МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1989

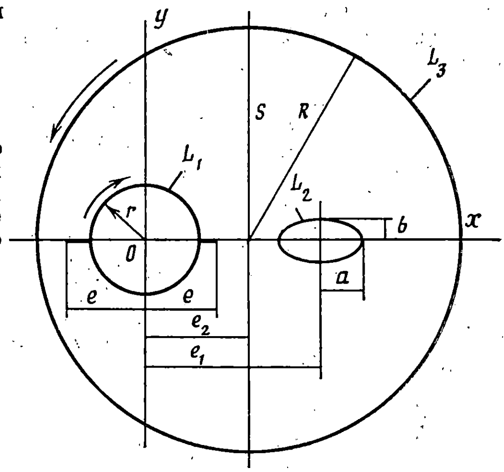
УДК 539.3

С. А. КУЛИЕВ

КРУЧЕНИЕ КРУГЛОГО БРУСА, ОСЛАБЛЕННОГО ДВУМЯ ПОЛОСТЯМИ РАЗЛИЧНОГО ОЧЕРТАНИЯ

В [1–3] рассмотрены задачи кручения с центрально расположенной полостью, решения которых сводятся к отысканию одной функции, регулярной всюду вне внутреннего контура (окружность с двумя прямолинейными разрезами). В [2] с помощью некоторой модификации этого приема решена простая задача теории упругости. В публикуемой работе рассмотрена задача кручения бруса с двумя несимметрично расположенными полостями различного очертания.

Рассмотрим напряженное состояние при кручении круглого бруса, сечение которого является трехсвязной областью (фигура). Обозначим границы области: L_1 – окружность радиуса r с двумя прямолинейными разрезами, L_2 – эллипс с полуосями a и b, L_3 – наружный контур окружности радиуса R. Начало координат помещено в центре контура L_1. Как известно [3, 4], решение задачи сводится к отысканию функции $F(z)$, удовлетворяющей следующим граничным условиям:



$$F(t)+\overline{F(t)}=t\bar{t}+C_i \quad (\text{на } L_i;\ i=1,\,2,\,3) \tag{1}$$

Регулярную в области S функцию $F(z)$ представим в виде суммы трех функций, одна из которых регулярна внутри наружного контура L_3, а две другие же функции – соответственно вне L_1 и L_2:

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi_1{}^{-k}+\sum_{k=0}^{\infty} b_k \xi_2{}^{-k}+\sum_{k=1}^{\infty} d_k\left(\frac{z-e_1}{R}\right)^k \tag{2}$$

Внешность контура L_1 отображается на внешность единичной окружности в плоскости ξ_1 с функцией [1, 5]:

$$z=r\xi_1\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_{n-1}\xi_1{}^{-n} \tag{3}$$

$$\gamma_{n-1}=\sum_{S_k=0}^{n}{}^{*}\ 2\lambda(-1)^{k/2}C_{1/2}^{k/2}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{-k+1}C_{-k+1}^{(n-k)/2}$$

Функция, обратная к последнему равенству, имеет вид

$$\xi_1=\frac{z}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\delta_{n-1}\left(\frac{r}{z}\right)^n \tag{4}$$

$$\delta_{n-1}=\sum_{k=0}^{n}{}^{*}\ 2\lambda(-1)^{k/2}C_{1/2}^{k/2}\ ({}^{1}/{}_{2}\alpha)^{-k+1}C_{-k+1}^{(n-k)/2}$$

$$\lambda=1 \quad (k=0), \quad \lambda={}^1/_2 \quad (k\neq 0)$$

Внешность контура L_2 отображается на внешность единичной окружности с помощью функции

$$z-e_2=A\ (\xi_2+m/\xi_2), \quad A=(a+b)/2$$
$$m=(a-b)/(a+b) \tag{5}$$

функция, обратная равенству (5), имеет вид [2, 3]:

$$\xi_2=\frac{z-e_2}{A}\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(1)}\left(\frac{A}{z-e_2}\right)^{2n} \tag{6}$$

При решении числового примера в ряде (6) были сохранены первые шесть слагаемых, что обеспечивает большую точность: $a_0^{(1)}=1$, $a_1^{(1)}=-m$, $a_2^{(1)}=-2m^2$, $a_3^{(1)}=-5m^3$, $a_4^{(1)}=-14m^4$, $a_5^{(1)}=-42m^5$.

