

УДК 531.383

Г. Ш. ПУРИЧАМИАНШВИЛИ  
К ТЕОРИИ ОДНОГО КЛАССА

НЕВОЗМУЩАЕМЫХ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В [1, 2] получены общие условия невозмущаемости гироскопических систем, согласно которым возможно построение невозмущаемых гиросистем, отличающихся от традиционных тем, что их кинетический момент  $\mathbf{B}$  в абсолютном движении постоянен и отличен от нуля.

В предлагаемой работе рассматриваются гиронавигационные системы ( $\mathbf{B} \neq 0$ ) с чувствительными элементами гирокомпасного типа [3-5] с тремя дополнительными роторами. Внешняя информация поступает от датчиков угла, измерителя угловой скорости, акселерометров. Приведены уравнения идеального функционирования, построены общие уравнения возмущенного движения и их линейные приближения.

**1. Пространственный гирокомпас ( $\mathbf{B} \neq 0$ ). Уравнение идеальной работы.** В [1, 2] исследуется класс невозмущаемых гироскопических систем, кинетический момент которых относительно точки подвеса в абсолютном движении отличен от нуля и представляет собой постоянный по величине и направлению вектор  $\mathbf{B}$  в инерциальном пространстве. Под невозмущаемостью понимается невозмущаемость оси гироскопической системы, проходящей через точку подвеса  $O$  и центр тяжести  $C$ , относительно геоцентрической вертикали, изменяющей свое направление в инерциальном пространстве вследствие движения корабля. Гироскопическую систему будем представлять в виде гиросферы с двумя гироскопами, соединенными пружиной  $AB$  и связанными спарником, который обеспечивает разворот гироскопов вокруг осей их кожухов на равный угол  $\epsilon$  (классическая схема пространственного гироскопического компаса [3]) и тремя роторами с взаимно перпендикулярными осями вращения (фиг. 1). Навигационная система включает также гироскопический измеритель угловой скорости с осью чувствительности, параллельной оси  $z_3$  невозмущаемой системы и специальный датчик, способный непрерывно передавать информацию о значении угла  $\epsilon(t)$ .

С кораблем, совершающим движение по поверхности неподвижной сферы, окружающей Землю, свяжем систему координат  $\xi_1 \xi_2 \xi_3$ , ось  $\xi_3$  которой направлена по внешней нормали сферы (фиг. 2). Местоположение корабля будем определять долготой  $\Lambda$  и широтой  $\varphi$ . Ось  $\xi_1$  предполагается направленной по вектору абсолютной скорости корабля  $\mathbf{V}$  и ее ориентация относительно географического трехгранника  $\eta_i$  определяется азимутом  $\chi$ . Проекция угловой скорости  $\Omega$  осей  $\xi_i$  определяется скоростью корабля:

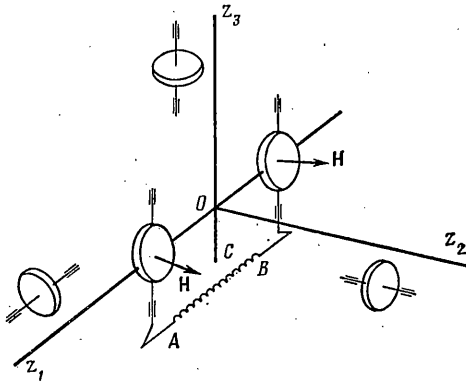
$$\Omega_1 = 0, \quad \Omega_2 = V/R, \quad \Omega_3 = \Omega_3(t) \quad (1.1)$$

