МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1989

УДК 539.3

Л. М. ЗУБОВ

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ИЗОЛИРОВАННЫХ ДИСЛОКАЦИЙ И ДИСКЛИНАЦИЙ В УПРУГИХ ОБОЛОЧКАХ

Для нелинейно упругих оболочек типа Лява и Коссера, имеющих неодносвязную срединную поверхность и испытывающих большие деформации, установлено существование дислокаций Вольтерра, т. е. таких состояний оболочки, в которых компоненты тензоров тангенциальных и изгибных деформаций, а также усилия и моменты однозначны и непрерывны в многосвязной области, в то время как перемещения испытывают скачок определенного вида на разрезах, превращающих область в односвязную. Показано, что дислокация Вольтерра, содержащая в себе трансляционную дислокацию и дисклинацию, характеризуется двумя векторными параметрами, которые выражены через поле тангенциальных и изгибных деформаций при помощи мультипликативного интеграла. Дана постановка задачи об определении напряженного состояния упругой оболочки по заданным параметрам дислокации Вольтерра. Рассмотрена нелинейная задача о дисклинации в оболочке вращения.

Линейная теория дислокаций в оболочках освещена в [1].

1. Пусть σ — заданная срединная поверхность тонкой оболочки в недеформированном состоянии, $\mathbf{r}(x^\alpha)$ — радиус-вектор точки на σ, заданный как функция гауссовых координат x^α ($\alpha=1, 2$). Векторы основного базиса на σ обозначим $\mathbf{r}_\alpha$, вектор нормали к σ и коэффициенты квадратичных форм обозначим $\mathbf{n}$, $g_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$. Радиус-вектор, векторы базиса, вектор единичной нормали и коэффициенты квадратичных форм срединной поверхности Σ после деформации обозначим $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}_\alpha$, $\mathbf{N}$, $G_{\alpha\beta}$, $B_{\alpha\beta}$. Компоненты тензоров тангенциальных и изгибных деформаций оболочки определяются соотношениями

$$\varepsilon_{\alpha\beta}={}^1/_2(G_{\alpha\beta}-g_{\alpha\beta}),\qquad \varkappa_{\alpha\beta}=B_{\alpha\beta}-b_{\alpha\beta} \tag{1.1}$$

Поставим задачу определения поля перемещений $\mathbf{u}=\mathbf{R}-\mathbf{r}$ срединной поверхности по заданным компонентам $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и $\varkappa_{\alpha\beta}$. Задание величин (1.1) эквивалентно заданию квадратичных форм $G_{\alpha\beta}$, $B_{\alpha\beta}$. В дальнейшем предполагается, что функции $\mathbf{r}_\alpha(x^\gamma)$, $\mathbf{n}(x^\alpha)$, $g_{\alpha\beta}(x^\gamma)$, $G_{\alpha\beta}(x^\gamma)$ непрерывны и имеют в рассматриваемой области σ непрерывные производные до второго порядка, а функции $b_{\alpha\beta}(x^\gamma)$, $B_{\alpha\beta}(x^\gamma)$ непрерывно дифференцируемы. Введем в рассмотрение тензор дисторсии деформирующейся поверхности [2]:

$$\mathbf{C}=\mathbf{r}^\alpha\mathbf{R}_\alpha+\mathbf{n}\mathbf{N} \tag{1.2}$$

При помощи формул [2] можно получить следующие соотношения

$$\partial\mathbf{C}/\partial x^\alpha=\mathbf{\Pi}_\alpha\cdot\mathbf{C} \tag{1.3}$$

$$\mathbf{\Pi}_\alpha=(B_{\alpha\beta}-b_{\alpha\beta})\mathbf{r}^\beta\mathbf{n}-(B_\alpha{}^\beta-b_\alpha{}^\beta)\mathbf{n}\mathbf{r}_\beta+(\Gamma_{\alpha\delta}{}^\beta-\gamma_{\alpha\delta}{}^\beta)\mathbf{r}^\delta\mathbf{r}_\beta$$

$$b_\alpha{}^\beta=b_{\alpha\nu}g^{\nu\beta},\quad B_\alpha{}^\beta=B_{\alpha\nu}G^{\nu\beta},\quad \mathbf{r}^\beta=g^{\alpha\beta}\mathbf{r}_\alpha$$

$$g_{\alpha\beta}g^{\beta\gamma}=\delta_\alpha{}^\gamma,\quad G_{\alpha\beta}G^{\beta\gamma}=\delta_\alpha{}^\gamma$$

где $\gamma_{\alpha\delta}{}^\beta$ и $\Gamma_{\alpha\delta}{}^\beta$ — символы Кристоффеля соответственно в метриках $g_{\mu\nu}$ и $G_{\mu\nu}$, $\delta_\alpha{}^\gamma$ — символ Кронекера. Тензоры второго ранга $\mathbf{\Pi}_\alpha$ известны, если заданы функции (1.1).