Подставив разложение (4) и (6) в равенство (2) после некоторых преобразований получим ($E(n)$ – целая часть числа n):

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\left(\frac{r}{z}\right)^k+\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k\left(\frac{A}{z-e_2}\right)^k+\sum_{k=1}^{\infty}d_k\left(\frac{z-e_1}{R}\right)^k \tag{7}$$

$$\alpha_k=\sum_{\nu=k-E(k/2)}^{k}{}^{*}\ a_\nu\delta_{-1}{}^{\nu}l_{k-\nu}^{(k)}, \quad \beta_k=\sum_{\nu=k-E(k/2)}^{k}{}^{*}\ B_\nu a_{(\nu-k)/2}^{(\nu)}$$

С учетом граничных значений функции $F(z)$ условие на контуре L_1 приводится к виду

$$\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\left(\frac{r}{t}\right)^k+\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k\left(\frac{A}{t-e_2}\right)^k+\sum_{k=1}^{\infty}d_k\left(\frac{t-e_1}{R}\right)^k+$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\left(\frac{r}{\bar t}\right)^k+\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k\left(\frac{A}{\bar t-e_2}\right)^k+\sum_{k=1}^{\infty}d_k\left(\frac{\bar t-e_1}{R}\right)^k=t\bar t-C_1 \tag{8}$$

Разложив в равенстве (8) все выражения $(t-e_1)$ и $(t-e_2)$ в степенной ряд по t, получим:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\left(\frac{r}{t}\right)^k+\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k\left(-\frac{A}{e_2}\right)^k\sum_{n=0}^{\infty}C_{-k}{}^n(-1)^n\left(\frac{t}{e_2}\right)^n+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}d_k\left(-\frac{e_1}{R}\right)^k\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{t}{e_1}\right)^nC_k{}^n+\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\left(\frac{r}{\bar t}\right)^k+$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k\left(-\frac{A}{e_2}\right)^k\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\bar t}{e_2}\right)^nC_{-k}{}^n+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}d_k\left(-\frac{e_1}{R}\right)^k\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\bar t}{e_1}\right)^nC_k{}^n=t\bar t+C_1 \quad (\text{на } L_1) \tag{9}$$

Изменяя порядок суммирования во всех двойных суммах в (9), получим

$$\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\left(\frac{r}{t}\right)^k+\sum_{n=0}^{\infty}t^nH_1(n)+\sum_{n=0}^{\infty}t^nH_2(n)+\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\left(\frac{r}{\bar t}\right)^k+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}(\bar t)^n H_1(n)+\sum_{n=0}^{\infty}(\bar t)^n H_2(n)=t\bar t+C_1 \quad (\text{на } L_1) \tag{10}$$

$$H_1(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k\left(-\frac{A}{e_2}\right)^k(-1)^n e_2^{-n}C_{-k}^n,$$

$$H_2(n)=\sum_{k=n}^{\infty}d_k\left(-\frac{e_1}{R}\right)^k(-1)^n e_1^{-n}C_k^n$$

Учитывая теперь в (10) отображающую функцию (3), перейдя к новой переменной τ, после некоторых выкладок и преобразований получим следующую систему бесконечных линейных алгебраических уравнений (на единичной окружности $\tau\bar\tau=1$):

$$\Pi_1(\nu)+\Pi_2(\nu)+\Pi_3(\nu)+\Pi_4(\nu)+\Pi_5(\nu)=R^2\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_{n-1}\gamma_{n-k-1} \tag{11}$$

$$\Pi_1(\nu)=\sum_{k=\nu=E(\nu/2)}^{\infty}{}^{*}\alpha_k\gamma_{-1}^{-k}l_{\nu-k}^{(k)},\quad \Pi_2(\nu)=\sum_{n=\nu}^{\infty}{}^{*}H_1(n)R^n\gamma_{-1}^{n}g_{\nu-1}^{(n)}$$

$$g_n^{(1)}=\gamma_{n-1}/\gamma_{-1},\quad \Pi_3(\nu)=\sum_{n=\nu}^{\infty}{}^{*}H_2(n)R^k\gamma_{-1}^{n}g_{\nu-1}^{(n)},\quad g_0^{(k)}=1$$

$$\Pi_4(\nu)=\sum_{n=\nu-E((\nu-1)/2)}^{\infty}{}^{*}H_2(n)R^n\gamma_{-1}{}^n g_{n+\nu}^{(n)},$$

$$\Pi_5(\nu)=\sum_{n=\nu-E((\nu-1)/2)}^{\infty}{}^{*}H_1(n)R^n\gamma_{-1}{}^n g_{n+\nu}^{(n)}$$

Все величины $l_\nu^{(k)}$ определяются из условий

$$l_\nu^{(k)}+\sum_{n=1}^{\nu}{}^{*}l_{\nu-n}^{(k)}g_n^{(k)}=0,\quad g_n^{(k)}=\sum_{n_1=0}^{n}g_{n_1}^{(1)}g_{n-n_1}^{(k-1)} \tag{12}$$