Введенные параметры связаны кинематическими уравнениями

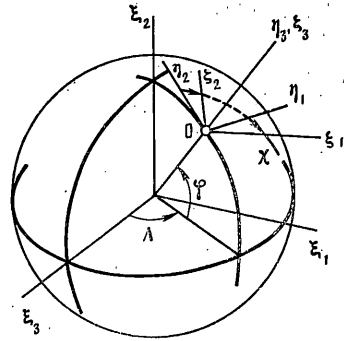
$$\begin{aligned} \Lambda \dot{\phantom{\Lambda}} \cos \varphi &= \Omega_1 \sin \chi + \Omega_2 \cos \chi \\ \dot{\varphi} &= -\Omega_1 \cos \chi + \Omega_2 \sin \chi \\ \dot{\chi} &= \Omega_3 - [\Omega_1 \sin \chi + \Omega_2 \cos \chi] \operatorname{tg} \varphi \end{aligned} \quad (1.2)$$

Проекция кажущегося ускорения  $\mathbf{W}_0 - \mathbf{g}$  на подвижные оси  $\xi_i$  вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} a_1 &= R(\Omega_2 \dot{\phantom{\Omega_2}} + \Omega_1 \Omega_3), \quad a_2 = -R(\Omega_1 \dot{\phantom{\Omega_1}} - \Omega_2 \Omega_3) \\ a_3 &= R(v^2 - \Omega_1^2 - \Omega_2^2), \quad v = (g/R)^{1/2} \end{aligned} \quad (1.3)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Перейдем теперь к изучению движения самой гиросистемы. Пусть система невозмущаема и при произвольном движении корабля оси  $z_i$  повторяют движение осей  $\xi_i$ . Проекции кинетического момента  $\mathbf{K}$  системы на оси  $z_i$  записываются в виде

$$\begin{aligned} K_1 &= I_1 \Omega_1 + h_1, & \Omega_1 &= 0 \\ K_2 &= I_2 \Omega_2 + h_2 + 2H \cos \varepsilon, & K_3 &= I_3 \Omega_3 + h_3 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь  $I_i$  — главные моменты инерции системы относительно осей  $z_i$ ,  $h_i$  — собственные кинетические моменты роторов,  $H$  — собственный кинетический момент каждого из гироскопов. Соответствующим подбором жесткости пружины обеспечивается соотношение [3]:

$$2H \cos \varepsilon = (mlR - I_2) \Omega_2 \quad (1.5)$$

Исходя из условия невозмущаемости [1, 2]:

$$\mathbf{K} = \mathbf{B} - ml \times \mathbf{V} \quad (1.6)$$

Кинетический момент системы должен формироваться в виде

$$\begin{aligned} K_1 &= B \cos \varphi \sin \chi \\ K_2 &= B \cos \varphi \cos \chi + mlR \Omega_2, & K_3 &= B \sin \varphi \end{aligned} \quad (1.7)$$

где  $m$  — масса системы,  $l$  — расстояние между центром масс  $c$  и точкой подвеса  $O$ , вектор  $\mathbf{B}$  считается параллельным оси  $\xi_2$  (см. фиг. 2). Исключая из (1.4), (1.5), (1.7)  $K_i$  определяем закон изменения собственных моментов роторов:

$$\begin{aligned} h_1 &= B \cos \varphi \sin \chi, & h_2 &= B \cos \varphi \cos \chi \\ h_3 &= B \sin \varphi - I_3 \Omega_3 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Значение  $\Omega_3(t)$  определяется показаниями гироскопического измерителя угловой скорости, а величины  $\varphi(t)$  и  $\chi(t)$  вычисляются при помощи кинематических уравнений (1.2), (1.1). Величина  $\Omega_2(t)$  определяется из (1.5), используя показания датчика угла  $\varepsilon(t)$ .

Таким образом, обеспечив равенство (1.5) соответствующим подбором жесткости пружины и регулируя скорость вращения роторов согласно (1.8), будет обеспечена невозмущенность системы. При этом, решается задача навигации корабля. Гироскопическая система указывает на борту корабля положение базового трехгранника  $\xi_1 \xi_2 \xi_3$ ; решение системы кинематических уравнений (1.1), (1.2) позволяет автономно определить долготу  $\Lambda$ , широту  $\varphi$  и угол  $\chi$ , который соответствует истинному курсу корабля.

