI_1^2)$ , кривые 1-4 соответствуют при  $\alpha_0 = 15, 20, 25, 30^\circ$ . Возмущающий момент возрастает с ростом угла нутации, причем значение угла  $\varphi = \pi/2$  является наилучшим с точки зрения уходов гироскопа, вызванных упругими деформациями его ротора.

*Пример.* Рассмотрим электростатический гироскоп, у которого масса ротора  $m = 0,02$  кг, опорное напряжение, подаваемое на электроды, равняется 3 кв, угловой размер электрода  $\psi_0 = 33^\circ$ , радиус ротора  $R = 3 \cdot 10^{-2}$  м, толщина ротора  $h = 10^{-3}$  м, относительный зазор между ротором и электродами  $10^{-2}$ , угловая скорость  $\omega = 2513,3$  с $^{-1}$ , материал ротора - бериллий, имеющий следующие механические характеристики: плотность  $\rho = 1,85 \cdot 10^3$  кг/м $^3$ , модуль упругости  $E = 3 \cdot 10^5$  МПа, коэффициент Пуассона  $\mu = 0,3$ . Моменты инерции рассматриваемого ротора при  $\alpha_0 = 15^\circ$ :  $I_1 = 1,25 \cdot 10^{-5}$  кг·м $^2$ ,  $I_3 = 1,31 \cdot 10^{-5}$  кг·м $^2$ . Частоты при  $\alpha_0 = 15^\circ$ :  $\nu = 44$  Гц,  $L/I_1 = 333$  Гц. Пусть вектор кинетического момента лежит в плоскости  $\xi_1 \xi_3$  и образует с осью  $O\xi_3$  угол  $\eta = 70^\circ$ . Если кинетический момент ротора  $L = 0,0314$  кг·м $^2$ ·с $^{-1}$ , то  $M_{\max} = 4,1 \cdot 10^{-7}$  Нм. Это значение достигается, когда угол нутации  $\varphi = \pi/2$ . Тогда величина возможного ухода гироскопа, вызванного деформацией поверхности ротора, оказывается равной  $\omega_{yx} = 2$  град/ч.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Денисов Г. Г., Урман Ю. М. Прецессионные движения твердого тела под действием моментов, имеющих силовую функцию // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 6. С. 5-14.
2. Булгаков Б. В. Прикладная теория гироскопов. М.: Гостехиздат, 1955. 355 с.
3. Власов В. З. Избранные труды. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 528 с.
4. Филлин А. П. Элементы теории оболочек. Л.: Стройиздат, 1987. 384 с.
5. Александров А. М., Брюшков В. Г., Корецкий А. В., Мартыненко Ю. Г. Уход электростатического гироскопа, вызываемый упругими деформациями ротора. // Проблемы электромеханики гироскопических устройств. Межвуз. тем. Сб. тр. Моск. энергет. ин-та. 1983. № 14. С. 16-22.
6. Мартыненко Ю. Г. Движение твердого тела в электрических и магнитных полях. М.: Наука, 1988. 368 с.

Москва

Поступила в редакцию  
14.IV.1988