Теперь преобразуем граничное условие на L_2. Подставляя в условии (1) граничное значение функции $F(z)$, получим

$$\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\left(\frac{r}{t}\right)^k+\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k\left(\frac{A}{t-e_2}\right)^k+\sum_{k=1}^{\infty}d_k\left(\frac{t-e_1}{R}\right)^k+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\left(\frac{r}{\bar t}\right)^k+\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k\left(\frac{A}{\bar t-e_2}\right)^k+\sum_{k=1}^{\infty}d_k\left(\frac{\bar t-e_1}{R}\right)^k=t\bar t+C_2 \tag{13}$$

Разложим выражения $(t)^k$ и $(t-e_1)^k$ в степенный ряд по $(t-e_2)$:

$$\left(\frac{r}{t}\right)^k=\left(\frac{r}{e_2}\right)^k\left(1+\frac{t-e_2}{e_2}\right)^{-k}=\left(\frac{r}{e_2}\right)^k\sum_{n=0}^{\infty}(t-e_2)^n e_2^{-n}C_{-k}^n$$

$$\left(\frac{t-e_1}{R}\right)^k=\left(\frac{e_2-e_1}{R}\right)^k\left(1+\frac{t-e_2}{e_2-e_1}\right)^k=\left(\frac{e_2-e_1}{R}\right)^k\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t-e_2}{e_2-e_1}\right)^n C_k^n \tag{14}$$

Кроме того, на основе (5) на L_2 имеем

$$t\bar t=[e_2+A(\tau+m/\tau)][e_2+A(\tau^{-1}+m\tau)]=$$
$$=e_2^2+A^2(1+m^2)+e_2A(1+m)(\tau+\tau^{-1})+A^2m(\tau^2+\tau^{-2}) \tag{15}$$

Подставляя (5), (13) и (14) в граничное условие (12), после некоторых выкладок получим следующую систему бесконечных линейных алгебраических уравнений:

$$V_1(\nu)+V_2(\nu)+V_3(\nu)+V_4(\nu)+V_5(\nu)=e_2A(1+m)\varepsilon_1+A^2m\varepsilon_2 \tag{16}$$

$$V_1(\nu)=\sum_{n=0}^{\infty}{}^{*}T_1(n)A^n(mC_n)^{(n-\nu)/2},\quad V_2(\nu)=\sum_{n=0}^{\infty}{}^{*}T_2(n)A^n(mC_n)^{(n-\nu)/2}$$

$$V_3(\nu)=\sum_{n=\nu}^{\infty}{}^{*}T_1(n)A^n(mC_n)^{(n+\nu)/2},\quad V_4(\nu)=\sum_{n=\nu}^{\infty}{}^{*}T_2(n)A^n(mC_n)^{(n+\nu)/2}$$

$$V_5(\nu)=\sum_{k=\nu-2E((\nu-1)/2)}^{\nu}\beta_k(mC_k)^{(\nu-k)/2},\quad T_2(n)=(e_2-e_1)^{-n}\sum_{k=0}^{\nu}d_k\left(\frac{e_2-e_1}{R}\right)^k C_k^{\,n}$$

$$T_1(n)=e_2^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\left(\frac{r}{e_2}\right)^k C_{-k}^{\,n},\quad \varepsilon_1=0\quad(\nu\neq1)$$

$$\varepsilon_1=1\ (\nu=1);\quad \varepsilon_2=0\ (\nu\neq2),\quad \varepsilon_2=1\ (\nu=2)$$

Далее преобразуем граничное условие на внешнем контуре. Подставляя (7) в (1), граничное условие на L_3 приведем к виду:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\left(\frac{r}{t}\right)^k+\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k\left(\frac{A}{t-e_2}\right)^k+\sum_{k=1}^{\infty}d_k\left(\frac{t-e_1}{R}\right)^k+\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\left(\frac{r}{\bar t}\right)^k+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k\left(\frac{A}{\bar t-e_2}\right)^k+\sum_{k=1}^{\infty}d_k\left(\frac{R}{t-e_1}\right)^k=e_1^2+R^2+e_1R[(t-e_1)/R+R/(t-e_1)]+C_3 \tag{17}$$

где учтено, что на окружности имеет место равенство $(t-e_1)(\bar t-e_1)=R^2$. Разложим выражения $(r/t)^k$ и $(A/t-e_2)^k$ в степенный ряд по $(t-e_1)$:

$$\left(\frac{r}{t}\right)^k=\left(\frac{r}{t-e_1}\right)^k\left(1+\frac{e_1}{t-e_1}\right)^{-k}=r^k\sum_{\nu=k}^{\infty}{}^{*}e_1^{(\nu-k)/2}C_{-k}^{(\nu-k)/2}(t-e_1)^{-\nu}$$

$$\left(\frac{A}{t-e_2}\right)^k=\left(\frac{A}{t-e_1}\right)^k\left(1+\frac{e_1-e_2}{t-e_1}\right)^{-k}=A^k\sum_{\nu=k}^{\infty}{}^{*}(e_1-e_2)^{(\nu-k)/2}C_{-k}^{(\nu-k)/2}(t-e_1)^{-\nu} \tag{18}$$