**2. Уравнения возмущенного движения.** Невозмущенное движение характеризуется тем, что в начальный момент времени выполнено соотношение (1.5) и совпадают ориентация и угловые скорости осей  $z_i$  и  $\xi_i$ . Перейдем к исследованию возмущенного движения, когда указанные на-

начальные условия выполнены неточно. Для описания возмущенного движения введем параметры  $\Lambda', \varphi', \chi', \omega_i, K_i', h_i', A_i, \varepsilon'$  соответствующие параметрам  $\Lambda, \varphi, \chi, \Omega_i, K_i, h_i, a_i, \varepsilon$  невозмущенного движения. Теорема об изменении кинетического момента  $\mathbf{K}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} = \mathbf{l} \times m(\mathbf{g} - \mathbf{W}_0)$  в проекциях на оси  $z_i$  записывается в виде

$$\begin{aligned} K_1'' + \omega_2 K_3' - \omega_3 K_2' &= -m\Lambda A_2 \\ K_2'' + \omega_3 K_1' - \omega_1 K_3' &= m\Lambda A_1 \\ K_3'' + \omega_1 K_2' - \omega_2 K_1' &= M_3 \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $M_3$  — сторонний момент. Здесь предполагается  $M_3 = 0$ .

В возмущенном движении собственные кинетические моменты роторов будем формировать по закону

$$\begin{aligned} h_1' &= B \cos \varphi' \sin \chi', & h_2' &= B \cos \varphi' \cos \chi' \\ h_3' &= B \sin \varphi' - I_3 \omega_3 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Информация об угловой скорости  $\omega_3(t)$  обеспечивается показаниями измерителя угловой скорости; параметры  $\varphi'$  и  $\chi'$  вычисляются в результате решения кинематических уравнений, которые в возмущенном движении, согласно (1.1), (1.2), переписываются в форме:

$$\begin{aligned} \Lambda'' \cos \varphi' &= \omega_2 \cos \chi', & \varphi'' &= \omega_2 \sin \chi' \\ \chi'' &= \omega_3 - \omega_2 \cos \chi' \operatorname{tg} \varphi' \end{aligned} \quad (2.3)$$

Величина угловой скорости  $\omega_2(t)$  определяется аналогично (1.5) из уравнения

$$(m\Lambda R - I_2) \omega_2 = 2H \cos \varepsilon' \quad (2.4)$$

Проекции кинетического момента всей системы на оси  $Z_i$  в возмущенном движении записываются в виде

$$\begin{aligned} K_1' &= I_1 \omega_1 + h_1' \\ K_2' &= -I_2 \omega_2 + h_2' + 2H \cos \varepsilon', & K_3' &= I_3 \omega_3 + h_3' \end{aligned} \quad (2.5)$$

После подстановки (2.2), (2.4), (2.5) в скалярные уравнения (2.1), придем к следующей системе

$$I_1 \omega_1' - m\Lambda R \omega_2 \omega_3 + B[(\cos \varphi' \sin \chi')' + \omega_2 \sin \varphi' - \omega_3 \cos \varphi' \cos \chi'] = -m\Lambda A_2 \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} m\Lambda R \omega_2' + I_1 \omega_2 \omega_3 + B[(\cos \varphi' \cos \chi')' - \omega_1 \sin \varphi' + \omega_3 \cos \varphi' \sin \chi'] &= m\Lambda A_1 \\ (m\Lambda R - I_1) \omega_1 \omega_2 + B[(\sin \varphi')' + \omega_1 \cos \varphi' \cos \chi' - \omega_2 \cos \varphi' \sin \chi'] &= 0 \end{aligned}$$

