

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ИССЛЕДОВАНИЮ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ КОМПОЗИТОВ

Характерной особенностью проектирования силовых конструкций из композиционных материалов является возможность варьирования упругими параметрами материала для реализации в конструкции потенциально высоких прочностных свойств композитов. Указанная особенность делает актуальной задачу исследования зависимости параметров напряженно-деформированного состояния (НДС) конструкции от упругих постоянных материала и конструктивных характеристик. При наличии достаточно простой расчетной модели такое исследование легко проводится аналитическими методами. Если же необходимая точность расчетов достигается лишь при использовании универсальных численных методов, построение зависимости параметров напряженно-деформированного состояния от конструктивных характеристик требует проведения большого числа трудоемких расчетов.

Одним из компромиссных путей является использование численно-аналитических расчетных моделей. При этом возможны по крайней мере два различных подхода: первый состоит в использовании аналитических моделей для описания деформирования элементов конструкции с последующим применением хорошо разработанного аппарата метода конечных элементов для расчета конструкции в целом [1], второй — в использовании одного из численных методов для дискретизации задачи и последующем аналитическом исследовании полученной дискретной модели [2].

В настоящей работе рассматривается совместное применение численного метода конечных элементов и аналитического метода малого параметра к параметрическому исследованию напряженно-деформированного состояния комбинированных оболочечных конструкций из анизотропных материалов.

Дискретная модель подкрепленной оболочки включает оболочечные элементы [3] и изгибные подкрепляющие элементы стрингеров и шпангоутов [4]. Потенциальная энергия каждого из конечных элементов Π_e известным образом выражается через перемещения узлов конечноэлементной модели:

$$\Pi_e = 1/2 \delta_i C_{ij}^{(e)} \delta_j - r_i^{(e)} \delta_i \quad (1)$$

где δ_i — i -е обобщенное перемещение, $r_i^{(e)}$ — соответствующая обобщенная сила, действующая на элемент с номером e , $C_{ij}^{(e)}$ — компоненты матрицы жесткости конечного элемента с номером e . Здесь и далее подразумевается суммирование по повторяющимся неммым индексам.

Используя вариационный принцип Лагранжа, перемещения узлов найдем из условия минимума потенциальной энергии модели:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \delta_i} = \frac{\partial}{\partial \delta_i} \left(\sum_e \Pi_e \right) = \sum_e \left(C_{ij}^{(e)} \delta_j - r_i^{(e)} \right) = 0 \quad (2)$$

Равенство (2) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений, решением которой находятся узловые перемещения δ_i . Матрица этой системы, называемая матрицей жесткости конечноэлементной модели, может быть представлена в виде суммы матриц жесткости конструктивных элементов (подконструкций), которые, в свою очередь, складываются из матриц жесткости конечных элементов.

Применительно к подкрепленным оболочкам из композиционных материалов могут быть поставлены задачи исследования напряженно-деформированного состояния от следующих конструктивных параметров: удлинения оболочки, ее толщины, упругих параметров материала оболочки и подкрепляющего набора, площади и моментов инерции сечений стрингеров и шпангоутов. При уточненном исследовании напряженно-деформированного состояния локальных зон отдельных конструктивных элементов (в клеевых швах, вблизи краев вырезов, накладок и т. п.) целесообразно рассмотрение зависимости НДС от конфигурации конструктивного элемента.

Предполагая, что каждый из указанных конструктивных параметров данной конструкции определяет матрицы жесткости всех входящих в нее конструктивных элементов, выделим две группы задач параметрического исследования напряженно-деформированного состояния: задачи с фиксированной геометрией конечноэлементной модели, в которых остаются неизменными координаты узлов, и задачи с варьируемыми координатами.

