

УДК 533.6.013.42

Л. И. СЛЕПЯН, С. В. СОРОКИН

МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ГИДРОУПРУГОСТИ

Представлена формулировка метода граничных интегральных уравнений для анализа гидроупругих колебаний тонкостенных конструкций. Для линейной задачи при монохроматическом возбуждении выведено разрешающее граничное интегральное уравнение второго рода относительно амплитуды давления на контактной поверхности. Решение этого уравнения иллюстрировано численными примерами, один из которых — колебания конечной оболочки вращения, погруженной в сжимаемую жидкость. Выведены нелинейные интегральные уравнения при учете скоростного напора и проведена их линеаризация для задачи о конструкции в потоке. Обсуждены возможные пути численного решения этих уравнений.

1. Введение. Задачи о колебаниях тонкостенных упругих конструкций в жидкости, для решения которых нельзя использовать интегральные преобразования, исследуются, например, с помощью асимптотического анализа [1—4], разложением искомых функций в ряды по формам свободных колебаний в вакууме [5], методом конечных элементов [6]. Обзор полученных таким образом результатов представлен в [7]. Метод граничных интегральных уравнений (ГИУ) непосредственно применим для определения поля давления при заданном движении излучающей поверхности [8—10]. Ниже он распространяется на тот случай, когда движение конструкции, взаимодействующей с жидкостью, заранее неизвестно.

Корректную с точки зрения вычислений формулировку задачи гидроупругости облегчает определенная асимметрия связи между давлением и нормальной скоростью на контактной границе для жидкости и упругого тела. А именно, пригодными для вычислений являются зависимости давления от скорости в граничном интегральном уравнении для жидкости и скорости от давления — для конструкции. Вводя последнее соотношение в граничное интегральное уравнение динамики жидкости, приходим к интегральному уравнению второго рода относительно амплитуды давления на контактной поверхности — граничному интегральному уравнению динамики жидкости со «структурной» границей. Эффективность такого подхода иллюстрируется ниже несколькими типичными примерами, один из которых — колебания конечной оболочки вращения, погруженной в сжимаемую жидкость.

В некоторых случаях следует предпочесть альтернативный путь, основанный на построении фундаментальных решений как для конструкции, так и для динамики жидкости в области с заданной границей (последнее строится как решение граничного интегрального уравнения). Это дает возможность ввести зависимость давления от нормальной скорости конструкции через действующее на нее давление. Такой путь позволяет, в частности, свести задачу к разрешающему интегральному уравнению и при учете скоростного напора в выражении для давления, т. е. в том случае (также рассматриваемом в данной статье), когда задача в целом нелинейна.

2. Стационарная линейная задача. Граничное интегральное уравнение колебаний сжимаемой жидкости имеет вид [8, 9]:

$$(1-C)p(X) + \int_S [F(X, Y)p(Y) - i\rho\omega G(X, Y)u(Y)] dS_Y = 0 \quad (X, Y \in S) \quad (1)$$

Здесь интеграл понимается в смысле главного значения, зависимость от времени принята в виде $\exp(-i\omega t)$ и временной множитель опущен, p — контактное давление, ω — частота колебаний, ρ — плотность жидкости, X и Y — координаты «точки наблюдения» и «источника», S — граница области V , заполненной жидкостью (область V может быть и полуограниченной), u — нормальная к S составляющая скорости частиц жидкости. Функция $G(X, Y)$ представляет собой фундаментальное решение уравнения Гельмгольца — потенциал, отвечающий источнику единичной интенсивности в жидкости, $i\rho\omega G(X, Y)$ — соответствующее ему давление, $F(X, Y)$ — производная G по нормали к S в точке Y . Там, где существует касательная к S поверхность, $C=1/2$. В угловых точках и точках, принадлежащих угловым линиям, значение C ($0 < C < 1$) определяется телесным углом [8, 9].

Пусть колебания упругой конструкции (оболочки), находящейся в контакте с жидкостью на поверхности S , описываются уравнением

$$Lw(X) = Q(X) \quad (2)$$

где $w(X)$ — вектор перемещения, $Q(X)$ — внешняя нагрузка, нормальная составляющая которой содержит в качестве слагаемого контактное давление p , L — линейный дифференциальный оператор.

Естественным и корректным развитием метода ГИУ на случай, когда на S задано условие (2), которое можно назвать структурным, является использование обратной к (2) зависимости — матрицы Грина $W_{mn}^0(X, Y)$ задачи (2) для упругой конструкции в вакууме.

Пусть $w_3(X)$ — нормальная компонента искомой формы колебаний на поверхности S в жидкости, а $W_{m3}^0(X, Z)$ — соответствующие компоненты матрицы Грина. Тогда

$$w_3(X) = \int_S [W_{m3}^0(X, Z) q_m(Z) + W_{33}^0(X, Z) p(Z)] dS_Z \quad (3)$$

Здесь $q_m(Z)$ — компоненты внешнего силового воздействия на оболочку, не связанные с наличием жидкости и являющиеся источником колебаний, $p(Z)$ — контактное акустическое давление на поверхности S , вызванное колебаниями. Поскольку исследуются стационарные колебания, имеем