Исключая в (2.6)  $\varphi''$  и  $\chi''$  посредством кинематических уравнений (2.3), получаем

$$\begin{aligned} I_1 \omega_1' - m\Lambda R \omega_2 \omega_3 &= -m\Lambda A_2 \\ m\Lambda R \omega_2' + (I_1 \omega_3 - B \sin \varphi') \omega_1 &= m\Lambda A_1 \\ [(m\Lambda R - I_1) \omega_2 + B \cos \varphi' \cos \chi'] \omega_1 &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Присоединим к системе (2.7) следующие уравнения

$$\begin{aligned} \Lambda'' \cos \varphi' &= 2H \cos \varepsilon' \cos \chi' / (m\Lambda R - I_2) \\ \varphi'' &= 2H \cos \varepsilon' \sin \chi' / (m\Lambda R - I_2) \\ \chi'' &= \omega_3 - 2H \cos \varepsilon' \cos \chi' \operatorname{tg} \varphi' / (m\Lambda R - I_2) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Совокупность уравнений (2.7), (2.8) представляет собой общие динамические уравнения рассматриваемой невозмущенной гироскопической системы. Несложно убедиться, что при выполнении соответствующих начальных условий оси  $z_i$  повторяют движение осей  $\zeta_i$ , и, соответственно  $\omega_i = \Omega_i$  ( $i=1, 2, 3$ ). Следствием системы (2.7) являются уравнения

$$\omega_2 \omega_3 = A_2 / R, \quad \omega_2' = A_1 / R, \quad \omega_1 = 0 \quad (2.9)$$

которые в точности совпадают с прецессионными уравнениями пространственного гироскопического компаса [3, 4].

Однако другим следствием третьего уравнения (2.7) является равенство

$$(mlR - I_1)\omega_2 + B \cos \varphi' \cos \chi' = 0 \quad (2.10)$$

которое может описывать поведение рассматриваемой гиросистемы лишь при выполнении условия:

$$(mlR - I_1)\Omega_2 + B \cos \varphi \cos \chi = 0 \quad (2.11)$$

При этом, (2.10) и (2.11) должны обращаться в тождество в начальный момент времени; для (2.10) с учетом (2.4) имеем (предполагая  $I_1 = I_2$ ):

$$2H \cos \varepsilon'(0) = -B \cos \varphi'(0) \cos \chi'(0) \quad (2.12)$$

Для исключения решений типа (2.10) введем ограничение конструктивного характера:

$$|B| < |2H \cos \varepsilon'(0)| \quad (2.13)$$

Если предположить выполнение условия (2.13), равенство (2.12) не может быть выполнено и, тем самым, уравнения (2.9) являются единственным следствием системы (2.7), имеющем физический смысл.

**3. Свободные колебания пространственного гироскопа ( $B \neq 0$ ).** Будем задавать движение осей  $z_i$  тремя последовательными поворотами на углы  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  относительно идеальных осей  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$  соответственно. Проекция угловой скорости  $\omega$  гиросистемы на оси  $z_i$  определяются матрицей перехода [1, 2], векторами  $\Omega, \alpha$  и выражаются формулами

$$\begin{aligned} \omega_1 = & (\Omega_1 + \alpha_1) \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 + \alpha_2 \sin \alpha_3 + \Omega_2 (\cos \alpha_1 \sin \alpha_3 + \\ & + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3) + \Omega_3 (\sin \alpha_1 \sin \alpha_3 - \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\omega_2 = -(\Omega_1 + \alpha_1) \cos \alpha_2 \sin \alpha_3 + \Omega_2 (\cos \alpha_1 \cos \alpha_3 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3) + \Omega_3 (\sin \alpha_1 \cos \alpha_3 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3) + \alpha_2 \cos \alpha_3$$

$$\omega_3 = (\Omega_1 + \alpha_1) \sin \alpha_2 - \Omega_2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + \Omega_3 \cos \alpha_1 \cos \alpha_3 + \alpha_3$$