Соотношения (1.3) представляют собой систему уравнений для определения тензора дисторсии $\mathbf{C}$ по заданным тензорам тангенциальных и изгибных деформаций. Необходимые и достаточные условия разрешимости системы (1.3) имеют вид

$$\partial \mathbf{\Pi}_\alpha/\partial x^\beta - \partial \mathbf{\Pi}_\beta/\partial x^\alpha = \mathbf{\Pi}_\beta \cdot \mathbf{\Pi}_\alpha - \mathbf{\Pi}_\alpha \cdot \mathbf{\Pi}_\beta \tag{1.4}$$

Уравнения (1.4) содержат три независимых скалярных соотношения и эквивалентны уравнениям Гаусса — Кодацци относительно функций $G_{\alpha\beta}$, $B_{\alpha\beta}$. Условия Гаусса — Кодацци для функций $g_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ выполняются тождественно, поскольку поверхность σ задана.

После определения тензора дисторсии радиус-вектор $\mathbf{R}$ деформированной поверхности Σ находится при помощи вытекающих из (1.2) уравнений

$$\partial \mathbf{R}/\partial x^\alpha = \mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{C} \tag{1.5}$$

Условия интегрируемости системы (1.5) относительно $\mathbf{R}$ выполняются в силу (1.3). В самом деле, эти условия имеют вид $\partial(\mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{C})/\partial x^\beta = \partial(\mathbf{r}_\beta \cdot \mathbf{C})/$ $/\partial x^\alpha$ и согласно (1.3) эквивалентны соотношениям $\mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{\Pi}_\beta = \mathbf{r}_\beta \cdot \mathbf{\Pi}_\alpha$, справедливость которых вытекает из свойств симметрии: $b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha}$, $B_{\alpha\beta} = B_{\beta\alpha}$, $\gamma_{\alpha\delta}{}^\beta = \gamma_{\delta\alpha}{}^\beta$, $\Gamma_{\alpha\delta}{}^\beta = \Gamma_{\delta\alpha}{}^\beta$.

Решение системы (1.3), как и в [3], можно записать при помощи криволинейного мультипликативного интеграла

$$\mathbf{C}(M) = \int_{M_0}^{M} (\mathbf{E} + d\mathbf{r} \cdot \mathbf{\Pi}) \cdot \mathbf{C}(M_0), \qquad d\mathbf{r} = dx^\alpha \mathbf{r}_\alpha, \quad \mathbf{\Pi} = \mathbf{r}^\alpha \mathbf{\Pi}_\alpha \tag{1.6}$$

где $\mathbf{E}$ — единичный тензор, M_0 и M — начальная и текущая точка на кривой интегрирования (свойства криволинейного мультипликативного интеграла описаны в [4]).

Система (1.5) решается в обычных квадратурах

$$\mathbf{R} = \int_{M_0}^{M} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{R}(M_0) \tag{1.7}$$

Если поверхность σ односвязна, то формулы (1.6), (1.7) определяют однозначное (т. е. не зависящее от выбора пути интегрирования) дважды непрерывно дифференцируемое поле перемещений срединной поверхности оболочки. В случае многосвязной поверхности тензорное поле дисторсии и векторное поле перемещений могут оказаться неоднозначными. Неоднозначность можно устранить, превратив многосвязную поверхность σ в односвязную путем проведения определенного числа разрезов вдоль кривых l_k. При этом тензор $\mathbf{C}$ и вектор $\mathbf{R}$ будут, вообще говоря, претерпевать разрыв непрерывности при пересечении разрезов l_k. Методом [3] доказывается, что значения $\mathbf{C}_\pm$ тензора дисторсии на противоположных берегах разреза связаны соотношением

$$\mathbf{C}_+ = \mathbf{C}_- \cdot \mathbf{\Phi}_k \tag{1.8}$$

где $\mathbf{\Phi}_k$ — постоянный вдоль каждого из разрезов l_k тензор второго ранга. Из полярного разложения тензора дисторсии поверхности [2]

$$\mathbf{C} = (\mathbf{U} + \mathbf{nn}) \cdot \mathbf{A}, \quad \mathbf{U} = (2I_2^{1/2} + I_1)^{-1/2} (I_2^{1/2}\mathbf{E} - I_2^{1/2}\mathbf{nn} + \mathbf{G})$$

$$I_1 = \mathrm{tr}\,\mathbf{G}, \quad I_2 = {}^1/_2(\mathrm{tr}^2\,\mathbf{G} - \mathrm{tr}\,\mathbf{G}^2), \quad \mathbf{G} = \mathbf{G}_{\alpha\beta}\mathbf{r}^\alpha\mathbf{r}^\beta$$