$$u(Z) = -i\omega w_3(Z) \quad (4)$$

Учитывая (3), (4), уравнение (1) можно записать в виде

$$(1-C)p(X) + \int_S [F(X, Y) - \\ - \rho\omega^2 \Phi_3(X, Y)] p(Y) dS_Y = \rho\omega^2 \int_S q_m(Y) \Phi_m(X, Y) dS_Y \quad (5)$$

$$\Phi_m(X, Y) = \int_S G(X, Z) W_{m3}^0(Y, Z) dS_Z \quad (6)$$

Таким образом, структурное граничное условие (2) изменяет вид уравнения (1), превращая его в интегральное уравнение второго рода относительно давления на поверхности S . Ядро этого уравнения содержит функцию $\Phi_3(X, Y)$, представляющую собой свертку фундаментальных решений задач о вынужденных колебаниях изолированной конструкции и жидкости. Уравнение (5), вообще говоря, решается численно, после чего по (3) определяется форма колебаний конструкции в жидкости.

Реализация указанной процедуры может препятствовать неразрешимость уравнения (2), когда при частоте ω для конструкции в вакууме в отсутствие диссипации наступает резонанс. Устранить это препятствие можно, изменив массу или жесткость конструкции, а затем, при решении уравнения (5) компенсировав указанное изменение введением соответст-

вующей внешней силы. Введем, например, чтобы уйти от резонанса, сосредоточенную массу $\mu\delta(X-X_0)$, перемещающуюся вместе с конструкцией по нормали к S и не взаимодействующую с ней в тангенциальных направлениях, а в (5) заменим $q_3(X)$ на $q_3(X) - \mu\omega^2 w_3(X_0)\delta(X-X_0)$. Тогда в правой части (5) появится дополнительное слагаемое $-\mu\omega^2 w_3(X_0) \times \Phi_3(X, X_0)$ и решение этого уравнения будет иметь вид

$$p(X) = p_1(X) + p_2(X) w_3(X_0)$$

где функции $p_{1,2}$ от $w_3(X_0)$ не зависят. Подставляя это выражение в (3) и полагая $X=X_0$, находим $w_3(X)$, чем и определяются все искомые величины.

В общем случае на некоторой части S_1 поверхности S уравнение (2) может выражать импедансное условие вида $u(X) = B(X)p(X)$, где случаю $B=\infty$ соответствует свободная поверхность, а $B=0$ — абсолютно жесткий экран. Тогда для $Z \in S_1$ в матрице Грина остается одна компонента $W_{33}^0(X, Z) = -iB(X)\delta(X-Z)/\omega$ и уравнение (5) принимает вид

$$\begin{aligned} (1-C)p(X) + \int_{S_1} [F(X, Y)p(Y) - i\rho\omega G(X, Y)u(Y)] dS_Y + \\ + \int_{S_2} [F(X, Y) - \rho\omega^2 \Phi_3(X, Y)] p(Y) dS_Y = \\ = \rho\omega^2 \int_{S_1} q_m(Y) \Phi_m(X, Y) dS_Y \quad (S_2 = S \setminus S_1) \end{aligned} \quad (7)$$

Функции $\Phi_m(X, Y)$ определяются свертками (6) на S_2 . Как видно, первые два слагаемых в левой части (7) те же, что и в (1). Заметим, что в случае нестационарной задачи указанная выше схема сведения задачи к уравнению типа (6), (7) сохраняется, но вместо фундаментального решения (G, F) используется его нестационарный аналог (G^0, F^0) , отвечающий импульсному источнику, а произведения функций в написанных выше соотношениях заменяются свертками по времени.

3. Расчет конкретной конструкции. В качестве основного примера рассмотрим вынужденные колебания погруженной в безграничную жидкость оболочки вращения с плоскими абсолютно жесткими неподвижными переборками. Боковая поверхность оболочки порождена вращением отрезка кривой $r=R(x)$ вокруг оси x на участке $(0, l)$. На фиг. 1 показаны направление внешней по отношению к жидкости нормали к поверхности оболочки и положительные направления отсчета перемещений выбранного варианта теории оболочек.

Пусть колебания возбуждаются распределенным по боковой поверхности нормальным давлением с амплитудой $q_3=q(x, \theta)$. Уравнение вынужденных колебаний оболочки имеет вид

$$L_{mk}(w_k) + \rho_0 h \omega^2 w_m = -\delta_{3m}(q - p) \quad (m, k=1, 2, 3) \quad (8)$$

где ρ_0 — плотность материала оболочки, h — ее толщина, L_{mk} — дифференциальные операторы общей линейной теории оболочек, явное выражение которых представлено в [11, 12]. Уравнение (8) дополняется граничными условиями, которые в рассматриваемом случае следующие

$$w_1 = w_2 = w_3 = \partial w_3 / \partial x = 0 \quad (x=0; l) \quad (9)$$

В терминах, введенных в п. 2, граница S_1 представляет собой торцевые переборки, где $u=0$, а S_2 — боковую поверхность оболочки. Фундаментальное решение уравнения Гельмгольца для безграничной жидкости имеет вид

$$\begin{aligned} G(X, Y) &= (4\pi A)^{-1} \exp(i\omega A/c) \\ A &= |X - Y| = [(x - \xi)^2 + r^2 + \eta^2 - 2r\eta \cos(\theta_1 - \theta_2)]^{1/2} \end{aligned} \quad (10)$$

где c — скорость звука в жидкости, $X(x, r, \theta_1)$, $Y(\xi, \eta, \theta_2)$ — координаты «точки наблюдения» и «источника» в цилиндрической системе координат.