Согласно (1.3), для проекций кажущегося ускорения на оси  $z_1, z_2$  в возмущенном движении имеем

$$A_1 = R(\Omega_2 + \Omega_1 \Omega_3) \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 - R(\Omega_1 - \Omega_2 \Omega_3) (\sin \alpha_3 \cos \alpha_1 + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3) + R(v^2 - \Omega_1^2 - \Omega_2^2) (\sin \alpha_1 \sin \alpha_3 - \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3) \quad (3.2)$$

$$A_2 = -R(\Omega_2 + \Omega_1 \Omega_3) \cos \alpha_2 \sin \alpha_3 - R(\Omega_1 - \Omega_2 \Omega_3) (\cos \alpha_1 \cos \alpha_3 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3) + R(v^2 - \Omega_1^2 - \Omega_2^2) (\sin \alpha_1 \cos \alpha_3 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3)$$

Перепишем соотношения (3.1), (3.2) применительно к рассматриваемой гиросистеме ( $\Omega_i = 0$ ), переходя к линейному приближению

$$\begin{aligned} \omega_1 = & \alpha_1 + \Omega_2 \alpha_3 - \Omega_3 \alpha_2 \\ \omega_2 = & \Omega_2 + \alpha_2 + \Omega_3 \alpha_1, \quad \omega_3 = \Omega_3 + \alpha_3 - \Omega_2 \alpha_1 \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$A_1/R = \Omega_2 + \Omega_2 \Omega_3 \alpha_3 - (v^2 - \Omega_2^2) \alpha_2$$

$$A_2/R = \Omega_2 \Omega_3 - \Omega_2 \alpha_3 + (v^2 - \Omega_2^2) \alpha_1$$

Введем также малый угол  $\delta = \varepsilon' - \varepsilon(t)$ , который согласно (2.4), (1.5) связан с введенными параметрами соотношением

$$2H\delta \sin \varepsilon = -(mlR - I_2) (\alpha_2 + \Omega_3 \alpha_1) \quad (3.4)$$

Подставляя (3.3), (3.4) в уравнения возмущенного движения (2.9) и ограничиваясь членами не выше первого по  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \delta$  порядка малости, получим

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -v & \Omega_3 & 0 \\ v & 0 & 0 & \Omega_3 \\ -\Omega_3 & 0 & 0 & -v \\ 0 & -\Omega_3 & v & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.5)$$

где введены обозначения  $\beta_1 = \Omega_2 \alpha_3 / v$ ,  $\beta_2 = 2H \delta \sin \varepsilon / (mlR - I_2)$  и предполагается  $\Omega_2^2 \ll v^2$ . Уравнения (3.5) исследовались в различных работах [3-6] и были проинтегрированы в замкнутой форме при произвольном движении корабля по поверхности Земли. Точное решение системы (3.5) записывается в виде [4]:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \beta_1^* \cos \theta + \beta_2^* \sin \theta, & \beta_2 &= \beta_2^* \cos \theta - \beta_1^* \sin \theta \\ \alpha_1 &= \alpha_1^* \cos \theta + \alpha_2^* \sin \theta, & \alpha_2 &= \alpha_2^* \cos \theta - \alpha_1^* \sin \theta \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\theta = \int \Omega_3(\tau) d\tau$$

$$\begin{aligned} \beta_1^* &= \beta_1^*(0) \cos vt + \alpha_1^*(0) \sin vt, & \beta_2^* &= \beta_2^*(0) \cos vt + \alpha_2^*(0) \sin vt \\ \alpha_1^* &= \alpha_1^*(0) \cos vt - \beta_1^*(0) \sin vt, & \alpha_2^* &= \alpha_2^*(0) \cos vt - \beta_2^*(0) \sin vt \end{aligned} \quad (3.7)$$

Равенства (3.6), (3.7) определяют погрешность движения невозмущаемой гиросистемы, вызванную неточным заданием начальных условий и позволяют вычислить при помощи (2.8) погрешность кинематических уравнений.