где $\mathbf{A}$ — собственно ортогональный тензор, в силу непрерывности тензора $\mathbf{G}$ получаем, что тензоры $\mathbf{\Phi}_k$ собственно ортогональны: $\mathbf{\Phi}_k \cdot \mathbf{\Phi}_k^T = \mathbf{E}$, $\det \mathbf{\Phi}_k =$ $= 1$.

Согласно (1.5) на разрезе l_k имеем

$$\partial \mathbf{R}_\pm/\partial s = \mathbf{t} \cdot \mathbf{C}_\pm \tag{1.9}$$

Здесь s — длина дуги, $\mathbf{t}$ — единичный вектор касательной к кривой l_k. Из (1.9) и (1.8) вытекает соотношение

$$\partial \mathbf{R}_+/\partial s = (\partial \mathbf{R}_-/\partial s) \cdot \mathbf{\Phi}_k$$

интегрируя которое вдоль кривой l_k, получаем

$$\mathbf{R}_+=\mathbf{R}_-\cdot\mathbf{\Phi}_k+\mathbf{b}_k \tag{1.10}$$

где $\mathbf{b}_k$ — постоянные векторы. Формула (1.10) выражает тот факт, что в деформированном состоянии оболочки положение одного берега разреза отличается от положения другого берега конечным перемещением абсолютно твердого тела. Используя представление ортогональных тензоров $\mathbf{\Phi}_k$ через векторы конечного поворота φ_k [2], придем к формуле для скачка перемещений

$$\mathbf{u}_+-\mathbf{u}_-=(1+{}^1/_4\varphi_k\cdot\varphi_k)^{-1}\varphi_k\times(\mathbf{R}_-+{}^1/_2\varphi_k\times\mathbf{R}_-)+\mathbf{b}_k$$

В случае двусвязной оболочки ($k=1$) парметры $\mathbf{\Phi}_1$, $\mathbf{b}_1$ выражаются через тензорные поля тангенциальных и изгибных деформаций соотношениями, аналогичными приведенным в [3]:

$$\begin{gathered}\mathbf{\Phi}_1=\mathbf{C}^{-1}(M_0)\cdot\oint_{M_0}(\mathbf{E}+d\mathbf{r}\cdot\mathbf{\Pi})\cdot\mathbf{C}(M_0)\\ \mathbf{b}_1=\left(\oint d\mathbf{r}'\right)\cdot\int_{M_0}^{M'}(\mathbf{E}+d\mathbf{r}\cdot\mathbf{\Pi})\cdot\mathbf{C}(M_0)+\mathbf{r}(M_0)\cdot(\mathbf{E}-\mathbf{\Phi}_1)\end{gathered} \tag{1.11}$$

Используя свойства криволинейных мультипликативных интегралов [4], можно доказать, что величины φ_1, $\mathbf{b}_1$, определяющие скачок перемещений, не зависят от выбора разреза l_1, превращающего область в односвязную.

Если векторы $\mathbf{b}_1$ и φ_1 не равны нулю одновременно, то подобно [3] будем говорить, что в двусвязной оболочке содержится дислокация Вольтерра. При $\varphi_1=0$ она сводится к трансляционной дислокации. В общем случае дисклинация Вольтерра содержит в себе трансляционную дислокацию и дислокацию, причем вектор φ_1 характеризует дисклинационную составляющую дислокации Вольтерра.

При наличии дислокации Вольтерра перемещения в многосвязной оболочке неоднозначны. Многозначное решение уравнений (1.3) в двусвязной области имеет вид $\mathbf{C}=\mathbf{C}_*\cdot\mathbf{\Phi}_1^{n-m}$, где $\mathbf{C}_*$ — значение тензора дисторсии, которое дает формула (1.6) в односвязной (т. е. разрезанной) области, n — число полных оборотов пути интегрирования в положительном направлении, т. е. пересекающих разрез l_1 от стороны, отмеченной знаком «плюс» к стороне, отмеченной знаком «минус», m — число полных оборотов пути интегрирования в отрицательном направлении.