Учитывая (17) в (16) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $(t-e_1)$, получаем следующую систему бесконечных линейных алгебраических уравнений:

$$N_1(\nu)+N_2(\nu)+d_kR^{-k}=e_1\varepsilon_1 \tag{19}$$

$$N_1(\nu)=\sum_{k=\nu-2E((\nu-1)/2)}^{\nu}{}^{*}\alpha_kr^k(e_1C_k)^{(\nu-k)/2}R^{2\nu}$$

$$N_2(\nu)=\sum_{k=\nu-2E((\nu-1)/2)}^{\nu}{}^{*}\beta_kA^k[(e_1-e_2)C_{-k}]^{(\nu-k)/2}$$

Таким образом, решение задач кручения рассматриваемого бруса сводится к решению трех систем (11), (15) и (18) бесконечных линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов a_k, b_k и d_k. Для заданных отношений основных размеров сечения из указанных систем удерживаются несколько первых и определяются неизвестные коэффициенты. Далее по формуле (7) определяется искомая регулярная функция $F(z)$, а затем по следующим формулам находятся компоненты касательных напряжений τ_{xz} и τ_{yz} в характерных точках опасного сечения тела:

$$\tau_{xz}-i\tau_{yz}=i\mu\tau[F'(z)-\bar{z}] \tag{20}$$

Если одним из рассмотренных контуров будет правильный многоугольник с двумя прямолинейными разрезами, расположенными вдоль оси абсциссы, то внешность такого контура отображается на внешность единичной окружности в плоскости ξ функцией

$$z=A\xi\sum_{\nu=0}^{\infty}\Pi_\nu\xi^{-\nu},$$

$$\Pi_\nu=\sum_{k=\nu-qE(\nu/q)}^{\nu}{}^{*}\gamma_{k-1}T_{(\nu-k)/q},\quad A={}^1/{}_2(a+b)$$

$$T_n=\sum_{n_1=0}^{n}m^{n_1}\gamma_{-1}^{-qn_1}l_{q(n-n_1)}^{(qn_1)},\quad m=(a+b)/(a+b) \tag{21}$$

где a – радиус окружности, описанной вокруг многоугольника, b – радиус окружности, вписанной в многоугольник, q – число осей симметрии (число сторон). Все величины $l_n^{(k)}$ определяются из условий

$$l_n^{(k)}+\sum_{n_1=1}^{n}l_{n-n_1}^{(k)}g_{n_1}^{(k)}=0,\quad g_n^{(k)}=\sum_{n_1=0}^{n}g_{n_1}^{(1)}g_{n-n_1}^{(k-1)},\quad g_n=\frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_{-1}}$$

Функция, обратная (21), имеет вид

$$\xi=\frac{z}{A}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{A}{z}\right)^{q\nu}E_\nu,\quad E_\nu=\sum_{k=0}^{\nu}a_k^{(1)}H_{\nu-k},\quad H_n=\sum_{n_1=0}^{n}{}^{*}\delta_{n_1-1}\varkappa_{(n-n_1)/q}^{(n_1)} \tag{22}$$

Величины $\varkappa_n^{(k)}$ определяются из следующего условия:

$$\varkappa_n^{(k)}+\sum_{n_1=1}^{n}\varkappa_{n-n_1}^{(k)}a_{n_1}^{(k)}=0,\quad a_n^{(k)}=\sum_{n_1=0}^{n}a_{n_1}^{(1)}a_{n-n_1}^{(k-1)}$$

Для каждого конкретного рассматриваемого контура $a_n^{(1)}$ имеют определенные значения. Например, если рассматривается эллиптический контур, то первые шесть значений $a_n^{(1)}$ есть: $a_0=1$, $a_1=-m$, $a_2=-2m^2$, $a_3=-5m^3$, $a_4=-14m^4$, $a_5=-42m^5$.

Отметим, что формулы (21) и (22) при $m=0$ и $A=r$, как следовало ожидать, полностью совпадают с формулами (3) и (4) соответственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кулиев С. А.* Определение напряжений в скручиваемом брусе кругового кольцевого сечения с двумя разрезами // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 5. С. 187–192.
2. *Кулиев С. А.* Напряженное состояние круговой пластинки, ослабленной центральным квадратным отверстием и двумя разрезами // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 6. С. 184–180.
3. *Шерман Д. И.* К вопросу о кручении эллиптического бруса, продольно ослабленного эллиптической же полостью // Инж. сб. 1959. Т. 25. С. 3–19.
4. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
5. *Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1982. 488 с.

Баку

Поступила в редакцию
14.VI.1988