Рассмотрим вначале первую группу задач. Пусть варьируется некоторый параметр, определяющий матрицу жесткости k -й подконструкции. Обозначив через t изменение этого параметра, запишем переменную матрицу жесткости подконструкции в виде

$$C_{ij}^{(k)t} = C_{ij}^{(k)} + \sum_{m=1}^n C_{ij}^{(k,m)} t^m \quad (3)$$

где $C_{ij}^{(k)}$ и $C_{ij}^{(k,m)}$ — матрицы, содержащие постоянные числовые величины.

Полиномиальное представление (3) охватывает все наиболее важные случаи зависимости матрицы жесткости от толщины оболочки, подкрепляющих элементов и от их модулей упругости. Так, мембранная и цилиндрическая жесткость оболочки пропорциональны толщине соответственно в первой и третьей степени; жесткость стрингерного набора пропорциональна площади сечения стрингеров; изгибная жесткость стрингеров и шпангоутов зависит от моментов инерции, пропорциональных кубу толщины.

С учетом (3), система уравнений (2) может быть переписана в виде

$$\left[C_{ij} + \sum_{m=1}^n C_{ij}^{(m)} t^m \right] \delta_j = r_i \quad (4)$$

$$C_{ij} = \sum_k C_{ij}^{(k)}, \quad C_{ij}^{(m)} = \sum_k C_{ij}^{(k,m)}, \quad r_i = \sum_e r_i^{(e)} \quad (5)$$

где k — индекс подконструкции, e — индекс конечного элемента.

Разложим искомые перемещения в ряд по степеням параметра t :

$$\delta_j = \sum_{l=0}^{\infty} \delta_j^{(l)} t^l \quad (6)$$

где $\delta_j^{(l)}$ — постоянные числовые коэффициенты.

Подставив ряд (6) в систему уравнений (4), имеем

$$C_{ij} \delta_j^{(0)} + \sum_{l=1}^{\infty} C_{ij} \delta_j^{(l)} t^{(l)} + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^n C_{ij}^{(m)} \delta_j^{(l)} t^{m+l} = r_i \quad (7)$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях t в левой и правой частях, получим рекуррентные соотношения для определения $\delta_j^{(l)}$:

$$C_{ij} \delta_j^{(0)} = r_i, \quad C_{ij} \delta_j^{(l)} = - \sum_{m=1}^{\min(n,l)} C_{ij}^{(m)} \delta_j^{(l-m)} \quad (8)$$

Соотношения (8) представляют собой системы линейных алгебраических уравнений с одинаковыми матрицами коэффициентов C_{ij} . Это позволяет, один раз факторизовав матрицу жесткости, определять затем коэффициенты разложения (6) с относительно малыми затратами времени. Заметим, что коэффициенты $\delta_j^{(0)}$, получаемые на первой итерации, представляют собой узловые перемещения при нулевом значении параметра t .

Интервал сходимости ряда (6) в общем случае установить затруднительно. В ряде случаев, однако, можно установить достаточные условия, гарантирующие сходимость ряда. Перепишем второе из соотношений (8) в виде

$$\delta_i^{(l)} = - \sum_{m=1}^{\min(n,l)} C_{ip}^{-1} C_{pj}^{(m)} \delta_j^{(l-m)} \quad (9)$$

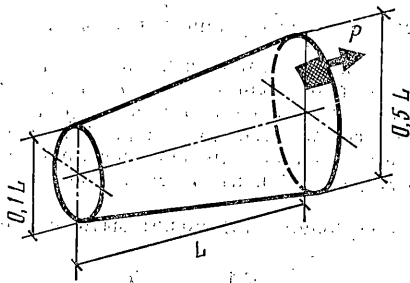
Используя неравенство Коши — Буняковского, получим оценку евклидовой нормы вектора $\delta_j^{(l)}$:

$$|\delta_i^{(l)}| \leq \sum_{m=1}^{\min(n,l)} |C_{ip}^{-1} C_{pj}^{(m)}| |\delta_j^{(l-m)}| \leq \sum_{m=1}^{\min(n,l)} |\lambda_{\max}^{(m)}| |\delta_j^{(l-m)}| \quad (10)$$