Возьмем внешнюю нагрузку в виде $q_3 = q_n(x) \cos n\theta$. В этом случае все искомые функции будут пропорциональны соответствующим тригонометрическим функциям угла θ и для каждой n — волновой в окружном направлении формы колебаний из (7) получается уравнение

$$\begin{aligned}
 & 4\pi(1-C)p(x, r) + \int_0^{R(0)} p(0, \eta) \int_0^\pi x(1-i\omega A/c)D d\theta \eta d\eta + \\
 & + \int_0^l p(\xi, R(\xi)) \int_0^\pi [R'(\xi)(x-\xi) + R(\xi) - R(x)\cos\theta] \times \\
 & \times (1-i\omega A/c)D d\theta R(\xi) d\xi - \int_0^{R(l)} p(l, \eta) \int_0^\pi (x-l)(1-i\omega A/c) \times \\
 & \times D d\theta \eta d\eta + \rho\omega^2 \int_0^l p(z, R(z)) \int_0^\pi W_{33}^0(z, \xi) \left(\int_0^\pi A^2 D d\theta \right) \times \\
 & \times [1+R'(\xi)^2]^{1/2} d\xi [1+R'(z)^2]^{1/2} dz = \\
 & = \rho\omega^2 \int_0^l w_3^q(\xi) \left(\int_0^\pi A^2 D d\theta \right) R(\xi) [1+R'(\xi)^2]^{1/2} d\xi \\
 & D = A^{-3} \cos n\theta \exp(i\omega A/c) \\
 & w_3^q(x) = \int_0^l q_n(\xi) W_{33}^0(x, \xi) [1+R'(\xi)^2]^{1/2} d\xi
 \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь индекс n для краткости опущен, $W_{33}^0(x, \xi)$ — функция Грина задачи (8), (9), $w_3^q(x)$ — форма колебаний оболочки в вакууме при действии нагрузки $q_n(x) \cos n\theta$ (без суммирования по n). Эффект гидроупругости учитывается в уравнении (11) последним слагаемым в левой части. (В традиционной акустической постановке задачи это слагаемое отсутствует — давление определяют исходя из форм колебаний, заданной «вакуумным» решением).

При численном решении уравнений (11) и последующем построении формы колебаний оболочки в жидкости по (3) фундаментальные функции $W_{m3}^0(x, \xi)$ ($m=1, 2, 3$) строились методом ортогональной прогонки. В случае цилиндрической оболочки возможно, конечно, и аналитическое определение функции Грина. Численная процедура использовалась для отработки алгоритма, пригодного и для более общего случая. Для этого образующая оболочка разбивалась на N_1 участков, границами которых являлись точки ортогонализации. Последовательно к каждому участку прикладывалась сила единичной амплитуды и определялись амплитуды перемещений и других параметров изгиба. Сила моделировалась нагрузкой интенсивностью $1/H$, приложенной на выбранном участке длиной $H=l/N_1$. Радиальная координата на переборках разбивалась на N_2 участков длиной R/N_2 .

В соответствии с этой разбивкой основными неизвестными являются значение амплитуд акустического давления p_m , которые при расчете полагались постоянными на каждом участке.

Функция D имеет особенность при $x=\xi$. Интеграл от этой функции по участку, содержащему особенность, вычислялся в смысле главного значения по формуле Гаусса с 10 узлами. Если участок не содержит особенности, применялась эта же квадратурная формула. Специально проведен-

ное численное исследование показало, что для используемых разбиений ($50 < N_1 < 80$, $10 < N_2 < 20$) погрешность вычисления интегралов по сравнению с применением формулы Гаусса с 12 узлами и с двойной точностью составляет около 0,5%. После интегрирования из уравнений (11) получается следующая система линейных алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами — уравнений, соответствующих методу граничных элементов, но для структурной границы:

$$\begin{aligned}
 & p_k + \sum_{m=1}^{N_2} a_{mk} p_m + \sum_{m=N_2+1}^{N_1+N_2} \left[b_{mk} + H \Omega^2 \rho \rho_0^{-1} (1-\nu^2)^{-1} \sum_{j=1}^{N_1} g_{kj} w_{3mj}^0 \right] p_m + \\
 & + \sum_{m=N_1+N_2+1}^{2N_2+N_1} d_{mk} p_m = \Omega^2 \rho \rho_0^{-1} (1-\nu^2)^{-1} \sum_{j=1}^{N_1} g_{kj} w_{3j}^q \quad (k=1, \dots, (2N_2+N_1)) \\
 & \Omega^2 = (1-\nu^2) \rho_0 \omega^2 l^2 E^{-1} \\
 & a_{mk} = (2\pi)^{-1} \int_{\eta_{m-1}}^{\eta_m} \left(\int_0^\pi x (1-i\omega A/c) D d\theta \right) \eta d\eta \\
 & b_{mk} = (2\pi)^{-1} \int_{\xi_{m-1}}^{\xi_m} \left(\int_0^\pi [R'(\xi) (x-\xi) + R(\xi) - \right. \\
 & \quad \left. - R(x) \cos \theta] (1-i\omega A/c) D d\theta \right) R(\xi) d\xi \\
 & d_{mk} = -(2\pi)^{-1} \int_{\eta_{m-1}}^{\eta_m} \left(\int_0^\pi (x-l) (1-i\omega A/c) D d\theta \right) \eta d\eta \\
 & g_{kj} = (2\pi)^{-1} \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} \left(\int_0^\pi A^2 D d\theta \right) [1+R'(\xi)^2]^{1/2} d\xi
 \end{aligned} \tag{12}$$

Значения $k=1, \dots, N_2$ и $k=N_1+N_2+1, \dots, 2N_2+N_1$ соответствуют реборкам, а $k=N_2+1, \dots, N_2+N_1$ боковой поверхности оболочки.