При $m=0$ общее выражение вектора $\mathbf{R}$ в двусвязной области будет следующим

$$\begin{gathered}\mathbf{R}=\int_{M_0}^{M}d\mathbf{r}\cdot\mathbf{C}_*\cdot\mathbf{\Phi}_1{}^n+\mathbf{R}_0+\delta(n)\left[\mathbf{b}_1+\mathbf{R}_0\cdot(\mathbf{\Phi}_1-\mathbf{E})\right]\cdot(\mathbf{E}+\mathbf{\Phi}_1+\ldots+\mathbf{\Phi}_1^{n-1}),\\ \mathbf{R}_0=\mathbf{R}(M_0),\qquad \delta(n)=\begin{cases}0 & n=0\\ 1 & n\neq0\end{cases}\end{gathered} \tag{1.12}$$

Путь обычного интегрирования в последней формуле не должен пересекать разреза l_1. Заметим, что в силу однозначности тензора тангенциальных деформаций неоднозначность тензора дисторсии обусловлена целиком неоднозначностью поля поворотов $\mathbf{A}(x^\alpha)$ деформирующейся поверхности.

Опишем вкратце характер неоднозначности поворотов в многосвязной оболочке, для превращения которой в односвязную требуется проводить не один, а несколько разрезов. Характер многозначности тензора дисторсии в этом случае определяется не только числом пересечений пути мультипликативного интегрирования с разрезами l_k, но и тем, в каком порядке путь интегрирования пересекает разные разрезы. Например, в случае трехсвязной оболочки типа сферического купола с двумя отверстиями существуют такие решения для тензора дисторсии

$$\mathbf{C}_*\cdot\mathbf{\Phi}_1\cdot\mathbf{\Phi}_2,\ \mathbf{C}_*\cdot\mathbf{\Phi}_2\cdot\mathbf{\Phi}_1,\ \mathbf{C}_*\cdot\mathbf{\Phi}_1{}^2\cdot\mathbf{\Phi}_2$$
$$\mathbf{C}_*\cdot\mathbf{\Phi}_1\cdot\mathbf{\Phi}_2\cdot\mathbf{\Phi}_1,\quad \mathbf{C}_*\cdot\mathbf{\Phi}_2{}^{-1}\cdot\mathbf{\Phi}_1,\ldots \tag{1.13}$$

Здесь тензоры $\mathbf{\Phi}_k$ определяются формулой (1.11), причем замкнутый контур в (1.11) должен пересекать только один разрез l_k. Из-за неперестановочности ортогональных тензоров $\mathbf{\Phi}_1$ и $\mathbf{\Phi}_2$, являющейся следствием некоммутативности конечных поворотов, все выражения в (1.13) различаются между собой. Отмеченная особенность характера многозначности поля поворотов отсутствует в линейной теории оболочек.

Указанная многозначность поворотов порождает весьма сложный характер неоднозначности поля перемещений в многосвязной оболочке.

Уравнения равновесия оболочки в усилиях и моментах имеют вид [2]:

$$\nabla_\alpha(T^{\alpha\beta}-M^{\alpha\delta}B_\delta{}^\beta)-B_\delta{}^\beta\nabla_\alpha M^{\alpha\delta}+F^\beta=0\quad(\beta=1,2)$$
$$\nabla_\alpha\nabla_\beta M^{\alpha\beta}+B_{\alpha\beta}(T^{\alpha\beta}-B_\delta{}^\alpha M^{\delta\beta})+F=0 \tag{1.14}$$
$$\mathbf{F}=F^\beta\mathbf{R}_\beta+F\mathbf{N}$$

Здесь $\mathbf{F}$ — вектор внешней нагрузки, $T^{\alpha\beta}$, $M^{\alpha\beta}$ — компоненты симметричных тензоров усилий и моментов, ∇_α — символ ковариантной производной в метрике $G_{\alpha\beta}$. Для упругой оболочки справедливы соотношения (W — удельная энергия оболочки):

$$\eta(G/g)^{1/2}T^{\alpha\beta}=\partial W/\partial\varepsilon_{\alpha\beta},\quad \eta(G/g)^{1/2}M^{\alpha\beta}=-\partial W/\partial\varkappa_{\alpha\beta} \tag{1.15}$$
$$g=|g_{\alpha\beta}|,\qquad G=|G_{\alpha\beta}|,\qquad \eta=\begin{cases}1, & \alpha=\beta\\ 2, & \alpha\neq\beta\end{cases}$$