**4. Навигационная система с корректируемым гиригоризонткомпасом ( $B \neq 0$ ).** В рассмотренной выше схеме на борту корабля реализуется идеальный трехгранник ориентированной по вектору абсолютной скорости. Будем теперь полагать, что система координат  $\xi_1 \xi_2 \xi_3$  свободная в азимуте, т. е.  $\Omega_3(t) = 0$ . В этом случае кинематические уравнения (1.2) записываются в форме

$$\begin{aligned} \dot{\Lambda} \cos \varphi &= \Omega_1 \sin \chi + \Omega_2 \cos \chi & (4.1) \\ \dot{\varphi} &= -\Omega_1 \cos \chi + \Omega_2 \sin \chi, \\ \dot{\chi} &= -(\Omega_1 \sin \chi + \Omega_2 \cos \chi) \operatorname{tg} \varphi \end{aligned}$$

Для реализации осей  $\xi_i$  рассмотрим невозмущаемую гироскопическую систему, отличающуюся

от рассмотренной отсутствием связи между гироскопами, обеспечивающей их разворот на равный угол  $\varepsilon$ . Вследствие этого гироскопы могут разворачиваться относительно гиросферы на разные углы  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  (фиг. 3); предполагается наличие датчиков углов  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ .

Применительно к рассматриваемой схеме, уравнения (1.4) принимают вид

$$\begin{aligned} K_1 &= I_1 \Omega_1 + h_1 - H(\sin \varepsilon_1 - \sin \varepsilon_2) \\ K_2 &= I_2 \Omega_2 + h_2 + H(\cos \varepsilon_1 + \cos \varepsilon_2) \\ K_3 &= I_3 \Omega_3 + h_3, \quad \Omega_3 = 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Как и ранее будем управлять скоростью вращения роторов так, чтобы

$$h_1 = B \cos \varphi \sin \chi, \quad h_2 = B \cos \varphi \cos \chi, \quad h_3 = B \sin \varphi \quad (4.3)$$

Согласно условию невозмущаемости (1.6), кинетический момент системы должен меняться по закону

$$K_1 = mlR \Omega_1 + B \cos \varphi \sin \chi \quad (4.4)$$

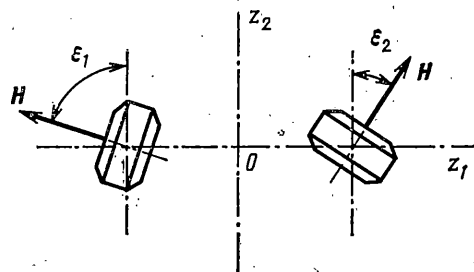
$$K_2 = mlR \Omega_2 + B \cos \varphi \cos \chi, \quad K_3 = B \sin \varphi$$

Сопоставляя (4.2) - (4.4) приходим к равенствам

$$H(\sin \varepsilon_1 - \sin \varepsilon_2) = -(mlR - I_1) \Omega_1 \quad (4.5)$$

$$H(\cos \varepsilon_1 + \cos \varepsilon_2) = (mlR - I_2) \Omega_2$$

удовлетворение которых необходимо для невозмущаемости системы. Автоматное выполнение условий (4.5) обеспечивается путем надлежащего



Фиг. 3

формирования моментов  $M_1$  и  $M_2$  относительно вертикальных осей гироскопов [5]:

$$M_1 = -M_2 = H^2(mlR - I)^{-1} \sin(\varepsilon_1 + \varepsilon_2), \quad I_1 = I_2 = I \quad (4.6)$$

Таким образом, получая информацию от датчиков угла будем прикладывать моменты (4.6), при этом угловые скорости  $\Omega_1, \Omega_2$  определяются соотношениями (4.5), параметры  $\varphi, \chi$  вычисляются из кинематических уравнений (4.1), кинетические моменты роторов регулируются по закону (4.3). Рассматриваемая гиросистема будет совершать невозмущенное движение, если только в начальный момент времени выполнено равенство (4.5) и ориентация и угловые скорости осей  $\zeta_i$  и  $z_i$  совпадают.

