

УДК 539.3

Д. В. ГРИЛИЦКИЙ, В. К. ОПАНАСОВИЧ, Л. О. ТИСОВСКИЙ

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ С ЛИНЕЙНЫМИ УПРУГИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Рассматривается задача об определении напряженно-деформированного состояния в неограниченной упругой изотропной пластине, содержащей конечное число произвольным образом расположенных взаимодействующих между собой массивных упругих шайб и тонкостенных криволинейных включений. Дана постановка плоской задачи теории упругости, построена модель тонкого криволинейного упругого включения. С использованием аппарата теории функций комплексного переменного найдены выражения для потенциалов Колосова – Мусхелишвили и получена система сингулярных интегродифференциальных уравнений задачи. Предложен алгоритм ее численного решения. Исследовано состояние упругого равновесия в пластине с эллиптическим отверстием и прямолинейным упругим включением. Проведен анализ распределения напряжений на контуре отверстия и коэффициентов интенсивности напряжений в вершинах включения в зависимости от различных физических и геометрических параметров задачи.

1. Постановка задачи. Рассмотрим неограниченную пластину (матрицу), содержащую M упругих массивных включений S_j , ограниченных гладкими замкнутыми контурами L_j ($j=1, \dots, M$), и N тонких упругих криволинейных включений постоянной толщины со срединной линией L_j (L_j – контур типа Ляпунова) ($j=M+1, \dots, M+N$), причем в матрице расположено N_0 тонких включений, а в шайбе S_j их содержится N_j ($\sum N_i=N$; $i=0, \dots, M$).

Каждый контур L_j ($j=1, \dots, M+N$) свяжем с некоторой локальной системой координат $x_j O_j y_j$, причем считаем, что ось $O_j x_j$ образует угол α_j с осью Ox . Точка O_j определяется в базисной системе координат $x_j O_j y_j$ комплексной координатой $z_j^0 = x_j^0 + iy_j^0$ (фиг. 1). Упругие постоянные матрицы обозначаются через μ_0, κ_0 ; включения – μ_j, κ_j ($j=1, \dots, M+N$).

Предполагается, что такая кусочно-однородная пластина находится в состоянии упругого равновесия под действием системы внешних силовых факторов, а на линиях раздела материалов выполняются условия идеального механического контакта, которые можно представить для шайбы и тонкого включения соответственно в виде

$$[N(t_n) + iT(t_n)]^+ = [N(t_n) + iT(t_n)]^-$$

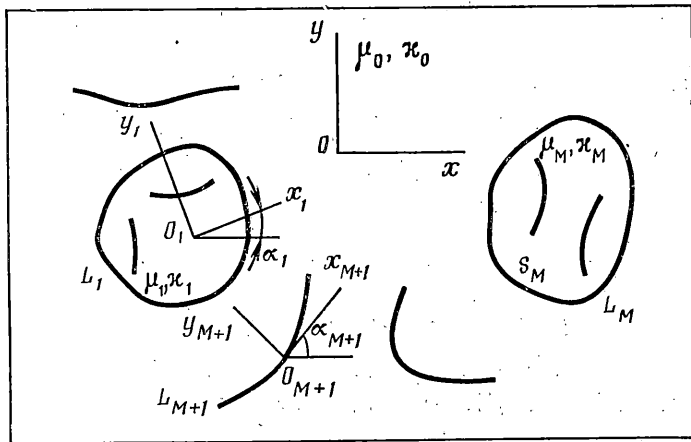
$$\frac{\partial}{\partial t_n} [u(t_n) + iv(t_n)]^+ = \frac{\partial}{\partial t_n} [u(t_n) + iv(t_n)]^- \quad (t_n \in L_n; n=1, \dots, M)$$

$$[N(t_n^\pm) + iT(t_n^\pm)]_* = [N(t_n^\pm) + iT(t_n^\pm)]_{**} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t_n} [u(t_n^\pm) + iv(t_n^\pm)]_* = \frac{\partial}{\partial t_n} [u(t_n^\pm) + iv(t_n^\pm)]_{**} +$$

$$+ iy_n \quad (t_n \in L_n; n=M+1, \dots, M+N) \quad (1.2)$$

Здесь индексы «плюс» и «минус» означают граничные значения функций соответственно слева и справа по отношению к положительному направлению обхода контура L_n ; через t_n^+ и t_n^- обозначены точки соответственно левого и правого берега включения, т. е. $t_n^\pm = t_n \mp h_n e^{i\alpha_n}$, $\alpha_n = \alpha_n(t_n)$; $t_n \in L_n$, $n=M+1, \dots, M+N$, α_n – угол, который составляет внешняя нормаль к контуру с осью $O_n x_n$; $N(t)$, $T(t)$ – нормальная и касательная компонен-



Фиг. 1

ты вектора напряжений; $u(t)$, $v(t)$ — компоненты вектора перемещений; γ_n — угол поворота n -го тонкого включения как жесткого целого; положительное направление обхода контура L_n — против часовой стрелки; звездочками обозначены предельные значения выражений, стоящих в квадратных скобках, соответственно со стороны матрицы и тонкого включения. При сделанных предположениях требуется определить напряженное состояние в рассматриваемой кусочно-однородной пластине.

