МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1989

УДК 539.3 : 538.69

А. Л. РАДОВИНСКИЙ

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧ МАГНИТОАКУСТИЧЕСКОГО РАЗОГРЕВА ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

Предложен простой метод расчета тепловыделения в тонких упругих оболочках, находящихся в гармоническом магнитном поле. Учитывается тепловыделение, связанное с токовихревыми потерями, а также возникающее вследствие потерь на внутреннее трение при механических колебаниях оболочки под действием пондеромоторных сил. На примере показано, что на резонансных частотах тепловыделение второго типа, начиная с некоторых значений магнитной индукции заданного магнитного поля, является преобладающим. Это согласуется с результатами [1, 2].

Исходные уравнения приняты в форме [3]. Учет внутреннего трения осуществляется введением комплексного модуля упругости [4].

1. Метод решения. Исследование данной задачи проводится в следующей последовательности. Находится решение уравнений [5] электродинамики тонких оболочек (множители $\exp(i\omega t)$ отброшены):

$$\gamma\Delta_s F+i\omega f_3=-i\omega B_3,\quad \Delta\Phi=0 \tag{1.1}$$

$$f_3=(\partial\Phi/\partial\alpha_3)^+=(\partial\Phi/\partial\alpha_3)^-,\quad F=\Phi^+-\Phi^-$$

Определяется магнитное давление по формуле (множители $\exp(i\Omega t)$ отброшены; $\Omega=2\omega$):

$$\mathbf{X}=-\mu_0^{-1}(\mathrm{grad}_s F\cdot\mathbf{i}_3)\times(\mathbf{B}+\mathbf{f}),\quad \mathbf{f}={}^1/_2[(\mathrm{grad}\,\Phi)^+ +(\mathrm{grad}\,\Phi)^-] \tag{1.2}$$

Интегрируются уравнения динамики оболочек (множители $\exp(i\Omega t)$ отброшены):

$$(1+i\delta)2EhL_h\mathbf{u}-2\rho h\Omega^2\mathbf{u}=\mathbf{X} \tag{1.3}$$

После этого средняя мощность потерь может быть найдена по формулам

$$\langle P\rangle=\langle P_e\rangle+\langle P_m\rangle \tag{1.4}$$

$$\langle P_e\rangle={}^1/_2(2h\sigma)^{-1}[\mathbf{J}\cdot\bar{\mathbf{J}}]_s=\gamma(2\mu_0)^{-1}[\mathrm{grad}_s F\cdot\overline{\mathrm{grad}_s F}]_s$$

$$\langle P_m\rangle={}^1/_2\,\mathrm{Re}[\mathbf{x}\cdot\partial\bar{\mathbf{U}}/\partial t]_s=\Omega/2\,\mathrm{Im}[\mathbf{X}\cdot\bar{\mathbf{u}}]_s$$

$$\mathbf{x}=\mathbf{X}\exp(i\Omega t),\quad \mathbf{U}=\mathbf{u}\exp(i\Omega t)$$

где α_j, $\mathbf{i}_j$ $(j=1,2,3)$ — параметры связанной со срединной поверхностью S оболочки системы координат ($\alpha_3=0$ — на S) и соответствующие орты; $\mathbf{B}$ — значение на S магнитной индукции источника, определенное в отсутствие оболочки (в предположении, что все бесконечное трехмерное пространство V обладает свойствами вакуума); ω — круговая частота поля индуктора; Φ — магнитный потенциал (магнитная индукция вихревых токов в V есть $\mathbf{b}=\mathrm{grad}\,\Phi$, а ее значение на S есть $\mathbf{f}$); операторы grad и Δ без индекса и с индексом s определены в области V и на поверхности S соответственно; L_h — оператор теории оболочек [6]; $\gamma=(2h\mu_0\sigma)^{-1}$; μ_0 — магнитная постоянная; h, σ, ρ, E, δ — полутолщина, электрическая проводимость, плотность, модуль Юнга и коэффициент внутреннего трения материала оболочки; для величин с обозначением $(\ldots)^\pm$ берутся их значения на лицевых поверхностях математического разреза S, то есть при $\alpha_3=\pm0$; $[\ldots]_s$ — интеграл от содержащихся в скобках величин по поверхности S, $\mathbf{J}$ — линейная плотность вихревых токов [5]; черта сверху означает комплексно сопряженную величину; $\mathbf{u}$ — перемещения срединной поверхности деформированной оболочки.

Аналитические и численные методы решения пространственной задачи интегрирования уравнений электродинамики тонких оболочек рассмотрены в [5–8]. В этих работах, в частности, указывается, что при малых значениях частот задача может быть сведена к двумерной, отнесенной к параметрам координат поверхности S. Поэтому ниже на методах решения уравнений (1.1) останавливаться не будем.

Значительно большие математические сложности возникают на этапе интегрирования уравнений динамики оболочек (1.3). В первую очередь они связаны с громоздкостью оператора L_h (восьмого порядка с малым параметром при старших производных). Здесь представляется целесообразным прибегнуть к решению уравнений (1.3) разложением по собственным решениям уравнений колебаний тонких упругих оболочек.