Заметим, что описанная здесь схема решения задачи основана на построении функции Грина $W_{mn}^0(X, Y)$ оболочки конечной длины. Возможен, однако, другой путь, состоящий в дополнении граничного интегрального уравнения для жидкости (11) граничным интегральным уравнением для оболочки, имеющим меньшую размерность. Ядром этого интегрального уравнения является функция Грина для бесконечной оболочки $W_{mn}^{00}(X, -Y)$, зависящая лишь от одного аргумента. Последнее обстоятельство позволяет существенно повысить эффективность алгоритма.

4. Тестовые задачи. Для проверки алгоритма и программы были численно проанализированы два предельных случая, для которых легко найти аналитическое решение: колебания бесконечной цилиндрической оболочки при синусоидальной и равномерно распределенной по x внешних нагрузках.

В первом случае рассматривались осесимметричные колебания при нагрузке $q(x) = q_0 \sin \pi R x / l$. Точное решение для амплитуды колебаний в жидкости имеет вид [7, 13] (α — коэффициент присоединенной массы)

$$\begin{aligned}
 w_q / R = & q_0 (1-\nu^2) R E^{-1} h^{-1} [1/12 (h R^{-1})^2 (\pi R l^{-1})^4 + \\
 & + 1 - \rho_0 \omega^2 (1-\nu^2) R^2 E^{-1} (1 + \alpha R h^{-1} \rho \rho_0^{-1})]^{-1}
 \end{aligned} \tag{13}$$

Это решение получено при описании колебаний оболочки уравнением колебаний балки на сплошном упругом основании. Фундаментальное решение задачи о колебаниях такой оболочки в вакууме под действием гармонической сосредоточенной силы получается аналитически. Его вид

определяется знаком величины $1 - \rho_0 \omega^2 (1 - \nu^2) R^2 E^{-1}$. В рассматриваемом ниже случае низкочастотных колебаний эта величина положительна, и

$$W_{33}^0(x, \xi) = D_1^{-1} (2c_1)^{-1/2} \exp[-|x - \xi| \sqrt{c_1/2}] \times \\ \times [\cos(|x - \xi| \sqrt{c_1/2}) + \sin(|x - \xi| \sqrt{c_1/2})] \\ D_1 = E h^3 (1 - \nu^2)^{-1} R^{-3} \\ c_1 = \{12 R^2 h^{-2} [1 - \rho_0 \omega^2 (1 - \nu^2) R^2 E^{-1}]\}^{1/2}$$

Таким образом проверялось вычисление коэффициентов a_{mk} , b_{mk} , d_{mk} в (12), т. е. акустическая часть программы. Граница S_1 в рассматриваемом случае отсутствует, а S_2 — бесконечна, поэтому решение (12) проводилось на некотором выделенном на поверхности оболочки участке без учета влияния отброшенных частей. Длина участка равнялась нескольким длинам полуволн возбуждающей колебания нагрузки. Значение амплитуды колебаний посередине выделенного участка сравнивалось с результатом вычислений по соотношениям (13).

Численный анализ был проведен для оболочки с параметрами: $\nu = 0,3$; $l = R$; $R/h = 100$. Принималось также $c/c_0 = 0,307$, $c_0 = (E/\rho_0)^{1/2}$, $\rho/\rho_0 = 0,128$. При $\omega R/c = 1$ ($\rho_0 \omega^2 (1 - \nu^2) R^2 E^{-1} = 0,0857$) точное решение дает отсутствие излучения ($\omega/c < \pi/l$) и коэффициент присоединенной массы в (13) оказывается вещественным: $\alpha = 0,34$. По (13) безразмерная амплитуда колебаний $w = (w_0 E/Rq) \times 10^{-2} = 1,36$ (прямая 1 на фиг. 2, а). Кривой 2 на фиг. 2, а представлена зависимость действительной части амплитуды колебаний посередине выделенного участка оболочки в зависимости от его длины, измеренной числом полуволн M внешней нагрузки. Видно, что при $M = 7$ решения практически совпали. Численное решение строится на основе использования функции G (10), содержащей действительную и мнимую части при любом ω . Аналитическое решение определяет в рассмотренном случае вещественную амплитуду колебаний. На фиг. 2, б представлена полученная численно зависимость мнимой части амплитуды посередине рассматриваемого участка от его длины. Видно, что при увеличении длины и приближении вещественной части к аналитическому решению мнимая часть приближается к нулю.

Фундаментальное решение для оболочки в случае высокочастотных колебаний ($\rho_0 \omega^2 (1 - \nu^2) R^2 E^{-1} > 1$) содержит распространяющиеся волны и излагаемый способ, основанный на пренебрежении давлением на удаленных частях оболочки (вне расчетной области), оказывается неэффективным.