2. Модель тонкого упругого криволинейного включения. Решение задач теории упругости для тел с тонкими прослойками значительно упрощается, если учесть их тонкостенность и построить соответствующую модель включения, которая связывает между собой граничные значения напряжений и перемещений на поверхностях неоднородности. Считая n -е включение пластиной малой ширины, определим напряженно-деформированное состояние в нем через комплексные потенциалы Колосова — Мусхелишвили. Вводя обозначения

$$\begin{aligned}
 & [N(t_n) + iT(t_n)]^+ - [N(t_n) + iT(t_n)]^- = 2ih_n K_n(t_n) \\
 & \frac{\partial}{\partial t_n} [u(t_n) + iv(t_n)]^+ - \frac{\partial}{\partial t_n} [u(t_n) + iv(t_n)]^- = \frac{ih_n}{\mu_n} M_n(t_n) \\
 & (t_n \in L_n; n = M+1, \dots, M+N)
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

получим следующие зависимости

$$\begin{aligned}
 & [N(t_n) + iT(t_n)]^+ + [N(t_n) + iT(t_n)]^- = 2[\Phi_0^n(t_n) + \overline{\Phi_0^n(t_n)} - e^{-2i\alpha_n} R_0^n(t_n)] \\
 & \frac{\partial}{\partial t_n} [u(t_n) + iv(t_n)]^+ + \frac{\partial}{\partial t_n} [u(t_n) + iv(t_n)]^- = \\
 & = \frac{1}{\mu_n} [\kappa_n \Phi_0^n(t_n) - \overline{\Phi_0^n(t_n)} + e^{-2i\alpha_n} R_0^n(t_n)] \\
 & (t_n \in L_n; n = M+1, \dots, M+N)
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$K_n(t_n) = \frac{d}{ds} [\Phi_0^n(t_n)] + \frac{d}{ds} [\overline{\Phi_0^n(t_n)}] + e^{-2i\alpha_n} \frac{d}{ds} [R_0^n(t_n)]$$

$$M_n(t_n) = \kappa_n \frac{d}{ds} [\Phi_0^n(t_n)] - \frac{d}{ds} [\overline{\Phi_0^n(t_n)}] - e^{-2i\alpha_n} \frac{d}{ds} [R_0^n(t_n)]$$

$$R_0^n(t_n) = t_n \overline{\Phi_0^{n'}(t_n)} + \overline{\Psi_0^n(t_n)} \tag{2.3}$$

где $\Phi_0^n(t_n)$, $\Psi_0^n(t_n)$ — подлежащие определению функции, s — дуговая абсцисса, соответствующая точке $t_n \in L_n$. Отметим, что если L_n — отрезок прямой линии, то соотношения (2.1), (2.2) переходят в соответствующие зависимости для тонкого упругого прямолинейного включения [1].

3. Интегральные представления для комплексных потенциалов. В силу

линейности задачи, комплексные потенциалы для составной пластины можно представить в виде

$$\Phi(z) = \Phi_*(z) + \sum_{k=1}^{M+N} \Phi_k(z), \quad \Psi(z) = \Psi_*(z) + \sum_{k=1}^{M+N} \Psi_k(z) \quad (3.1)$$

где функции $\Phi_*(z)$, $\Psi_*(z)$ определяют напряженно-деформированное состояние в однородной плоскости без включений, а потенциалы $\Phi_k(z)$, $\Psi_k(z)$ характеризуют состояние упругого равновесия пластины с k -м включением.

С учетом представления (3.1) и модели тонкого криволинейного включения (2.1), (2.2), на основании граничных условий (1.1), (1.2) получим следующие краевые задачи теории аналитических функций:

$$\begin{aligned} & \Phi_k^+(t_k) - \Phi_k^-(t_k) + \overline{\Phi_k^+(t_k)} - \overline{\Phi_k^-(t_k)} + \frac{d\bar{t}_k}{dt_k} [R_k^+(t_k) - R_k^-(t_k)] = \\ & = 2ih_k K_k(t_k) q_k \quad (t_k \in L_k; k=1, \dots, M+N) \\ & \kappa_p [\Phi_k^+(t_k) - \Phi_k^-(t_k)] - [\overline{\Phi_k^+(t_k)} - \overline{\Phi_k^-(t_k)}] - \\ & - \frac{d\bar{t}_k}{dt_k} [R_k^+(t_k) - R_k^-(t_k)] = 2ih_k \frac{\mu_p}{\mu_k} M_k(t_k) \quad (t_k \in L_k; k=M+1, \dots, M+N) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\kappa_p \Phi^+(t_k) - \overline{\Phi^+(t_k)} - \frac{d\bar{t}_k}{dt_k} R^+(t_k) = \frac{\mu_k}{\mu_0} \left[\kappa_0 \Phi^-(t_k) - \overline{\Phi^-(t_k)} - \frac{d\bar{t}_k}{dt_k} R^-(t_k) \right] \quad (t_k \in L_k; k=1, \dots, M)$$