Уравнения (1.14) при заданных F^β, F вместе с условиями совместности (1.4) образуют полную систему уравнений относительно тангенциальных $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и изгибных $\varkappa_{\alpha\beta}$ деформаций. В случае двусвязной области к этим уравнениям следует присоединить интегральные соотношения (1.11), определяющие характеристики дислокации Вольтерра. При $\mathbf{b}_1=\boldsymbol{\varphi}_1=0$ соотношения (1.11) выражают требование однозначности перемещений.

Силовые граничные условия на краях оболочки, приведенные в [2, 5], представляют собой соотношения относительно $\varepsilon_{\alpha\beta}$, $\varkappa_{\alpha\beta}$ и их производных и не содержат перемещений. Таким образом, задача о равновесии нелинейно упругой оболочки, содержащей дислокацию Вольтерра, сведена к краевой задаче с неизвестными функциями $\varepsilon_{\alpha\beta}$, $\varkappa_{\alpha\beta}$.

Возможен случай, когда неодносвязной является область Σ, занимаемая оболочкой в деформированном состоянии. Радиус-вектор $\mathbf{R}$, очевидно, непрерывен на разрезах, превращающих область в односвязную. Аналогично предыдущему доказывается, что при однозначных и достаточно гладких тензорных полях $\varepsilon_{\alpha\beta}$, $\varkappa_{\alpha\beta}$ тензор дисторсии и радиус-вектор, определяющий положение точек поверхности σ в недеформированном состоянии оболочки, вообще говоря, испытывают на указанных разрезах скачок следующего вида

$$\mathbf{C}_+=\mathbf{\Psi}_k\cdot\mathbf{C}_-,\quad \mathbf{r}_+=\mathbf{r}_-\cdot\mathbf{\Psi}_k{}^T+\mathbf{a}_k$$

где $\mathbf{\Psi}_k$ — постоянные собственно ортогональные тензоры, $\mathbf{a}_k$ — постоянные векторы.

В предположении, что оболочка является однородной и изотропной [2] задача о равновесии оболочки с дислокациями Вольтерра в данном случае также может быть сформулирована как краевая задача относительно $\varepsilon_{\alpha\beta}$, $\varkappa_{\alpha\beta}$. Поверхность Σ и ее граница в этом случае считается заданной.

2. Рассмотрим модель оболочки типа Коссера [6], представляющей собой двумерный деформируемый континуум, каждая частица которого имеет степени свободы абсолютно твердого тела. Положение частицы в деформированном состоянии задается радиусом-вектором $\mathbf{R}(x^\alpha)$ и собственно ортогональным тензором $\mathbf{H}(x^\alpha)$. Уравнения равновесия, определяющие соотношения и статические граничные условия нелинейно упругой оболочки типа Коссера имеют вид [6]:

$$\nabla\cdot(\mathbf{T}^*\cdot\mathbf{H})+\mathbf{f}=0,\quad \nabla\cdot(\mathbf{M}^*\cdot\mathbf{H})+(\nabla\mathbf{R}^T\cdot\mathbf{T}^*\cdot\mathbf{H})_\times+\mathbf{l}=0 \tag{2.1}$$

$$\mathbf{T}^*=\partial W/\partial\mathbf{U},\quad \mathbf{M}^*=\partial W/\partial\mathbf{L} \tag{2.2}$$

$$\mathbf{U}=(\nabla\mathbf{R})\cdot\mathbf{H}^T,\quad -\mathbf{L}\times\mathbf{E}=(\nabla\mathbf{H})\cdot\mathbf{H}^T \tag{2.3}$$

$$\mathbf{m}\cdot\mathbf{T}^*\cdot\mathbf{H}|_\gamma=\boldsymbol{\nu},\quad \mathbf{m}\cdot\mathbf{M}^*\cdot\mathbf{H}|_\gamma=\boldsymbol{\mu} \tag{2.4}$$

$$\mathbf{T}=(g/G)^{1/2}(\nabla\mathbf{R})^T\cdot\mathbf{T}^*\cdot\mathbf{H},\quad \mathbf{M}=(g/G)^{1/2}(\nabla\mathbf{R})^T\cdot\mathbf{M}^*\cdot\mathbf{H}$$

$$\nabla=\mathbf{r}^\alpha\partial/\partial x^\alpha,\quad \mathbf{D}=(\mathbf{E}\times\mathbf{E})\cdot\cdot\mathbf{D}$$