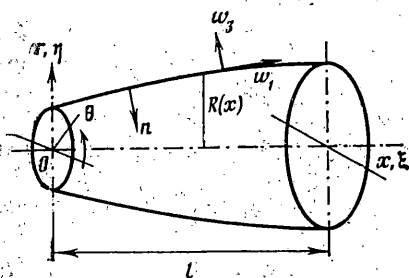
Другим тестом явился анализ вынужденных колебаний с большим числом окружных волн для цилиндрической оболочки средней длины, опертой на абсолютно жесткие неподвижные переборки. В этом случае амплитуда колебаний оболочки посередине пролета с достаточной точностью может быть определена из решения плоской задачи. Уравнения движения были получены из уравнений теории оболочек (8) пренебрежением всеми производными по продольной координате x и отбрасыванием продольного перемещения w_1 . Аналогично упрощена задача о движении жидкости. Формула для амплитуды колебаний оболочки в жидкости при их возбуждении поперечной нагрузкой $q = q_n \cos n\theta$ имеет вид

$$w_q = q_0 (1 - \nu^2) E^{-1} h^{-1} [(n/R^2 + h^2 n^3 / (12 R^4))^2 (\Omega^2 - n^2/R^2)^{-1} + \\ + h^2 n^3 / (12 R^4) + R^{-2} - \Omega^2 (1 + \rho R \alpha / \rho_0 h)]^{-1} \quad (14)$$

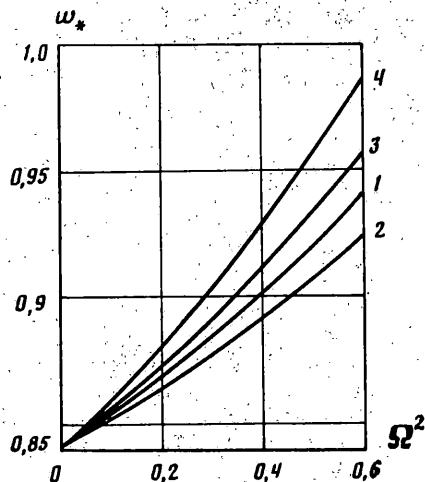
$$\alpha = [n - \omega l c^{-1} H_{n+1}^{(1)}(\omega l R c^{-1}) / H_n^{(1)}(\omega l R c^{-1})]^{-1}$$

где $H_n^{(1)}$ — функция Ханкеля первого рода, R , h и w_q отнесены к длине оболочки l . Коэффициент присоединенной массы в аналогичном виде представлен, например, в [14].

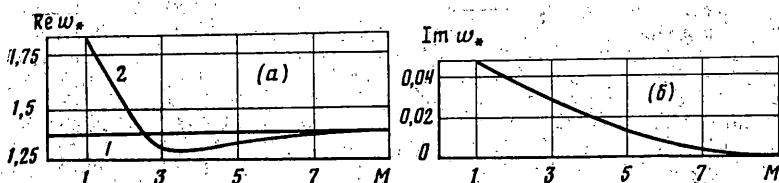
Численный анализ проводился для оболочки с параметрами $R = 0,4$; $h = 0,015$; $\nu = 0,3$. Как и в предыдущем случае, $c/c_0 = 0,307$, $\rho/\rho_0 = 0,128$. Принималось $n = 10$. Этот тест позволил проверить как решение акустической части задачи, связанной с вычислением коэффициентов a_{mk} , b_{mk} , d_{mk} в (12), так и построение базисных функций и формы колебаний в вакууме методом ортогональной прогонки. Значения безразмерной амплитуды колебаний оболочки в вакууме $w = 10^{-1} w E / l q_0$, полученные с помощью численной процедуры и по формуле (14) при $\alpha = 0$, представлены на фиг. 3 кривыми 1 и 2 соответственно. Кривая 3 — график зависимости вещественной амплитуды колебаний в жидкости от Ω^2 по (14), а кривая 4 — та же зависимость, но полу-



Фиг. 1



Фиг. 3



Фиг. 2

ченная численно. Видно, что в данном случае учет пространственности движения жидкости не приводит к заметному изменению максимальной амплитуды прогиба по сравнению с плоской постановкой задачи. На фиг. 4, а для этой же оболочки при $\Omega^2=0.4$ построена действительная часть амплитуды колебаний оболочки в жидкости, а на фиг. 4, б — распределение акустического давления по переборке и боковой поверхности оболочки (действительной части соответствует кривая 1, мнимой — кривая 2). Расчет выполнялся при $N_1=50$, $N_2=10$.