$$\begin{aligned} & \Phi_k^+(t_k) + \Phi_k^-(t_k) + \overline{\Phi_k^+(t_k)} + \overline{\Phi_k^-(t_k)} + \frac{d\bar{t}_k}{dt_k} [R_k^+(t_k) + R_k^-(t_k)] + \\ & + 2 \left[\Phi_{\Sigma}(t_k) + \overline{\Phi_{\Sigma}(t_k)} + \frac{d\bar{t}_k}{dt_k} R_{\Sigma}(t_k) \right] = 2 \left[\Phi_0^k(t_k) + \overline{\Phi_0^k(t_k)} + \frac{d\bar{t}_k}{dt_k} R_0^k(t_k) \right] \\ & \kappa_p [\Phi_k^+(t_k) + \Phi_k^-(t_k)] - [\overline{\Phi_k^+(t_k)} + \overline{\Phi_k^-(t_k)}] - \frac{d\bar{t}_k}{dt_k} [R_k^+(t_k) + R_k^-(t_k)] + \\ & + 2 \left[\kappa_p \Phi_{\Sigma}(t_k) - \overline{\Phi_{\Sigma}(t_k)} - \frac{d\bar{t}_k}{dt_k} R_{\Sigma}(t_k) \right] = 2 \frac{\mu_p}{\mu_k} \left[\kappa_k \Phi_0^k(t_k) - \overline{\Phi_0^k(t_k)} - \right. \\ & \left. - \frac{d\bar{t}_k}{dt_k} R_0^k(t_k) \right] - 2 \frac{\mu_p}{\mu_k} i \gamma_k \quad (t_k \in L_k; k=M+1, \dots, M+N) \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$q_k = \begin{cases} 0, & k=1, \dots, M \\ 1, & k=M+1, \dots, M+N \end{cases}$$

$$(\kappa_p, \mu_p) = \begin{cases} (\kappa_0, \mu_0), & k=M+1, \dots, M+N \\ (\kappa_j, \mu_j), & k=K_0, \dots, K_j \end{cases}$$

$$(j=1, \dots, M; K_0=M+1 + \sum_{i=0}^{j-1} N_i; K_j=M + \sum_{i=0}^j N_i)$$

$$\begin{Bmatrix} \Phi_{\Sigma} \\ \Psi_{\Sigma} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Phi_* \\ \Psi_* \end{Bmatrix} + \sum_{l=1, l \neq k}^{M+N} \begin{Bmatrix} \Phi_l \\ \Psi_l \end{Bmatrix}$$

Краевые задачи (3.2) удовлетворяются автоматически, если используя результаты [2-4], функции $\Phi_k(z)$, $\Psi_k(z)$ представить следующим образом:

$$\Phi_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} Q_k(t_k) e^{i\alpha_k} \frac{dt_k}{T_k - z}$$

$$\Psi_k(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} \left[\overline{Q_k(t_k)} e^{-i\alpha_k} \frac{d\bar{t}_k}{T_k - z} + \bar{T}_k e^{i\alpha_k} Q_k(t_k) \frac{dt_k}{(T_k - z)^2} \right] \quad (k=1, \dots, M)$$

$$\Phi_k(z) = \frac{h_k}{\pi(1+\kappa_p)} \int_{L_k} \left[K_k(t_k) + \frac{\mu_p}{\mu_k} M_k(t_k) \right] e^{i\alpha_k} \frac{dt_k}{T_k - z}$$

$$\Psi_k(z) = -\frac{h_k}{\pi(1+\kappa_p)} \int_{L_k} \left\{ \bar{T}_k e^{i\alpha_k} \left[K_k(t_k) + \frac{\mu_p}{\mu_k} M_k(t_k) \right] \times \right.$$

$$\left. \times \frac{dt_k}{(T_k - z)^2} + \left[\kappa_p \overline{K_k(t_k)} - \frac{\mu_p}{\mu_k} \overline{M_k(t_k)} \right] \frac{e^{-i\alpha_k} d\bar{t}_k}{T_k - z} \right\} \quad (k=M+1, \dots, M+N) \quad (3.4)$$

где $Q_k(t)$ — неизвестная функция, $T_k = t_k e^{i\alpha_k} + z_k^0$. Таким образом, соотношениями (3.4) заданы искомые представления для комплексных потенциалов задачи через неизвестные функции скачков напряжений и перемещений на линиях раздела материалов.

4. Система разрешающих уравнений задачи. Используя формулы Сохоцкого — Племеля и результаты [4], находим граничные значения комплексных потенциалов (3.4). Подставляя затем полученные зависимости в условия (3.3), приходим к системе $M+2N$ комплекснозначных сингулярных интегродифференциальных уравнений для определения $M+2N$ неизвестных функций $Q_k(t_k)$ ($k=1, \dots, M$), $M_n(t_n)$, $K_n(t_n)$ ($n=1, \dots, N$):

$$\overline{a_n Q_n(u_n)} - \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^M \int_{L_k} [L_{11}(t_k, u_n) Q_k(t_k) dt_k + L_{12}(t_k, u_n) \overline{Q_k(t_k)} d\bar{t}_k] -$$

$$- \sum_{k=M+1}^{M+N} \frac{h_k}{\pi(1+\kappa_p)} \int_{L_k} [L_{13}(t_k, u_n) M_k(t_k) dt_k + L_{14}(t_k, u_n) \overline{M_k(t_k)} d\bar{t}_k +$$