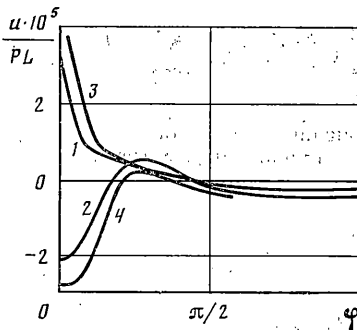
где через $\lambda_{\max}^{(m)}$ обозначено наибольшее по абсолютной величине собственное число матрицы $C_{ip}^{-1} C_{pj}^{(m)}$. С учетом последнего неравенства, запишем достаточное условие сходимости ряда, составленного из евклидовых норм векторов $\delta_j^{(l)} t^l$ ($l=1, \dots, \infty$)

$$|t| \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n |\lambda_{\max}^{(m)}| \cdot |\delta_j^{(l-m)}| \cdot |\delta_j^{(l-1)}|^{-1} < 1 \quad (11)$$

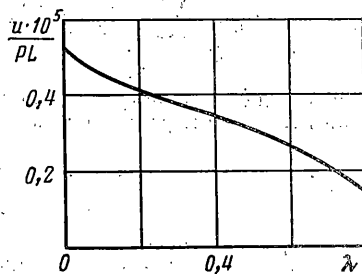
выполнение условия (11) влечет сходимость ряда (6).



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Представляет интерес рассмотрение практически важного частного случая, когда сумма вида (3) имеет лишь одно слагаемое. Это имеет место, например, если варьируется модуль упругости конструктивного элемента. В этом случае рекуррентные соотношения (8) принимают вид

$$C_{ij} \delta_j^{(0)} = r_i, \quad C_{ij} \delta_j^{(l)} = -C_{ij}^{(l)} \delta_j^{(l-1)} \quad (12)$$

а условие сходимости (11) записывается в виде

$$|t| \lim_{l \rightarrow \infty} |\lambda_{\max}| \cdot |\delta_j^{(l-1)}| \cdot |\delta_j^{(l-1)}|^{-1} = |t \lambda_{\max}| < 1 \quad (13)$$

Отсюда следует сходимость ряда при $-\lambda_{\max}^{-1} < t < \lambda_{\max}^{-1}$.

Приведем пример исследования зависимости напряженного состояния анизотропной оболочки, нагруженной на кромке сосредоточенной силой, от модулей упругости материала. Как известно, начальное разрушение связующего и адгезионных связей в композитах происходит при относительно малых нагрузках; при этом существенно снижаются модули упругости зоны, в которой произошла деструкция [5, 6].

Степень поврежденности будем описывать параметром, характеризующим снижение модулей упругости: $d_{ij}^t = d_{ij} - t d_{ij}^d$, где d_{ij}^t и d_{ij} — матрицы упругих констант поврежденного и неповрежденного материала соответственно, d_{ij}^d — матрица, не зависящая от t (t — малый параметр).

Матрица жесткости конечного элемента оболочки теперь может быть представлена в виде суммы

$$C_{ij}^{(e)t} = \int_{V_e} b_{ki}^{(e)} d_{kl}^t b_{lj}^{(e)} dV = \int_{V_e} b_{ki}^{(e)} d_{kl} b_{lj}^{(e)} dV - t \int_{V_e} b_{ki}^{(e)} d_{kl}^d b_{lj}^{(e)} dV = C_{ij}^{(e)} - t C_{ij}^{d(e)}$$

где $b_{ki}^{(e)}$ — элементы матрицы, составленной из частных производных от базисных аппроксимирующих функций по координатам [3]; интегрирование производится по объему элемента.