5. Плоская задача. Еще одним примером применения предлагаемого варианта метода граничных интегральных уравнений для структурных граничных условий служит решение задачи о колебаниях сжатой балки — полосы в бесконечном жестком экране (фиг. 5). Уравнение движения имеет вид

$$D_2 w^{IV}(x) - \rho_0 h \omega^2 w(x) = q(x) + p(x) \quad (15)$$

где D_2 — цилиндрическая жесткость. В качестве граничных примем условия свободного опирания

$$w = w'' = 0 \quad (x = \pm l/2) \quad (16)$$

Фундаментальное решение уравнения Гельмгольца для плоской задачи имеет вид

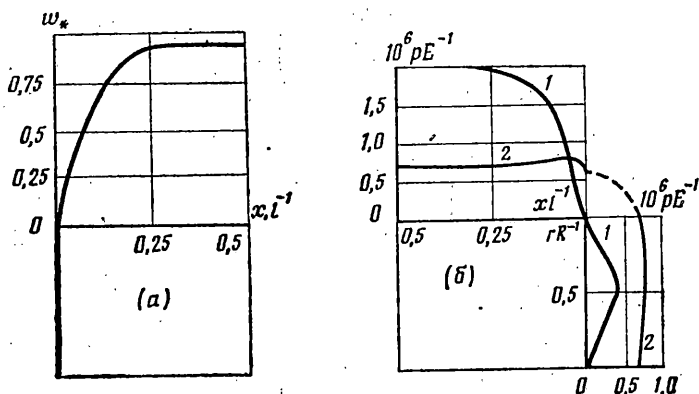
$$G(X, Y) = \frac{1}{4} i H_0^{(1)}(\omega c^{-1}[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{1/2}) \quad (17)$$

Уравнение (7) в данном случае существенно упрощается

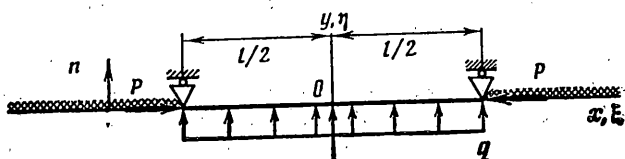
$$\begin{aligned} \frac{1}{2} p(x) - \frac{1}{4} i \rho \omega^2 \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-l/2}^{l/2} p(\xi) H_0^{(1)}(\omega |z-\xi| c^{-1}) W^0(x, z) dz d\xi = \\ = \frac{1}{4} i \rho \omega^2 \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-l/2}^{l/2} q(\xi) H_0^{(1)}(\omega |z-\xi| c^{-1}) W^0(x, z) dz d\xi \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь $W^0(x, z)$ — функция Грина задачи (15), (16). В рассматриваемом простейшем случае справедлива формула Гюйгенса [15]:

$$p(x, y) = \frac{1}{2} i \rho \omega^2 \int_{-l/2}^{l/2} w(\xi) H_0^{(1)}(\omega c^{-1}[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{1/2}) d\xi \quad (19)$$



Фиг. 4



Фиг. 5

и в результате подстановки (19) в (3) интегральное уравнение может быть записано непосредственно относительно формы колебаний балки в жидкости. Это уравнение в безразмерной форме ($l=1$) имеет вид

$$w(x) - \frac{1}{2} \rho \rho_0^{-1} \Omega_1^2 h^{-1} \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} w(\xi) H_0^{(1)}(\omega | z - \xi | c^{-1}) W^0(x, z) dz d\xi = \int_{-1/2}^{1/2} q(\xi) W^0(x, \xi) d\xi, \quad \Omega_1^2 = \rho_0 \omega^2 h l^4 D_2^{-1} \quad (20)$$

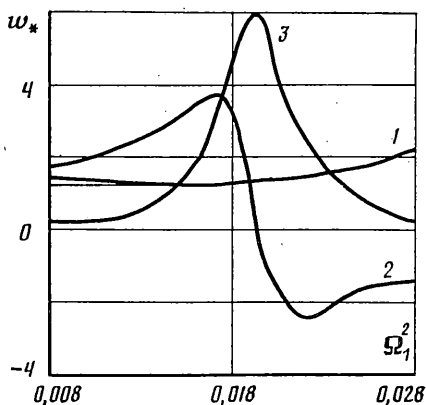
По существу этот результат отвечает второму из описанных во введении формулировок задачи гидроупругости. Алгоритм решения уравнения (20) и построение функции Грина колебаний балки в вакууме аналогичны изложенным в п. 3.

В качестве численного примера приведем результаты расчета вынужденных колебаний в жидкости балки — полоски с параметрами $h=0,01$, $c/c_0=0,302$, $\rho/\rho_0=0,128$. Этот пример другим методом исследовался в [4]. Будем считать, что колебания возбуждаются равномерно распределенной нагрузкой. Ниже представлены резонансные значения частотного параметра Ω_1^2 , определенные в [4] (верхняя строка) и изложенным здесь методом (по максимуму мощности излучения):

$$\begin{array}{ccc} 0,0217 & 0,204 & 0,527 \\ 0,0194 & 0,192 & 0,498 \end{array} \quad (21)$$

На фиг. 6 представлены графики зависимости от Ω_1^2 безразмерной амплитуды колебаний $w_* = 10^2 w E / q l$ посредине пролета в вакууме (кривая 1) и в жидкости — действительная часть (кривая 2) и мнимая часть (кривая 3).