$$+ L_{15}(t_k, u_n) K_k(t_k) dt_k + L_{16}(t_k, u_n) \overline{K_k(t_k)} d\bar{t}_k] = p_{1n}(u_n) \quad (u_n \in L_n; \quad n=1, \dots, M)$$

$$\alpha_{i1} \Phi_0^n(u_n) + \alpha_{i2} \overline{\Phi_0^n(u_n)} + \frac{d\bar{u}_n}{du_n} \alpha_{i3} \left[u_n \Phi_0^{n'}(u_n) + \overline{\Psi_0^n(u_n)} \right] +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^M \int_{L_k} [L_{i1}(t_k, u_n) Q_k(t_k) dt_k + L_{i2}(t_k, u_n) \overline{Q_k(t_k)} d\bar{t}_k] -$$

$$- \sum_{k=M+1}^{M+N} \frac{h_k}{\pi(1+\kappa_p)} \int_{L_k} [L_{i3}(t_k, u_n) M_k(t_k) dt_k + L_{i4}(t_k, u_n) \overline{M_k(t_k)} d\bar{t}_k +$$

$$+ L_{i5}(t_k, u_n) K_k(t_k) dt_k + L_{i6}(t_k, u_n) \overline{K_k(t_k)} d\bar{t}_k] =$$

$$= p_{in}(u_n) \quad (i=2, 3; \quad u_n \in L_n, \quad n=M+1, \dots, M+N) \quad (4.1)$$

$$p_{1n}(u_n) = b_n \overline{\Phi^*(X_n)} + c_n \Phi^*(X_n) + c_n e^{2i\alpha_n} \frac{du_n}{d\bar{u}_n} [\overline{X_n} \Phi^*(X_n) + \Psi^*(X_n)]$$

$$\begin{Bmatrix} p_{2n}(u_n) \\ p_{3n}(u_n) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \kappa_p \end{Bmatrix} \Phi^*(X_n) + \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \overline{\Phi^*(X_n)} + \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \times$$

$$\times e^{-2i\alpha_n} \frac{d\bar{u}_n}{du_n} [X_n \overline{\Phi^*(X_n)} + \overline{\Psi^*(X_n)}] - 2i \frac{\mu_p}{\mu_n} \gamma_n \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$L_{ij}(t_k, u_n) = \left[\beta_{ij} + \gamma_{ij} e^{2i\alpha_n} \frac{du_n}{d\bar{u}_n} \frac{\bar{T}_k - \bar{X}_n}{T_k - X_n} \right] \frac{e^{i\alpha_k}}{T_k - X_n} \quad (i=1; \quad j=1, 3, 5)$$

$$L_{ij}(t_k, u_n) = \left[\beta_{ij} + \gamma_{ij} e^{2i\alpha_n} \frac{du_n}{d\bar{u}_n} \frac{\bar{T}_k - \bar{X}_n}{T_k - X_n} \right] \frac{e^{-i\alpha_k}}{\bar{T}_k - \bar{X}_n} \quad (i=1; \quad j=2, 4, 6)$$

$$L_{ij}(t_k, u_n) = \left[\beta_{ij} + \gamma_{ij} e^{-2i\alpha_n} \frac{d\bar{u}_n}{du_n} \frac{\bar{T}_k - \bar{X}_n}{T_k - X_n} \right] \frac{e^{i\alpha_k}}{T_k - X_n} \quad (i=2, 3; j=1, 3, 5)$$

$$L_{ij}(t_k, u_n) = \left[\beta_{ij} + \gamma_{ij} e^{-2i\alpha_n} \frac{d\bar{u}_n}{du_n} \frac{\bar{T}_k - \bar{X}_n}{T_k - X_n} \right] \frac{e^{-i\alpha_k}}{\bar{T}_k - \bar{X}_n} \quad (i=2, 3; j=2, 4, 6)$$

а постоянные α_{ij} ($i=2, 3; j=1, 2, 3$), β_{ij} , γ_{ij} ($i=1, 2, 3; j=1, \dots, 6$) имеют вид

$$\begin{aligned} \alpha_{21} = \alpha_{22} = \alpha_{23} = 1, \quad \alpha_{31} = \mu_p \kappa_n / \mu_n, \quad \alpha_{32} = \alpha_{33} = -\mu_p / \mu_n \\ \beta_{11} = \beta_{15} = -\gamma_{11} = -\gamma_{12} = -\gamma_{15} = c_n, \quad \beta_{16} = -\beta_{12} = b_n \\ \beta_{13} = \gamma_{14} = -\gamma_{13} = c_n \mu_p / \mu_h, \quad \gamma_{16} = -c_n \kappa_p, \quad \beta_{14} = b_n \mu_p / \mu_h \\ \beta_{22} = \beta_{25} = \beta_{26} = \gamma_{36} = \gamma_{31} = \gamma_{32} = 1, \quad \beta_{21} = \gamma_{21} = \gamma_{22} = \gamma_{26} = \beta_{32} = \beta_{36} = -1 \\ \gamma_{25} = \beta_{31} = -\beta_{35} = -\gamma_{35} = -\kappa_p, \quad \gamma_{33} = \gamma_{24} = \gamma_{34} = -\mu_p / \mu_h \\ \beta_{23} = \gamma_{23} = \beta_{24} = \beta_{34} = \mu_p / \mu_h, \quad \beta_{33} = \kappa_p \mu_p / \mu_h \\ a_n = 0,5 [\kappa_n + 1 + \mu_n (\kappa_0 + 1) / \mu_0], \quad b_n = \mu_n \kappa_0 / \mu_0 - \kappa_n, \quad c_n = 1 - \mu_n / \mu_0 \end{aligned}$$

