МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1989

УДК 539.3

В. В. КУЗНЕЦОВ

РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ВАРИАЦИЙ ЭНЕРГИИ НЕЛИНЕЙНЫХ УПРУГИХ СИСТЕМ

Рассмотрен метод получения коэффициентов первой и второй вариаций энергии дискретных упругих систем, основанный на введении нескольких уровней варьирования. Получены рекуррентные соотношения, связывающие коэффициенты вариаций энергии на различных уровнях. Проведено вычисление коэффициентов вариаций энергии для нелинейной двухуровневой конечноэлементной модели оболочки. Предлагаемый метод точного получения коэффициентов вариаций энергии допускает эффективную численную реализацию и позволяет исследовать сложные нелинейные системы.

1. Многоуровневое представление. Положим, что некоторая консервативная упругая система характеризуется обобщенными координатами q_i $(i=1, \ldots, n)$ и функционалом потенциальной энергии $\Pi=\Pi(q_1, \ldots, q_n)$. Первая вариация энергии является линейной, а вторая – квадратичной формами вида

$$\delta\Pi=g^i\delta q_i, \quad \delta^2\Pi=h^{ij}\delta q_i\delta q_j \quad (i, j=1,\ldots, n) \tag{1.1}$$

где $g^i=\Pi^{,i}$, $h^{ij}=\Pi^{,ij}$ – коэффициенты первой и второй вариаций энергии соответственно. Индексы после запятой сверху означают частные производные по соответствующим обобщенным координатам. В формулах (1.1) и далее предполагается суммирование по повторяющимся дважды индексам. Непосредственное точное вычисление g^i, h^{ij} для сложной нелинейной системы, зависящей от большого числа обобщенных координат, может быть сопряжено с определенными трудностями.

Наряду с q_i введем $(m-1)$ уровней дискретных параметров u_p^k $(k=1, \ldots, m-1)$, где верхний индекс означает номер уровня, а нижний – номер переменной на данном уровне. Обобщенные координаты q_i будем рассматривать как переменные m-го уровня $u_i^m=q_i$. Положим, что дискретные переменные k-го уровня связаны с переменными $(k+1)$-го уровня некоторыми нелинейными зависимостями $u_p^k=u_p^k(u_1^{k+1}, \ldots, u_r^{k+1})$. На произвольном k-м уровне варьирования первая и вторая вариация энергии представимы в виде, аналогичном (1.1), где вместо q_i следует поставить u_i^k, а g^i и h^{ij} – будут представлять собой коэффициенты первой и второй вариаций энергии на данном уровне.

Рассмотрим два последовательных уровня варьирования. Обозначим, для краткости, переменные более низкого через u_i, а коэффициенты вариаций энергии на этом уровне через g_i, h_{ij}. Соответственно переменные более высокого уровня обозначим через v_k, а коэффициенты вариаций энергии на данном уровне через g^k, h^{kp}. Используя правила варьирования сложных функций и свойство симметрии коэффициентов второй вариации на любом уровне варьирования, получаем следующие соотношения

$$g^k=g_iu_i^{,k}, \quad h^{kp}=h_{ij}u_i^{,k}u_j^{,p}+g_iu_i^{,kp} \tag{1.2}$$

где индексом после запятой сверху обозначены производные по v_k. Формулы (1.2) позволяют рекуррентно вычислять g^k, h^{kp} от уровня к уровню. Конечной целью такого последовательного процесса является определение коэффициентов вариаций энергии на самом последнем уровне (1.1). Соотношения (1.2) эффективно реализуются с помощью операции циклического накопления.

2. Двухуровневая модель оболочки. Рассмотрим применение полученных соотношений в связи с решением нелинейных задач теории оболочек методом конечных элементов. Аппроксимируем оболочку с помощью треугольных конечных элементов и определим компоненты тензоров деформаций и искривлений срединной поверхности ε_{ij}, $\varkappa_{ij}$ в области больших перемещений и поворотов срединной поверхности соотношениями

$$\varepsilon_{ij}={}^1/_2(\overset{+}{x}_{k,i}\overset{+}{x}_{k,j}-\delta_{ij}), \quad \varkappa_{ij}={}^1/_2(\theta_{i,j}+\theta_{j,i}) \tag{2.1}$$

где x_k^+ $(x_k, k=1, 2, 3)$ – декартовы координаты деформированной (недеформированной) срединной поверхности, θ_i $(i=1, 2)$ – изменения косинусов углов наклона вектора нормали к координатам α_i ($i=1$, 2) на плоскости, проходящей через узлы треугольного элемента, определяемые соотношениями

$$\theta_i=\overset{+}{\lambda}_{3k}\overset{+}{x}_{k,i}-\lambda_{3k}x_{k,i}, \quad \overset{+}{x}_{ki}=\overset{+}{x}_{k,i}L_i \tag{2.2}$$