2. Потери на внутреннее трение. Пусть $(\mathbf{V}_q, \Omega_q)$, $q=1, 2, \ldots$ — собственные решения уравнений свободных колебаний тонких упругих оболочек

$$2EhL_h\mathbf{u}-2\rho h\Omega^2\mathbf{u}=0 \tag{2.1}$$

Свойства этих собственных решений подробно исследованы в [6]. В частности, показано, что, если оператор L_h самосопряженный (т. е. при идеализированных граничных условиях теории оболочек, к которым относятся широко применяемые условия шарнирного опирания, заделки и свободного края, справедливо тождество $[L_h\mathbf{V}_n\cdot\mathbf{V}_q]_s=[\mathbf{V}_n\cdot L_h\mathbf{V}_q]_s$), то имеют место следующие тождественные равенства

$$\begin{gathered} W_{nn}-\Omega_n I_{nn}=0, \quad W_{nq}=I_{nq}=0 \quad (n\neq q) \\ I_{nq}=2\rho h[\mathbf{V}_n\cdot\mathbf{V}_q]_s, \quad W_{nq}=[L_h\mathbf{V}_n\cdot\mathbf{V}_q]_s \end{gathered} \tag{2.2}$$

первое из которых выражает теорему Клапейрона, а вторые — условия ортогональности в теории тонких упругих оболочек.

Будем искать решение уравнения (1.3) в виде разложения по собственным формам (2.1):

$$\mathbf{u}=\sum_{q=1}^{\infty} A_q\mathbf{V}_q \tag{2.3}$$

Подставив (2.3) в (1.3), умножив полученное равенство на $\mathbf{V}_n$ и проинтегрировав по S, получим с учетом (2.2) следующее выражение для коэффициентов разложения (2.3):

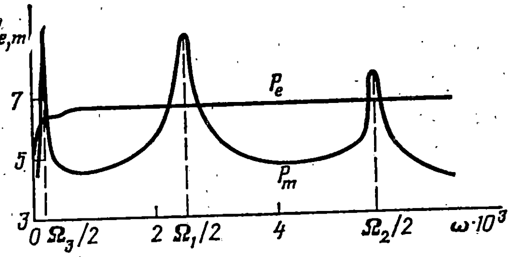
$$A_n=\{(\Omega_n^2-\Omega^2)+i\delta\Omega_n^2\}^{-1}[\mathbf{X}\cdot\mathbf{V}_n]_s/I_{nn} \tag{2.4}$$

Формулы (2.3), (2.4) определяют решение уравнений (1.3). Воспользуемся ими и упростим выражение (1.4) для средней мощности $\langle P_m\rangle$ потерь на внутреннее трение. Подставив в него $\mathbf{X}$ в виде левой части (1.3), заменив $\mathbf{u}$ согласно (2.3), (2.4) и воспользовавшись тождествами (2.2), после выделения мнимой части получим (учитывая $\bar{\mathbf{u}}=\Sigma\bar{A}_q\mathbf{V}_q$):

$$\langle P_m\rangle=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Omega\Omega_n^2\delta}{(\Omega_n^2-\Omega^2)^2+\delta^2\Omega_n^4}\,\frac{[\mathbf{X}\cdot\mathbf{V}_n]_s[\bar{\mathbf{X}}\cdot\mathbf{V}_n]_s}{2\rho h[\mathbf{V}_n^2]_s} \tag{2.5}$$

Как видно, теперь для определения $\langle P_m\rangle$ решать уравнение (1.3) не надо. Достаточно знать собственные решения уравнения (2.1). Методы их определения и свойства изложены в [6].

Отметим, что так как коэффициент внутреннего трения $\delta\ll1$, то при совпадении удвоенной частоты поля индуктора с какой-либо собственной частотой колебаний оболочки $2\omega=\Omega=\Omega_n$ может возникнуть (при $[\mathbf{X}\cdot\mathbf{V}_n]_s\neq0$) резонанс и связанное с ним резкое увеличение $\langle P_m\rangle$. Это отмечалось, например, в [1, 2]. При этом в (2.5) можно ограничиться рассмотрением только одного члена суммы ряда. Зависимость этого члена от частоты и коэффициента внутреннего трения определяется множите-



лем $(\delta\Omega_n)^{-1}$, т. е. интенсивность резонансного всплеска $\langle P_m\rangle$, вообще говоря, снижается с ростом частоты и коэффициента внутреннего трения. Последнее связано с уменьшением амплитуды резонансов.