Здесь ∇ — набла-оператор на поверхности σ, занимаемой оболочкой в недеформированной конфигурации, $\mathbf{T}$, $\mathbf{M}$ — тензоры усилий и моментов, аналогичные тензору напряжений Коши в теории упругости, $\mathbf{T}^*$, $\mathbf{M}^*$ — тензоры усилий и моментов, аналогичные тензору напряжений Кирхгофа, W — удельная потенциальная энергия деформации оболочки, $\mathbf{f}$, $\mathbf{l}$ — силовая и моментная нагрузки, действующие на единицу площади поверхности σ, $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\mu}$ — силовая и моментная контурные нагрузки, $\mathbf{m}$ — нормаль к граничному контуру γ поверхности $\sigma(\mathbf{m}\cdot\mathbf{n}=0)$, $\mathbf{U}$ — мера деформации, $\mathbf{L}$ — тензор изгибной деформации, $\mathbf{D}_\times$ — векторный инвариант тензора второго ранга $\mathbf{D}$. Выразив тензор поворота $\mathbf{H}$ через вектор конечного поворота $\boldsymbol{\theta}$ по формуле [2]

$$\mathbf{H}=\mathbf{P}_+^{-1}\cdot\mathbf{P}_-=\mathbf{P}_-\cdot\mathbf{P}_+^{-1},\quad \mathbf{P}_\pm=\mathbf{E}\pm{}^1/{}_2\mathbf{E}\times\boldsymbol{\theta}$$

тензор изгибной деформации можно представить через вектор поворота

$$\mathbf{L}=4(4+\theta^2)^{-1}\nabla\boldsymbol{\theta}\cdot(\mathbf{E}+{}^1/{}_2\mathbf{E}\times\boldsymbol{\theta}),\quad \theta^2=\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\theta}$$

Рассмотрим задачу определения поля перемещений и поворотов двумерного континуума Коссера по известным полям тензоров деформаций $\mathbf{U}$ и $\mathbf{L}$, которые заданы как непрерывно дифференцируемые функции координат x^α. Из (2.3) имеем

$$\partial\mathbf{H}/\partial x^\alpha=\mathbf{P}_\alpha\cdot H,\quad \mathbf{P}_\alpha=-\mathbf{P}_\alpha{}^T=-\mathbf{E}\times(\mathbf{r}_\alpha\cdot\mathbf{L}) \tag{2.5}$$

Необходимые и достаточные условия разрешимости уравнений (2.5) относительно $\mathbf{H}$ содержат три независимых соотношения и имеют вид

$$\partial\mathbf{P}_\beta/\partial x^\alpha-\partial\mathbf{P}_\alpha/\partial x^\beta=\mathbf{P}_\alpha\cdot\mathbf{P}_\beta-\mathbf{P}_\beta\cdot\mathbf{P}_\alpha\quad(\alpha=1,\ 2) \tag{2.6}$$

Решение уравнений (2.5) дается выражением

$$\mathbf{H}(M)=\int\limits_{M_0}^{M}(\mathbf{E}+d\mathbf{r}\cdot\mathbf{P})\cdot\mathbf{H}(M_0),\qquad \mathbf{P}=\mathbf{r}^\alpha\mathbf{P}_\alpha \tag{2.7}$$

После определения $\mathbf{H}$ по (2.7) положение точек деформированной поверхности находится из (2.3) в квадратурах

$$\mathbf{R}(M)=\int\limits_{M_0}^{M}d\mathbf{r}\cdot(\mathbf{U}\cdot\mathbf{H}^T)+\mathbf{R}(M_0) \tag{2.8}$$

Необходимые и достаточные условия независимости интеграла в (2.8) от пути интегрирования в односвязной области состоят в выполнении равенств

$$\mathbf{r}^\alpha\cdot(\partial\mathbf{U}/\partial x^\alpha)+\mathbf{r}^\alpha\times\mathbf{U}\cdot\mathbf{P}_\alpha=0 \tag{2.9}$$

Условия (2.6), (2.9), состоящие из шести скалярных соотношений, являются уравнениями совместности деформаций нелинейной теории оболочек типа Коссера.