где λ_{ik}^+ (λ_{ik}) — направляющие косинусы ортогонального трехгранника в деформированном (недеформированном) состоянии, причем индекс $i=1$, 2 определяет два орта касательных к срединной поверхности, а $i=3$ — орт нормали. Добавляемый ниже третий индекс соответствует номеру узла. В формулах (2.1), (2.2) нижний индекс после запятой означает дифференцирование по координатам α_i, причем последняя формула (2.2) показывает, что для интерполяции x_k^+ по узловым неизвестным используется линейный полином в L-координатах. Для интерполяции θ_i по узловым неизвестным θ_{ij}, $\theta_i=N_{ikm}\theta_{km}$, используются квадратичные полиномы N_{ikm}, в L-координатах [1]. В силу линейной аппроксимации x_k^+, компоненты ε_{ij} являются постоянными, не зависящими от координат области определения.

Выберем в качестве дискретных переменных первого уровня u_i для конечного элемента девять независимых дискретных величин ε_{ij} и θ_{ij}, а в качестве переменных второго уровня v_k — три компоненты вектора перемещения w_{ij} ($i=1$, 2, 3) и две компоненты вектора поворота нормали φ_{ij} ($i=1$, 2) в каждом узле элемента ($j=1$, 2, 3) [1]. Переменные второго уровня совпадают с обобщенными координатами. Таким образом, рассматриваемая модель оболочки является двухуровневой. Коэффициенты первой и второй вариации потенциальной энергии П конечного элемента на первом уровне вычисляются через канонический тензор s_{rp} [2]:

$$g_i=\int\limits_v s_{rp}s_{rp,i}dv, \quad h_{ij}=\int\limits_v s_{rp,i}s_{rp,j}dv \tag{2.3}$$

где v — объем конечного элемента. Переменные u_i связаны с v_k нелинейными геометрическими зависимостями. Вычисляя $u_i{}^{,k}$, $u_i{}^{,kp}$ с использованием вариационных формул векторной алгебры [3] получаем

$$\begin{gathered}\partial\varepsilon_{ij}/\partial w_{km}={}^1/_2(b_{mi}\overset{+}{x}_{k,j}+b_{mj}\overset{+}{x}_{k,i}), \quad \partial^2\varepsilon_{ij}/\partial w_{km}\partial w_{ks}={}^1/_2(b_{mi}b_{sj}+b_{mj}b_{si})\\ \partial\theta_{ij}/\partial w_{km}=b_{mi}\overset{+}{\lambda}_{3kj}, \quad \partial^2\theta_{ij}/\partial w_{km}\partial\varphi_{sj}=b_{mi}\overset{+}{\lambda}_{skj}\\ \partial\theta_{ij}/\partial\varphi_{kj}=\overset{+}{\lambda}_{kmj}\overset{+}{x}_{m,i}, \quad \partial^2\theta_{ij}/\partial\varphi_{kj}{}^2=-\overset{+}{\lambda}_{3mj}\overset{+}{x}_{m,i}\end{gathered} \tag{2.4}$$

Применяя формулы (1.2), находим точные значения коэффициентов первой и второй вариаций потенциальной энергии конечного элемента на втором уровне, т. е. на уровне обобщенных координат. Непосредственное вычисление этих коэффициентов, число которых в общей сложности с учетом симметрии коэффициентов h^{ij} равно 135 (без учета симметрии — 240), приводит к громоздким выкладкам. Коэффициенты g^k, h^{kp} для ансамбля конечных элементов получаются суммированием коэффициентов при одинаковых обобщенных координатах. Обобщенные координаты для ансамбля конечных элементов находятся итерационным путем из уравнений равновесия, которые в случае действия позиционных обобщенных сил f^k имеют вид $h^{kp}\delta q_p+g^k=f^k$. Приложение двухуровневых моделей стержней и оболочек к решению геометрически нелинейных задач при произвольных перемещениях рассматривалось в [1, 4, 5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кузнецов В. В., Сойников Ю. В.* Анализ деформаций оболочек при произвольных перемещениях методом конечных элементов // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 1, с. 131–138.
2. *Кузнецов В. В.* Канонический тензор в теории упругости // ПМТФ. 1987. № 5, с. 144–146.
3. *Кузнецов В. В.* К определению вращений в трехмерном пространстве на основе понятия вариации вектора // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 4, с. 58–60.
4. *Кузнецов В. В., Сойников Ю. В.* О численном решении задач нелинейного изгиба плоских стержней // Прикл. механика. 1986. № 10, с. 91–98.
5. *Кузнецов В. В., Сойников Ю. В.* Применение геометрически нелинейного подхода к расчету подкрепленных оболочек // Динамика и прочность элементов авиационных конструкций. Новосибирск: Новосиб. электротех. ин-т. 1987. С. 15–22.

Новосибирск

Поступила в редакцию
18.IV.1988