Заметим, что если в контакте с жидкостью находится не тонкостенная конструкция, а массивное линейно упругое тело, в качестве уравнения (2) можно взять граничное интегральное уравнение теории упругости, основанное на теореме взаимности Бетти и



Фиг. 6

записываемое как уравнение второго рода относительно перемещения (скорости) на поверхности [8, 9]. В то же время уравнение (1) для жидкости — уравнение второго рода относительно давления. Это позволяет свести указанную систему к одному уравнению второго рода любым из названных во введении способов. Во-первых, тем же, что и выше для тонкостенной конструкции — определением фундаментального решения для граничного уравнения теории упругости (зависимости нормальной скорости от сосредоточенного нормального же воздействия на конструкцию) и внесением его в уравнение для динамики жидкости. При этом получаем уравнение второго рода (6) относительно контактного давления. Второй путь — определение фундаментального решения (зависимости давления от нормальной скорости в виде δ -функции) для уравнений (1) и подстановка выражения для давлений через искомую нормальную скорость в граничное уравнение теории упругости. В этом случае получаем интегральное уравнение второго рода относительно вектора скорости частиц упругой среды на поверхности S (вследствие идеальности жидкости на S непрерывна лишь нормальная составляющая скорости).

6. Учет скоростного напора. Выше использовалась линеаризованная зависимость давления от потенциала φ : $p = -\rho \partial \varphi / \partial t$. В некоторых случаях, однако, линеаризация выражения давления через потенциал неоправдана. При этом если давление в жидкости много меньше модуля ее объемного сжатия, а массовая скорость мала по сравнению со скоростью звука в ней, допустима линеаризация волнового уравнения [16]. Учитывая это и сохраняя «скоростной напор» в выражении для давления, имеем, наряду с (2), следующие, в целом нелинейные соотношения: граничное нестационарное интегральное уравнение относительно потенциала φ и нормальной к S скорости u :

$$(1-C)\varphi(X, t) + \int_{-\infty}^t \int_{S(\tau)} [F^0(X, Y, t-\tau)\varphi(Y, \tau) - G^0(X, Y, t-\tau)u(Y, \tau)] dS_Y d\tau = 0 \quad (22)$$

и выражение для давления, вызванного движением поверхности конструкции, когда скорость при удалении от нее исчезает (при безвихревом движении жидкости):

$$p = -\rho(\partial \varphi / \partial t + 1/2(\nabla \varphi)^2) \quad (23)$$

В уравнении (22) фундаментальное решение (G^0, F^0) имеет тот же смысл, что и (G, F) в (1), но соответствует нестационарной задаче о действии импульсного источника. Введение нестационарного уравнения (22) вместо стационарного (1) связано с тем, что даже если внешнее воздействие на линейно упругую конструкцию монохроматическое, вследствие нелинейности (23) давление и скорости уже не являются таковыми. Однако при периодическом внешнем возмущении периодическими будут и искомые функции φ, p, u (то же имеет место и при параметрическом возбуждении конструкции). Это позволяет ограничить интервал интегрирования по τ в (22). Действительно, если некоторая функция $f(t)$ — периодическая: $f(t+T) = f(t)$, а другая функция $g(t)$ достаточно быстро убывает при $t \rightarrow \infty$, имеем

$$\int_{-\infty}^t g(t-\tau)f(\tau)d\tau = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t+(n+1)T}^{t+nT} g(t-\tau)f(\tau)d\tau = \int_{t-T}^t \sum_{n=0}^{\infty} g(t+nT-\tau)f(\tau)d\tau$$

Таким образом, если T — период для φ, u , то уравнение (22) преобразуется к виду

$$(1-C)\varphi(X, t) + \int_{t-T}^t \int_{S(\tau)} [f^0(X, Y, t-\tau)\varphi(Y, \tau) - g^0(X, Y, t-\tau)u(Y, \tau)] dS_Y d\tau = 0 \quad (24)$$

$$f^0(X, Y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^0(X, Y, t+nT),$$

$$g^0(X, Y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} G^0(X, Y, t+nT)$$

Из последних равенств видно, что f^0, g^0 имеют тот же период T .

Периодические фундаментальные решения нестационарного уравнения для конструкции (2) w_{mn}^0 можно получить суммированием точно так же, как и в (24), но можно определить и непосредственно, задавая вместо начальных условий условие периодичности. Итак, из (2) находим

$$u(X, t) = \frac{\partial}{\partial t} w_s(X, t) = \int_{t-T}^t \int_{S(\tau)} \left[q_m(Z, \tau) \frac{\partial}{\partial t} w_{m3}^0(X, Z, t-\tau) + \right. \\ \left. + p(Z, \tau) \frac{\partial}{\partial t} w_{33}^0(X, Z, t-\tau) \right] dS_{\tau} d\tau \quad (25)$$

$$w_{m3}^0(X, Z, t+T) = w_{m3}^0(X, Z, t), \quad q_m(Z, t+T) = q_m(Z, t)$$

Выражение для давления (23) можно представить в виде

$$p = -\rho \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} [(\nabla_s \varphi)^2 + u^2] \right\} \quad (26)$$

где ∇_s — составляющая набла-оператора на поверхности S .

Пусть импульсному источнику $u(Y, t) = \delta(Y - Y_0) \Sigma \delta(t + nT)$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) отвечает фундаментальное периодическое решение уравнения (24). Тогда

$$\varphi = \varphi^0(X, Y_0, t)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \int_{t-T}^t \int_{S(\tau)} u(Y, \tau) \frac{\partial}{\partial t} \varphi^0(X, Y, t-\tau) dS_{\tau} d\tau \quad (27)$$

$$\nabla_s \varphi = \int_{t-T}^t \int_{S(\tau)} \nabla_s \varphi^0(X, Y, t-\tau) u(Y, \tau) dS_{\tau} d\tau$$

Подставляя (27) в (26) и затем (26) в (25), получаем разрешающее нелинейное интегральное уравнение относительно скорости u . В нем, так же, как и выше для линейного случая, возможно изменение порядка интегрирования (для вычисления сверток типа (6)), но из-за первого квадратичного члена в (26) размерность соответствующего ему интеграла в правой части (25) при этом удваивается. Возможно, более экономичным будет определение u в (25) методом последовательных приближений, в котором значения $\partial \varphi / \partial t$, $\nabla_s \varphi$, p вычисляются через текущие значения u непосредственно по формулам (27), (26).