При помощи (2.7), (2.8) аналогично [3] доказывается, что на разрезе двусвязной области σ справедливы формулы

$$\mathbf{H}_+=\mathbf{H}_-\cdot\mathbf{\Phi},\ \boldsymbol{\theta}_+=(1-{}^1/_4\boldsymbol{\theta}_-\cdot\boldsymbol{\varphi})^{-1}(\boldsymbol{\theta}_-+\boldsymbol{\varphi}+{}^1/_2\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{\theta}_-) \qquad (2.10)$$

$$\mathbf{R}_+=\mathbf{R}_-\cdot\mathbf{\Phi}+\mathbf{b},\ \boldsymbol{\varphi}=2(1+\operatorname{tr}\mathbf{\Phi})^{-1}\mathbf{\Phi}_\times$$

$$\mathbf{\Phi}=(\mathbf{\Phi}^{-1})^\mathrm{T}=\mathbf{H}^\mathrm{T}(M_0)\oint\limits_{M_0}(\mathbf{E}+d\mathbf{r}\cdot\mathbf{P})\cdot\mathbf{H}(M_0) \qquad (2.11)$$

$$\mathbf{b}=\oint d\mathbf{r}'\cdot\mathbf{U}(r')\cdot\int\limits_{M_0}^{M}(\mathbf{E}+d\mathbf{r}\cdot\mathbf{P})\cdot\mathbf{H}(M_0)+\mathbf{R}(M_0)\cdot(\mathbf{E}-\mathbf{\Phi})$$

Выражения (2.10) показывают, что в оболочках типа Коссера, испытывающих большие деформации, могут существовать дефекты в виде дислокаций Вольтерра, т. е. таких состояний оболочки, при которых тензоры деформаций, а также тензоры усилий и моментов $\mathbf{T}^*$ и $\mathbf{M}^*$ однозначны и непрерывны в многосвязной области, в то время как перемещения испытывают на разрезах, превращающих область в односвязную, скачок, соответствующий жесткому относительному смещению берегов разреза.

Задачу о равновесии оболочки Коссера при наличии в ней изолированной дислокации или дисклинации можно свести к краевой задаче с неизвестными $\mathbf{U}$, $\mathbf{L}$. Действительно, умножив (2.1) справа на тензор $\mathbf{H}^T$ и учтя (2.5), уравнения равновесия перепишем в форме

$$\nabla\cdot\mathbf{T}^*+\mathbf{r}^\alpha\cdot\mathbf{T}^*\cdot\mathbf{P}_\alpha+\mathbf{f}\cdot\mathbf{H}^\mathrm{T}=0 \qquad (2.12)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{M}^*+\mathbf{r}^\alpha\cdot\mathbf{M}^*\cdot\mathbf{P}_\alpha+(\mathbf{U}^\mathrm{T}\cdot\mathbf{T}^*)_\times+\mathbf{l}\cdot\mathbf{H}^\mathrm{T}=0$$

Предположим, что нагрузка имеет следящий характер, т. е. векторы $\mathbf{f}$ и $\mathbf{l}$ зависят от деформации поверхности следующим образом

$$\mathbf{f}(x^\alpha)=\mathbf{f}_0[\mathbf{U}(x^\alpha),\mathbf{L}(x^\alpha),x^\alpha]\cdot\mathbf{H}(x^\alpha)$$

$$\mathbf{l}(x^\alpha)=\mathbf{l}_0[\mathbf{U}(x^\alpha),\mathbf{L}(x^\alpha),x^\alpha]\cdot\mathbf{H}(x^\alpha)$$

Так как согласно (2.2) тензоры $\mathbf{T}^*$ и $\mathbf{M}^*$ выражаются через $\mathbf{U}$ и $\mathbf{L}$, а $\mathbf{f}\cdot\mathbf{H}^T=\mathbf{f}_0$, $\mathbf{l}\cdot\mathbf{H}^T=\mathbf{l}_0$, то условия равновесия (2.12) будут уравнениями относительно тензоров деформаций $\mathbf{U}$, $\mathbf{L}$. Присоединив к ним условия совместности (2.6), (2.9), интегральные соотношения (2.11), краевые условия (2.4) и предполагая, что контурные нагрузки также имеют следящий характер, получим краевую задачу с неизвестными $\mathbf{U}$, $\mathbf{L}$.