Для единственности решения полученной системы интегродифференциальных уравнений необходимо выполнение дополнительных соотношений

$$\begin{aligned} \int_{L_k} K_k(t_k) dt_k = 0, \quad \int_{L_k} M_k(t_k) dt_k = 0 \\ \text{Im} \int_{L_k} \bar{t}_k K_k(t_k) dt_k = 0 \quad (k=M+1, \dots, M+N) \end{aligned} \quad (4.2)$$

которые представляют собой условия равенства нулю главного вектора и главного момента всех усилий, приложенных к k -му тонкому включению, а также условие однозначности перемещений при обходе его контура.

Таким образом, соотношения (4.1), (4.2) составляют полную систему уравнений для определения напряженно-деформированного состояния в произвольной точке неограниченной пластины, содержащей конечное число взаимодействующих между собой массивных упругих шайб и криволинейных тонкостенных включений. Заметим, что полученные результаты легко обобщаются на случай бесконечного числа включений (как массивных, так и тонкостенных), расположение которых имеет периодическую структуру. Указанное обстоятельство можно использовать при проектировании и расчете на прочность композиционных материалов.

Отметим также, что путем предельного перехода можно получить решение ряда задач, представляющих самостоятельный интерес. В частности, переходя в (4.1) к пределу при $\mu_h \rightarrow 0$ ($k=M+1, \dots, M+N$), приходим к системе сингулярных интегральных уравнений [5].

5. Построение решения системы уравнений задачи. Вводя замену переменных

$$t_k = \omega_k(\tau), \quad u_n = \omega_n(\theta) \quad (0 \leq \tau, \theta \leq 2\pi; \quad k, n=1, \dots, M) \quad (5.1)$$

$$t_k = \omega_k(\xi), \quad u_n = \omega_n(\eta) \quad (-1 \leq \xi, \eta \leq 1; \quad k, n=M+1, \dots, M+N)$$

($\omega_k(\varepsilon)$ — параметрическое уравнение контура L_k ($k=1, \dots, M+N$)), систему уравнений (4.1), (4.2) приведем к нормализованному виду

$$\begin{aligned} a_n \overline{Q_n(\theta)} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{h=1}^M \int_0^{2\pi} \left[\sum_{j=1}^2 L_{ijnk}(\tau, \theta) f_{jk}(\tau) \right] d\tau + \\ + \sum_{h=M+1}^{M+N} \frac{h_h}{\pi(1+\kappa_p)} \int_{-1}^1 \left[\sum_{j=3}^6 L_{ijnk}(\xi, \theta) f_{jk}(\xi) \right] d\xi = \\ = p_{1n}(\theta) \quad (n=1, \dots, M; \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi) \end{aligned}$$

$$\alpha_{i1} \overline{\Phi_n(\eta)} + \alpha_{i2} \overline{\Phi_n(\eta)} + \alpha_{i3} \frac{\overline{\omega_n'(\eta)}}{\overline{\omega_n'(\eta)}} [\overline{\omega_n(\eta)} \overline{\Phi_n'(\eta)} + \overline{\Psi_n(\eta)}] +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^M \int_0^{2\pi} \left[\sum_{j=1}^2 L_{ijnk}(\tau, \eta) f_{jk}(\tau) \right] d\tau - \\
& - \sum_{k=M+1}^{M+N} \frac{h_k}{\pi(1+\kappa_p)} \int_{-1}^1 \left[\sum_{j=3}^6 f_{jk}(\xi) L_{ijnk}(\tau, \xi) \right] d\xi = p_{in}(\eta) \\
& \quad (i=2, 3; n=M+1, \dots, M+N) \quad |\eta| \leq 1 \\
& \int_{-1}^1 f_{jk}(\xi) d\xi = 0 \quad (j=3, 5), \quad \text{Im} \int_{-1}^1 \overline{\omega_k(\xi)} f_{5k}(\xi) d\xi = 0 \quad (k=M+1, \dots, M+N)
\end{aligned} \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned}
Q_n(\theta) &= Q_n(\omega_n(\theta)), \quad \Phi_n(\eta) = \Phi_0^n(\omega_n(\eta)), \quad \Psi_n(\eta) = \Psi_0^n(\omega_n(\eta)) \\
f_{1k}(\tau) &= Q_k(\omega_k(\tau)) \omega_k'(\tau), \quad f_{2k}(\tau) = \overline{f_{1k}(\tau)}, \quad f_{3k}(\xi) = M_k(\omega_k(\xi)) \omega_k'(\xi) \\
f_{4k}(\xi) &= \overline{f_{3k}(\xi)}, \quad f_{5k}(\xi) = K_k(\omega_k(\xi)) \omega_k'(\xi), \quad f_{6k}(\xi) = \overline{f_{5k}(\xi)} \\
L_{1ijnk}(\tau, \theta) &= L_{ij}(\omega_k(\tau), \omega_n(\theta)) \quad (j=1, 2), \\
L_{1ijnk}(\xi, \theta) &= L_{ij}(\omega_k(\xi), \omega_n(\theta)) \quad (j=3, \dots, 6) \\
L_{ijnk}(\tau, \eta) &= L_{ij}(\omega_k(\tau), \omega_n(\eta)) \quad (i=2, 3; j=1, 2) \\
L_{ijnk}(\xi, \eta) &= L_{ij}(\omega_k(\xi), \omega_n(\eta)) \quad (i=2, 3; j=3, \dots, 6)
\end{aligned}$$