7. Колебания в потоке. Линеаризованное соотношение для давления при малых колебаниях конструкции в потоке имеет вид

$$p = -\rho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla_s \varphi + v_{0n} u \right) \quad (28)$$

где $\mathbf{v}_0$ — скорость потока (скорость на бесконечности), v_{0n} — проекция $\mathbf{v}_0$ на нормаль к S .

Подставляя сюда выражение для $\partial \varphi / \partial t$, $\nabla_s \varphi$ (27) и внося после этого (28) в правую часть (25), получаем интегральное уравнение второго рода относительно нормальной скорости u , через которую, в свою очередь, выражается давление (26), (27). В этом случае после указанных подстановок целесообразно, изменив порядок интегрирования в (25), определить ядро «разрешающего» интегрального уравнения как свертку фундамен-

тальных решений, фигурирующих в (25) и (27). Получим следующее уравнение

$$\begin{aligned}
 u(X, t) + \int_{t-T}^t \int_{S(\tau)} \Psi(X, Y, t-\tau) u(Y, \tau) dS_Y d\tau = \\
 = \int_{t-T}^t \int_{S(\tau)} q_m(Y, \tau) \frac{\partial}{\partial t} w_{m3}^0(X, Y, t-\tau) dS_Y d\tau \\
 \Psi(X, Y, t-\tau) = \rho \left\{ v_{0n} \frac{\partial}{\partial t} w_{33}^0(X, Y, t) + \int_{t-T}^t \int_{S(\theta)} \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \Phi^0(Z, Y, \theta-\tau) + \right. \right. \\
 \left. \left. + v_0 \cdot \nabla_S \Phi^0(Z, Y, \theta-\tau) \right] \frac{\partial}{\partial t} w_{33}^0(X, Z, t-\theta) dS_Z d\theta \right\}
 \end{aligned} \tag{29}$$

Монохроматическому возбуждению соответствует то же уравнение после замены нестационарных фундаментальных решений w_{m3}^0 , Φ^0 на стационарные и устранения символов интегрирования по τ , θ .

Заметим, что в случае большой скорости потока (она может и превосходить скорость звука в жидкости), движущимся следует считать тело, так, чтобы скорость на бесконечности оказалась равной нулю. При этом линеаризация уравнения, рассматриваемого в движущейся вместе с телом системе координат (см., например, [17]), оправдана лишь для тонкого тела, когда, несмотря на его большую скорость, массовая скорость в жидкости оказывается много меньше скорости звука.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев Д. Г., Гольденвейзер А. Л. Колебания и излучение оболочки вращения при действии кольцевой нагрузки // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 4. С. 184-193.
2. Васильев Д. Г., Лидский В. Б. Вынужденные колебания тонкой упругой оболочки, взаимодействующей с жидкостью // Матем. методы механики деформируемого твердого тела. Докл. I-го Всесоюз. симпоз. М.: Наука, 1986. С. 30-36.
3. Голованов В. А., Попов А. Л., Попов А. Ю. Расчет резонансных колебаний оболочки вращения в жидкости при помощи присоединенной массы // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 5. С. 166-171.
4. Голованов В. А., Попов А. Л., Чернышев Г. Н. О колебаниях ограниченной пластины в жидкости // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 3. С. 436-442.
5. Воронич И. И., Ционский А. Я., Юдин А. С. Метод собственных форм решения задачи о вынужденных колебаниях оболочки вращения, подкрепленной ребрами, в жидкости // Акуст. ж. 1983. Т. 29. № 6. С. 744-748.
6. Волков Е. А., Постнов В. А. Применение численных методов к решению задачи о гидроупругих колебаниях оболочек // Применение численных методов в расчетах судовых конструкций. Л.: Изд-е ЛКИ, 1984. С. 7-21.
7. Авербух А. З., Вейцман Р. И., Генкин М. Д. Колебания элементов конструкций в жидкости. М.: Наука, 1987. 158 с.
8. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494 с.
9. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.
10. Сейнберг А., Сознарко Б., Риццо Ф., Шиппи Д. Применение метода граничных интегральных уравнений в изопараметрической формулировке к задачам излучения звука // Конструирование и технология машиностроения. 1984. № 3. С. 80-86.
11. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1962. 431 с.
12. Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 383 с.
13. Бологин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиздат, 1961. 339 с.
14. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970. 734 с.
15. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 348 с.
16. Слепня Л. И. Об уравнениях динамики осесимметричной полости в идеальной сжимаемой жидкости // Докл. АН СССР. 1985. Т. 282. № 4. С. 809-813.
17. Красильщикова Е. А. Тонкое крыло в сжимаемом потоке. М.: Наука, 1978. 223 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
6.VI.1988