В возмущенном движении, когда начальные условия выдержаны неточно, приведенные соотношения записываются в форме:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -H(\sin \varepsilon_1' - \sin \varepsilon_2') / (mlR - I) \\ \omega_2 &= H(\cos \varepsilon_1' + \cos \varepsilon_2') / (mlR - I) \\ \Lambda'' \cos \varphi' &= \omega_1 \sin \chi' + \omega_2 \cos \chi' \\ \varphi'' &= -\omega_1 \cos \chi' + \omega_2 \sin \chi' \\ \chi'' &= -(\omega_1 \sin \chi' + \omega_2 \cos \chi') \operatorname{tg} \varphi' \\ h_1' &= B \cos \varphi' \sin \chi', \quad h_2' = B \cos \varphi' \cos \chi', \quad h_3' = B \sin \varphi' \end{aligned} \quad (4.7)$$

После подстановки выражений для кинетического момента

$$\begin{aligned} K_1' &= mlR \omega_1 + B \cos \varphi' \sin \chi' \\ K_2' &= mlR \omega_2 + B \cos \varphi' \cos \chi', \quad K_3' = I_3 \omega_3 + B \sin \varphi' \end{aligned} \quad (4.8)$$

в уравнения движения (2.1) получим

$$\begin{aligned} mlR \omega_1'' + B[(\cos \varphi' \sin \chi')'' + \omega_2 \sin \varphi'] &= -mlA_2 \\ mlR \omega_2'' + B[(\cos \varphi' \cos \chi')'' - \omega_1 \sin \varphi'] &= mlA_1, \quad \omega_3 = 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Здесь будем считать, что момент  $M_3$  формируется так, что  $\omega_3 = 0$ . Для этого и требуется измеритель угловой скорости  $\omega_3$ .

Система (4.9) допускает упрощение и с учетом (4.7) приводится к виду

$$\omega_1'' = -A_2/R, \quad \omega_2'' = A_1/R, \quad \omega_3 = 0 \quad (4.10)$$

Считая в (4.10), (3.1), (3.2) малыми величинами углы  $\alpha_i$ , угловые скорости  $\alpha_i', \Omega_i$  и пренебрегая их произведениями, приходим к уравнениям

$$\alpha_1'' + v^2 \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2'' + v^2 \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 0 \quad (4.11)$$

которые характерны для невозмущаемых гироскопических систем, у которых  $\mathbf{B} = 0$  [2]. Нетрудно проверить, что системы (4.10), (4.11) имеют частное решение  $\alpha_1(t) = \alpha_2(t) = \alpha_3(t) = 0$ , что подтверждает невозмущаемость гиросистемы.

**5. Система навигации с ньютометрами.** Альтернативой датчика угла при решении кинематических уравнений (4.1) могут служить ньютометры (измерители кажущихся ускорений) с осями чувствительности, параллельными осями  $Z_1, Z_2$ . В невозмущенном движении показания ньютометров определяются соотношениями

$$\Omega_1 = -\frac{1}{R} \int_0^t a_2 d\tau + \Omega_1(0), \quad \Omega_2 = \frac{1}{R} \int_0^t a_1 d\tau + \Omega_2(0) \quad (5.1)$$

и, в соответствии с (4.1), (5.1) в возмущенном движении имеем

$$\Omega_1' = -\frac{1}{R} \int_0^t A_2 d\tau + \Omega_1(0), \quad \Omega_2' = \frac{1}{R} \int_0^t A_1 d\tau + \Omega_2(0) \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \Lambda'' \cos \varphi' &= \Omega_1' \sin \chi' + \Omega_2' \cos \chi' \\ \varphi'' &= -\Omega_1' \cos \chi' + \Omega_2' \sin \chi' \\ \chi'' &= -(\Omega_1' \sin \chi' + \Omega_2' \cos \chi') \operatorname{tg} \varphi' \end{aligned}$$

Уравнения движения, как и ранее, записываются в виде (4.9) и с учетом (5.2) приводятся к виду

$$\begin{aligned} mlR(\omega_1 - \Omega_1') + B \sin \varphi'(\omega_2 - \Omega_2') &= 0 \\ mlR(\omega_2 - \Omega_2') - B \sin \varphi'(\omega_1 - \Omega_1') &= 0, \quad \omega_3 = 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Совокупность уравнений (5.3), (5.2) представляют собой общие уравнения возмущенного движения невозмущаемой гиросистемы, для которой источником внешней информации служат ньютонометры. Эти уравнения аналогичны уравнениям, полученным ранее в [1, 2].