Решение системы сингулярных интегродифференциальных уравнений (5.2) будем проводить численно с помощью метода механических квадратур [4], причем для разомкнутых контуров искомые функции представляются в виде $f_{jk}(\xi) = u_{jk}(\xi) (1-\xi^2)^{-1/2}$ ($j=3, \dots, 6; k=M+1, \dots, M+N$), где $u_{jk}(\xi)$ — непрерывные на отрезке $[-1, 1]$ функции и для вычисления интегралов пользовались квадратурными формулами Гаусса — Чебышева [6, 7].

Интегралы на замкнутых контурах вычислялись при помощи квадратурной формулы [8]:

$$\int_0^{2\pi} f(\tau) M(\tau, \theta) d\tau = \frac{2\pi}{n_2} \sum_{\nu=1}^{n_2} f(\tau_\nu) M(\tau_\nu, \theta) \tag{5.3}$$

справедливой для регулярных функций $M(\tau, \theta)$ при любых значениях θ , а для сингулярных ядер $M(\tau, \theta)$ при $\theta = \theta_s = (2s-1)\pi/n_2 + \delta$ ($s=1, \dots, n_2$).

Здесь предполагается, что $f(\theta)$, $M(\tau, \theta) - 2\pi$ — периодические функции; n_2 — четное натуральное число; δ — произвольная действительная постоянная.

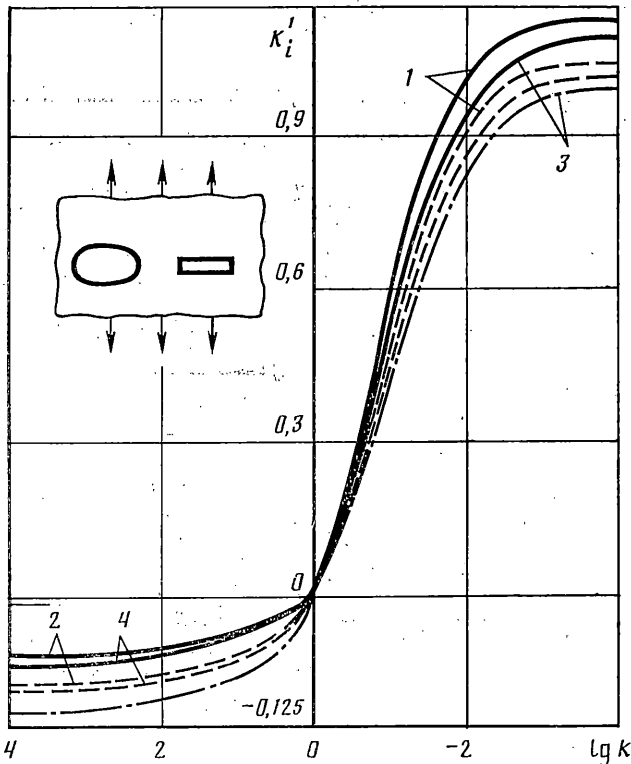
Для определения значения функции $f(\tau)$ в произвольной точке τ использовалась интерполяционная формула [9]:

$$f(\tau) = \frac{1}{n_2} \sum_{\nu=1}^{n_2} f(\tau_\nu) \sin \frac{n_2(\tau - \tau_\nu)}{2} \text{ctg} \frac{\tau - \tau_\nu}{2}$$

которая точна для тригонометрического полинома степени не выше $n_2/2 - 1$.

Используя соответствующие квадратурные формулы, систему интегродифференциальных уравнений (5.2) сводим к системе линейных алгебраических уравнений, которая решается численно методом Гаусса с выбором главного элемента. В результате решения можно определить все искомые характеристики напряженно-деформированного состояния.