3. Предположим, что срединная поверхность σ недеформированной оболочки типа Лява есть поверхность вращения, задаваемая уравнением $r=r(x)$, где $x=x^1$ — координата, отсчитываемая по оси вращения, r — расстояние точки поверхности от оси вращения. В качестве второй координаты на σ примем полярный угол φ: $x^2=\varphi$. Обозначим R, Φ, X цилиндрические координаты точки поверхности после деформации и рассмотрим следующую деформацию оболочки

$$X=X(x),\ \Phi=\beta\varphi,\ R=R(x),\ \beta=\mathrm{const} \qquad (3.1)$$

Соотношения (3.1) описывают образование в оболочке дисклинации путем вырезания сектора $2\pi\beta^{-1}\leqslant\varphi\leqslant2\pi$ (в случае $\beta>1$) и соединения берегов разреза поворотом вокруг оси оболочки. В случае $0<\beta<1$ в разрезанную полуплоскостью $\varphi=0$ оболочку вставляется сектор с углом раствора $2\pi(1-\beta)$. Если начало отсчета радиуса-вектора $\mathbf{R}$ взять на оси вращения, то параметры рассматриваемой дислокации Вольтерра согласно (1.10) будут следующими: $\mathbf{b}_1=0$, $\boldsymbol{\varphi}_1=2\mathbf{k}\operatorname{tg}\pi(1-\beta^{-1})$ при $\beta>1$; $\mathbf{b}_1=0$, $\boldsymbol{\varphi}_1=2\mathbf{k}\operatorname{tg}\pi(1-\beta)$ при $\beta<1$, где $\mathbf{k}$ — единичный вектор, направленный по оси вращения. Описанный процесс образования дисклинации сопровождается осесимметричной деформацией оболочки. После образования дисклинации срединная поверхность оболочки остается поверхностью вращения. Отрицательные значения β соответствуют образованию дисклинации в предварительно вывернутой наизнанку оболочке вращения.

Для деформации вида (3.1) по формулам [5] получим (штрих означает производную по x):

$$
\begin{gathered}
g_{11}=1+r'^2,\ g_{12}=0,\ g_{22}=r^2 \\
b_{11}=r''(1+r'^2)^{-1/2},\ b_{12}=0,\ b_{22}=-r(1+r'^2)^{-1/2} \\
G_{11}=D^2,\ G_{12}=0,\ G_{22}=\beta^2R^2 \\
B_{11}=D^{-1}(R''X'-X''R'),\ B_{12}=0,\ B_{22}=-\beta D^{-1}RX' \\
D=(R'^2+X'^2)^{1/2}
\end{gathered}
\tag{3.2}
$$

Из (1.15), (3.2) вытекает, что для изотропной однородной оболочки усилия и моменты $T^{\alpha\beta}$, $M^{\alpha\beta}$ будут функциями только координаты x. Входящие в выражения ковариантных производных символы Кристоффеля согласно (3.2) также будут зависеть от одной координаты x. Кроме того, из (3.2) следует, что $T_{12}=M_{12}=0$. Это значит, что при $F^2=0$ второе уравнение равновесия из (1.14) удовлетворяется тождественно. Таким образом, если внешние нагрузки F^1, F не зависят от φ, то задача о дисклинации в оболочке вращения сводится к нелинейной краевой задаче для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $R(x)$, $X(x)$.

В случае цилиндрической оболочки ($r(x)=\text{const}$), нагруженной равномерным нормальным давлением ($F^1=0$, $F=\text{const}$), указанная система имеет простое решение $R=R_0$, $X=\lambda x$, где λ, R_0 — постоянные. С учетом (3.2) эти постоянные определяются по заданному внешнему давлению и заданной продольной силе, действующей в сечении оболочки.

Нелинейная задача о винтовой дислокации в круговой цилиндрической оболочке решена в [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Черных К. Ф.* Линейная теория оболочек. Ч. 2. Л.: Изд-во ЛГУ, 1964. 395 с.
2. *Зубов Л. М.* Методы нелинейной теории упругости в теории оболочек. Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1982. 143 с.
3. *Зубов Л. М.* Теория дислокаций Вольтерра в нелинейно-упругих телах // Изв. АН СССР. МТТ. № 5. С. 140–147.
4. *Зубов Л. М.* Теория изолированных дефектов в нелинейно упругих телах // Вопросы нелинейной механики сплошной среды. Таллин: Валгус, 1985. С. 73–87.
5. *Зубов Л. М.* Описание конечных деформаций тонких оболочек посредством координат отсчетной и актуальной конфигураций // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 2. С. 128–135.
6. *Жилин П. А.* Основные уравнения неклассической теории упругих оболочек // Тр. Ленингр. политехн. ин-та. 1982. № 386. С. 29–46.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
20.XII.1988