Система уравнений (2) относительно узловых перемещений примет вид $(C_{ij} - t C_{ij}^d) \delta_j = r_i$, что совпадает с системой (4) при $n=1$. Решение такой системы найдем в виде ряда (6) с коэффициентами, определяемыми рекуррентными соотношениями (12).

Для конической оболочки, заземленной слева, размеры которой приведены на фиг. 1, было принято, что деструкция происходит в зоне, прилегающей к точке приложения силы. Размеры зоны уменьшенной жесткости в расчете составили: по меридиану — $1/8$ длины оболочки, по окружности — сектор с углом $\varphi = \pi/6$.

На фиг. 2 приведены распределения меридиональных и нормальных перемещений на кромке оболочки (кривые 1 и 2 соответственно) для неповрежденной оболочки. Кривыми 3 и 4 представлены меридиональные и нормальные перемещения, соответствующие параметру $t=0,5$. Модули упругости неповрежденного материала были приняты равными: $E_s^0=4 \cdot 10^4$ МПа (в меридиональном направлении), $E_\varphi^0=3 \cdot 10^4$ МПа (в окружном направлении); модули сдвига: $G_{s\varphi}^0=G_{ns}^0=G_{n\varphi}^0=4,5 \cdot 10^3$ МПа. Модули упругости при $t=0,5$ составляли $E_s=E_s^0$, $E_\varphi=0,8E_\varphi^0$, $G_{ns}=G_{ns}^0$, $G_{n\varphi}=G_{s\varphi}^0=0,8G_{s\varphi}^0$.

Величины прогибов и других параметров напряженно-деформированного состояния при различных, достаточно малых, значениях параметра t легко находятся вычислением частичной суммы ряда (6), после того как его коэффициенты однажды найдены. Так, на фиг. 3 приведен прогиб в точке, отстоящей от точки приложения нагрузки на угол $\pi/4$ по окружности, в зависимости от параметра поврежденности t . Из графика видно, что прогиб в этой точке уменьшается с уменьшением модулей упругости поврежденной зоны. Одновременно растет прогиб вблизи места приложения нагрузки. Это может быть обусловлено ослаблением влияния силы на зоны, удаленные от точки ее приложения, вследствие роста податливости поврежденной зоны.

Задачи, в которых варьируемыми параметрами являются координаты узлов, имеют качественное отличие от рассматриваемых выше задач с фиксированной геометрией. В рассмотренных задачах точность решения определялась двумя факторами: точностью аппроксимации перемещений, обеспечиваемой исходной разбивкой на конечные элементы и удерживанием достаточно большого числа членов ряда (6). Изменение же координат может повлечь ухудшение аппроксимации вследствие искажения начальной конфигурации конечноэлементной сетки. Это обстоятельство накладывает на исходную конечноэлементную модель следующее требование: при всех рассматриваемых значениях малого параметра конфигурация и размеры конечных элементов должны обеспечивать необходимую точность аппроксимации.

Рассмотрим, для определенности, задачу, в которой варьируемым параметром является линейный размер конструктивного элемента в направлении координатной оси x . Пусть указанный размер увеличивается, по сравнению с исходной моделью, в $(1+s)$ раз. Тогда частные производные от базисных аппроксимирующих функций по координате x уменьшаются в $(1+s)$ раз, а производные по остальным координатам не изменяются. Выразим измененную матрицу жесткости конечного элемента через параметр s . Для элемента анизотропной оболочки [3] имеем

$$C_{ij}^{(e)} = \int_V b_{hi}^{(e)} d_{hl} b_{lj}^{(e)} dV$$

где d_{hl} — матрица упругих констант, $b_{ij}^{(e)}$ — матрица, составленная из частных производных от базисных функций по координатам; интегрирование производится по объему элемента.

Измененную матрицу $b_{ij}^{(e)}$ запишем в виде: $b_{ij}^{(e)s} = b_{ij}^{(e)} - s(1+s)^{-1} b_{ij}^{d(e)}$,

где $b_{ij}^{d(e)}$ — матрица, содержащая только частные производные по координате x и полученная из матрицы $b_{ij}^{(e)}$ заменой всех остальных производных от базисных функций нулями.