Установлено, что распределение напряжений и перемещений в окрестности вершин криволинейного упругого включения имеет тот же вид, что и для прямолинейного [1], только коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) K_{in}^\pm ($i=1, \dots, 4; n=M+1, \dots, M+N$) в данном случае вы-



Фиг. 2

числяются согласно формул

$$K_{1n}^{\pm} - iK_{2n}^{\pm} = \mp \frac{2h_n}{1 + \kappa_p} \frac{\mu_p}{\mu_n} \frac{|\omega_n'(\pm 1)|^{1/2}}{\omega_n'(\pm 1)} u_{3n}(\pm 1)$$

$$K_{3n}^{\pm} - iK_{4n}^{\pm} = \mp \frac{2h_n}{1 + \kappa_p} \frac{|\omega_n'(\pm 1)|^{1/2}}{\omega_n'(\pm 1)} u_{5n}(\pm 1) \quad (5.4)$$

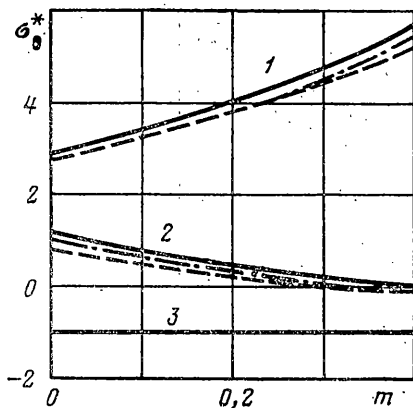
$$u_{jn}(\pm 1) = \mp \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k u_{jn}(t_k) \left(\operatorname{ctg} \frac{2k-1}{4n} \pi \right)^{\pm 1}, \quad t_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi$$

где n — четное натуральное число; индексами «минус» и «плюс» обозначены значения КИН соответственно в левой и правой вершине включения (по отношению к локальной системе координат $x_n O_n y_n$).

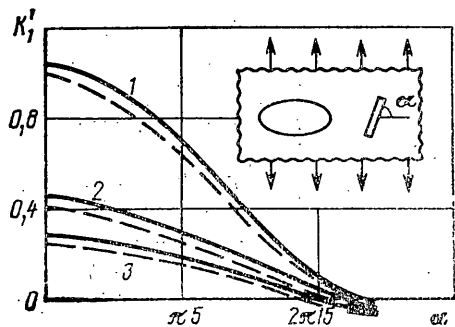
С помощью функций $Q_n(\theta)$ можно определить концентрацию напряжений в пластине, вызываемую массивными включениями.

6. Результаты численного анализа. В качестве примера рассмотрим задачу о растяжении бесконечной пластины, содержащей упругую эллиптическую шайбу с полуосями a и b , ограниченную контуром L_1 , и внешнее прямолинейное тонкое включение длины $2l$ со срединной линией L_2 . Заметим, что выбор замкнутого и разомкнутого контуров в виде эллипса и прямолинейного отрезка принципиального значения не имеет, поскольку в предложенной методике решения задач теории упругости кусочно-однородных тел основным моментом является возможность задания уравнений контуров в параметрическом виде. В рассматриваемом случае кривые L_1 и L_2 описываются соответственно уравнениями $t_1 = w_1(\theta) = a(\cos \theta + i\varepsilon \sin \theta)$, $\varepsilon = b/a$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$), $t_2 = \omega_2(\xi) = l\xi$ ($-1 \leq \xi \leq 1$). Предполагается, что пластина растягивается на бесконечности равномерно распределенными усилиями N_1 и N_2 , причем усилие N_1 направлено под углом β к оси Ox , т. е. комплексные потенциалы $\Phi_*(z)$, $\Psi_*(z)$ имеют вид $\Phi_*(z) \equiv \Gamma = 0,25(N_1 + N_2)$, $\Psi_*(z) = -0,5(N_1 - N_2)e^{-2ip}$. Таким образом, задача сводится к решению системы трех сингулярных интегродифференциальных уравнений вида (5.2) для определения трех неизвестных функций скачка.

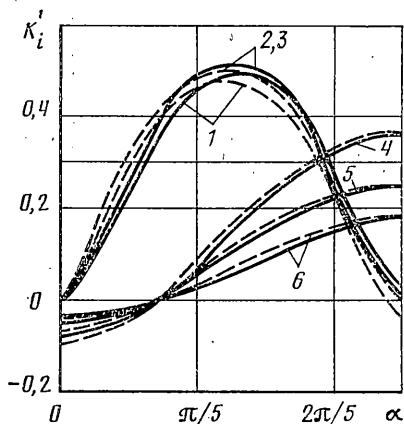
Проведен численный анализ решения задачи о взаимодействии эллиптического отверстия с прямолинейным тонкостенным включением. КИН в вершинах включений определялись формулами (5.4), а для определения распределения напряжений



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

на эллиптическом контуре использовалось соотношение

$$\sigma_0 = 4 \operatorname{Re} \left[\Gamma - \frac{1}{2} Q(\theta) + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{Q(\tau) \omega_1'(\tau) d\tau}{\omega_1(\tau) - \omega_1(\theta)} \right]$$

Вычисления проводились при следующих значениях безразмерных параметров: $x_0/l=3$; $y_0/l=0$; $h/l=0,1$; $a/l=1$; $\kappa_0=\kappa_2=2$; $N_2=0$; $\beta=\pi/2$.