Система (5.3) допускает упрощение

$$\omega_1 - \Omega_1' = C \cos \psi', \quad \omega_2 - \Omega_2' = C \sin \psi', \quad \omega_3 = 0 \quad (5.4)$$

$$\psi'(t) = \int_0^t \frac{B \sin \varphi'(\tau)}{m\epsilon R} d\tau + \psi(0), \quad \operatorname{tg} \psi(0) = \frac{\omega_2(0) - \Omega_2(0)}{\omega_1(0) - \Omega_1(0)} \quad (5.5)$$

$$C^2 = [\omega_1(0) - \Omega_1(0)]^2 + [\omega_2(0) - \Omega_2(0)]^2$$

При  $B=0$  уравнения (5.4), (5.5) совпадают с уравнениями возмущенного движения (4.10). Соответственно, соотношения (5.2), (5.4) отделяются, что упрощает их исследование.

Как обычно, перейдем в (3.1), (3.2), (5.3), (5.4) к линейному приближению в предположении о малости углов  $\alpha_i$ , угловых скоростей  $\alpha_i'$ ,  $\Omega_i$  и близости углов  $\varphi'$  и  $\varphi$ . По аналогии с (4.10), (4.11) получим

$$\begin{aligned} \alpha_1'' + \nu^2 \int_0^t \alpha_1 d\tau &= C \cos \psi(t), \quad \alpha_2'' + \nu^2 \int_0^t \alpha_2 d\tau = C \sin \psi(t) \\ \alpha_3'' + \Omega_1 \alpha_2 - \Omega_2 \alpha_1 &= 0, \quad \psi(t) = \int_0^t \frac{B \sin \varphi(\tau)}{m\epsilon R} d\tau + \psi(0). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Угол  $\rho(t)$  определяется законом движения корабля и при решении уравнений (5.6) считается известной функцией времени. Общее решение системы записывается в виде

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= \alpha_1(0) \cos \nu t + C \int_0^t \cos \nu(t-\tau) \cos \psi(\tau) d\tau \\ \alpha_2(t) &= \alpha_2(0) \cos \nu t + C \int_0^t \cos \nu(t-\tau) \sin \psi(\tau) d\tau \\ \alpha_3(t) &= \int_0^t [\alpha_1(\tau) \Omega_1(\tau) + \alpha_2(\tau) \Omega_2(\tau)] d\tau + \alpha_3(0) \\ \alpha_1'(0) &= C \cos \psi(0), \quad \alpha_2'(0) = C \sin \psi(0) \end{aligned} \quad (5.7)$$

В появлении дополнительных членов в (5.7) заключается существенное отличие системы навигации с ньютонометрами от приведенных выше.

Для полного решения задачи навигации в рассмотренных системах необходимо исследовать погрешности кинематических уравнений инерциальной навигации (2.8), (4.2), (5.2); этот вопрос достаточно подробно изучен в [2].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Климов Д. М.* Механика невозмущаемых гироскопических систем // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 4. С. 57-65.
2. *Климов Д. М.* Инерциальная навигация на море. М.: Наука, 1984. 116 с.
3. *Ишлинский А. Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 670 с.
4. *Жбанов Ю. К., Ишлинский А. Ю.* Динамика пространственного компаса // Современные проблемы теоретической и прикладной механики. Киев: Наук. думка, 1976. С. 53-74.
5. *Кошляков В. Н.* Теория гироскопических компасов. М.: Наука, 1972. 344 с.
6. *Кошляков В. Н.* Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов. М.: Наука, 1985. 286 с.

Москва

Поступила в редакцию  
21.X.1988