Учитывая, что дифференциал объема для измененного элемента увеличивается в $(1+s)$ раз, выразим через параметр s его матрицу жесткости

$$C_{ij}^{(e)s} = \int_V b_{hi}^{(e)s} d_{hl} b_{lj}^{(e)s} dV^s = (1+s) \int_V b_{hi}^{(e)} d_{hl} b_{lj}^{(e)} dV - s \int_V (b_{hi}^{(e)} d_{hl} b_{lj}^{d(e)} + b_{hi}^{d(e)} d_{hl} b_{lj}^{(e)}) dV + \frac{s^2}{1+s} \int_V b_{hi}^{d(e)} d_{hl} b_{lj}^{(e)} dV$$

Суммируя по элементам, получим матрицу жесткости всей модели:

$$C_{ij}^s = C_{ij} + s^2(1+s)^{-1} C_{ij}^d - s C_{ij}^* \quad (14)$$

где C_{ij} — исходная матрица жесткости, C_{ij}^j , C_{ij}^* — матрицы, не зависящие от s .

С учетом (14), решение системы уравнений (2) может быть записано в виде ряда по степеням параметра $\mu = s/(1+s)$:

$$\delta_i(\mu) = \sum_{h=0}^{\infty} \delta_i^{(h)} \mu^h, \quad C_{ij} \delta_j^{(0)} = r_i$$

$$C_{ij} \delta_j^{(1)} = C_{ij}^* \delta_j^{(0)}, \quad C_{ij} \delta_j^{(h+1)} = C_{ij} \delta_j^{(h)} + C_{ij}^* \delta_j^{(h)} - C_{ij}^d \delta_j^{(h-1)}$$

Напряжения в оболочке определяются по найденным перемещениям [3] $\sigma_i(\mu) = d_{ij} b_{jk}^{(e)s} \delta_k(\mu)$.

Таким образом, рассмотренные задачи с варьируемой геометрией также сводятся к многократному последовательному повторению решения системы линейных алгебраических уравнений с одной и той же матрицей коэффициентов, которая является матрицей жесткости исходной модели. Решение каждой системы дает очередной коэффициент ряда (6). Определение достаточно большого числа коэффициентов дает возможность построить явную зависимость НДС от варьируемого параметра, что позволяет эффективно автоматизировать параметрическое исследование подкрепленных оболочечных конструкций.

Рассмотренный подход можно использовать при исследовании не только оболочечных, но и других типов конструкций, как из композиционных, так и из традиционных материалов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Образцов И. Ф., Иванов Ю. И., Нерубайло Б. В., Зайцев В. Н.* О построении эффективных моделей деформирования тонкостенных конструкций // Прикл. механика. 1985. Т. 21. № 7. С. 61-67.
2. *Бакулин В. Н., Каледин В. О., Каледина Л. Н., Рассоха А. А.* Численный анализ температурных полей в слоистых анизотропных оболочках // Мат. методы и физ.-мех. поля. 1987. Вып. 26. С. 98-101.
3. *Бакулин В. Н., Рассоха А. А.* Метод конечных элементов и голографическая интерферометрия в механике композитов. М.: Машиностроение, 1987. 311 с.
4. *Бакулин В. Н., Каледин В. О.* Конечный элемент круговой арки с конечной сдвиговой жесткостью // Механика композитн. материалов. 1988. № 5. С. 915-921.
5. *Образцов И. Ф., Васильев В. В., Бунаков В. А.* Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1977. 144 с.
6. *Ванин Г. А., Семенюк Н. П., Емельянов Р. Ф.* Устойчивость оболочек из армированных материалов. Киев: Наук. думка, 1978. 212 с.

Москва

Поступила в редакцию
10.V.1988.