На фиг. 2 представлены зависимости приведенных КИН $K_i' = K_i / (\sqrt{N_1})$ от относительной жесткости включения $k = \mu_2/\mu_0$ при различных значениях параметра $m = (1 - \varepsilon)/(1 + \varepsilon)$. Нечетным номерам кривых на фигуре соответствует значение K_1' , четным — K_3' . Кривые 1, 2 построены при $m=0$ (круговое отверстие), а кривые 3, 4 при $m=0,4$. В заданном случае нагружения $K_2' = K_4' = 0$. Здесь и в дальнейшем сплошными линиями показано значение КИН в ближней к отверстию вершине включения, штриховыми — в дальней. Штрих-пунктирная линия характеризует распределение КИН в сплошной пластинке с включением. Видно, что наличие отверстия приводит к увеличению КИН K_1 и уменьшению K_3 , причем при фиксированной большей оси эллипса наибольшую концентрацию напряжений на тонком включении вызывает круглое отверстие.

На фиг. 3 показано влияние жесткости тонкого включения на величину напряжений $\sigma_0^* = \sigma_0/N_1$ в зависимости от параметра m для различных точек контура отверстия (кривые 1, 2, 3 характеризуют точку контура с полярным углом θ соответственно равным 0, $\pi/4$, $\pi/2$). Сплошные линии построены для пластинки с отверстием и трещиной, штриховые — для пластинки с отверстием и абсолютно жестким линейным включением, штрихпунктирная линия характеризует распределение напряжений на контуре отверстия при отсутствии тонкого включения. Для упругого включения исследуемые зависимости представляют собой линии, которые на фигуре лежат между сплошной и штрих-пунктирной, если материал включения «мягче» материала матрицы, и между штрих-пунктирной и штриховой, если включение «жестче» за матрицу.

Из рассмотрения графиков видно, что включение не влияет на распределение напряжений в концах малого диаметра эллипса (в указанных точках все три линии совпадают). Кроме того, жесткое включение приводит к незначительной разгрузке отверстия, в то время как мягкое включение увеличивает концентрацию

напряжений на нем. С увеличением m напряжения на концах большого диаметра возрастают, что приводит к уменьшению прочности композита в целом.

На фиг. 4 представлены графики изменения КИН K_1' для пластины с отверстием от угла α при $m=0,5$ и различных относительных жесткостях включения (кривые 1, 2, 3 характеризуют тонкие включения со значением параметра $k^*=1/k$ соответственно равным 10^4 , 10, 5). Те же зависимости для изменения КИН K_2' , K_3' приведены на фиг. 5. Здесь линии 1-3 характеризуют изменение КИН K_2' и построены при тех же значениях жесткости тонкого включения, что и на фиг. 4. Линии 4-6 представляют поведение КИН K_3' для значения параметра k^* соответственно равного 10^{-4} ; 0,1; 0,2. Отметим, что в исследуемом случае $K_4=0$ для всех значений угла α и жесткости включения.

Анализ приведенных графиков позволяет сделать следующие выводы. С увеличением угла α монотонно возрастает КИН K_3 и уменьшается K_1 . КИН K_2 возрастает до некоторой критической величины при $\alpha \approx 50^\circ$ для ближней вершины и $\alpha \approx 40^\circ$ для дальней, а затем уменьшается. Максимальное значение K_1 принимает для пластины с отверстием и трещиной, а K_3 — для пластины с отверстием и абсолютно жестким включением. Для КИН K_1 наиболее «опасным» является значение угла $\alpha=0$, для K_3 максимальное значение достигается при $\alpha=\pi/2$. КИН K_2 принимает наибольшие значения в интервале $36^\circ \leq \alpha \leq 54^\circ$.

В заключение отметим, что сравнение данных численного расчета с решением соответствующей задачи для пластинки с круглой шайбой и тонким включением, полученным в [10] иным путем, дало хорошее совпадение результатов (максимальная относительная погрешность для КИН не превышает 5%).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Драган М. С., Опанасович В. К. Напряженное состояние полосы (балки) с прямолинейным тонкостенным включением // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 2. С. 342-348.
2. Григолюк Э. И., Грингауз М. Г., Фильштинский Л. А. К решению двумерных задач теории упругости для областей с кусочно-гладкой границей // Докл. АН СССР. 1984. Т. 275. № 4. С. 831-834.
3. Theocaris P. S., Ioakimidis N. I. The inclusion problem in plane elasticity // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1977. V. 30. No. 4. P. 437-448.
4. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1981. 323 с.
5. Саврук М. П., Тимошук Н. В. Сингулярные интегральные уравнения плоской задачи теории упругости для бесконечного кусочно-однородного тела с трещинами // Физ.-хим. механика материалов. 1984. № 6. С. 73-79.
6. Корнейчук А. А. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов // Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. М.: Наука, 1964. С. 64-74.
7. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. М.: Наука, 1967. 500 с.
8. Chawla M. M., Ramakrishnan T. R. Numerical evaluation of integrals of periodic function with Cauchy and Poisson type kernels // Numer. Math. 1974. V. 22. No. 4. P. 317-323.
9. Габдуллаев В. Г. Об одном общем квадратурном процессе и его применении к приближенному решению сингулярных интегральных уравнений // Докл. АН СССР. 1968. Т. 179. № 3. С. 515-517.
10. Грилицкий Д. В., Опанасович В. К., Тисовский Л. О. Упругое состояние пластины с круглой шайбой и прямолинейным тонким упругим включением // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 6. С. 993-1000.

Львов

Поступила в редакцию
5.V.1988