3. Пример расчета. Рассмотрим в качестве примера задачу о нагреве бесконечной цилиндрической оболочки радиуса R в боковом магнитном поле $B\exp(i\omega t)$ с компонентами (в цилиндрических координатах (z, θ, r), $\alpha_1=z/R$, $\alpha_2=\theta$, $\alpha_3=(r-R)/R$):

$$B_1=0,\quad B_2=B\sin\theta,\quad B_3=-B\cos\theta$$

Решение соответствующих уравнений (1.1) имеет вид

$$\Phi=BR\frac{i\omega\beta}{1+i\omega\beta}\left\{\begin{matrix}(r/R)^{-1}\\ -(r/R)\end{matrix}\right\}\cos\theta,\quad \left\{\begin{matrix}r\geqslant R+0\\ r\leqslant R-0\end{matrix}\right\}$$

$$F=2BRi\omega\beta/[(1+i\omega\beta)\cos\theta]\quad(\beta=R/2\gamma)$$

Компоненты вектора магнитного давления $\mathbf{X}$ согласно (1.2) есть

$$X_1=0$$

$$X_2=-\frac{B^2}{\mu_0}\frac{i\omega\beta}{(1+i\omega\beta)^2}\sin 2\theta,\qquad X_3=\frac{B^2}{\mu_0}\frac{i\omega\beta}{1+i\omega\beta}(\cos 2\theta-1)$$

В силу ортогональности тригонометрических функций в ряде (2.5) сохранятся только три слагаемых, отвечающие собственным решениям $\Omega_1=C$, $\Omega_2=\sqrt{5}C$, $\Omega_3=\sqrt{60h}C$, $V_1^1=V_2^1=0$, $V_3^1=1$, $V_1^{2,3}=0$, $V_2^{2,3}=v_2^{2,3}\sin 2\theta$, $V_3^{2,3}=v_3^{2,3}\cos 2\theta$, $v_2^2=v_3^3=1$, $v_3^2=-v_2^3=1/2$, где $C=(E/\rho)^{1/2}$ — скорость звука в материале оболочки.

Подставляя полученные результаты в формулы (1.4) для $\langle P_e\rangle$ и (2.5) для $\langle P_m\rangle$ и интегрируя по θ, выведем следующие формулы для определения погонной (на единицу длины оболочки) мощности тепловыделения

$$\langle P_e\rangle=P_eB^2,\quad P_e=2\pi R\gamma\mu_0^{-1}\omega^2\beta^2(1+\omega^2\beta^2)^{-1}$$

$$\langle P_m\rangle=P_mB^4,\quad P_m=\frac{\pi R\delta\Omega}{4\mu_0^2\rho h}\sum_{n=1}^{3}\frac{a_n\Omega_n^2}{(\Omega_n^2-\Omega^2)^2+\Omega_n^4\delta^2}$$

$$a_1=2,\quad a_2=1/5(9+\omega^2\beta^2)(1+\omega^2\beta^2)^{-1},\quad a_3=1/5(1+4\omega^2\beta^2)(1+\omega^2\beta^2)^{-1}$$

Зависимости P_e и P_m от ω для алюминиевого цилиндра с $h=10^{-3}$ м, $R=0{,}1$ м, $\sigma=4\cdot10^7$ (Ом·м)$^{-1}$, $\rho=2{,}7\cdot10^3$ кг/м^3, $E=6{,}85\cdot10^{10}$ Н/м^2, $\delta=7\cdot10^{-3}$ представлены на фигуре в логарифмическом масштабе. Как видно, на резонансах ($\omega=\Omega_n/2$, $\Omega_1=5037$ с$^{-1}$, $\Omega_2=11260$ с$^{-1}$, $\Omega_3=390$ с$^{-1}$) мощность $\langle P_m\rangle$ тепловыделения за счет внутреннего трения имеет всплески и при $B=1$ Т преобладает над практически постоянной, начиная с некоторых частот, мощностью токовихревых потерь на несколько порядков. При росте магнитной индукции поля B это преобладание усиливается в квадратичной зависимости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Кондрат В. Ф.* Магнитотермоупругость электропроводных тел. Киев: Наук. думка, 1982. 293 с.
2. *Киселев М. И., Рыжков С. Ю., Соболев С. В.* К теории магнитоакустического разогрева проводящего вязко-упругого слоя с закрепленными границами // 3-й Всесоюз. симпоз. «Теоретические вопросы магнитоупругости» (тез. докл.) Ереван: Ереван. ун-т, 1984. С. 91–94.

3. *Радовинский А. Л.* Динамика упругих электропроводящих оболочек в постоянных и нестационарных магнитных полях // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 5. С. 796–803.
4. *Сорокин Е. С.* К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. М.: Госстройиздат, 1960. 131 с.
5. *Радовинский А. Л.* Об уравнениях электромагнитных процессов в тонких проводящих оболочках // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1987. № 4. С. 164–170.
6. *Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е.* Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 383 с.
7. *Тозони О. В., Маергойз И. Д.* Расчет трехмерных электромагнитных полей. Киев: Техніка, 1974. 352 с.
8. *Астахов В. И.* Задача расчета квазистационарного электромагнитного поля в проводящих оболочках // Изв. вузов. Электромеханика. 1985. № 1. С. 15–29.

Москва

Поступила в редакцию
7.XII.1987