

УДК 539.375

А. Н. БОРОДАЧЕВ

**ОБ ОДНОМ ТОЧНОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ НЕОДНОРОДНОЙ
ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ТРЕЩИНЫ НОРМАЛЬНОГО ОТРЫВА**

Рассмотрена задача для плоскости с прямолинейной трещиной нормального отрыва в случае, когда модуль сдвига материала является постоянным, а коэффициент Пуассона (или модуль Юнга) — произвольная функция расстояния до линии трещины. С помощью теории интегрального преобразования Фурье и связанных с ним парных интегральных уравнений указанная задача приведена к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Для одного периодического закона изменения упругих свойств материала построено точное аналитическое решение (в замкнутой форме) этого уравнения. Исследовано асимптотическое поведение решения в случае, когда упругие характеристики материала являются быстросциллирующими функциями.

1. Решение задачи для неоднородной полуплоскости. Исследование краевых задач неоднородной теории упругости для тел с трещинами связано, как известно, со значительными трудностями аналитического характера. Поэтому широкое распространение получили различные упрощенные модели неоднородности упругого материала. При этом наиболее часто используется предположение, что коэффициент Пуассона упругого материала постоянен, а модуль сдвига (или модуль Юнга) изменяется вдоль одной из координат по степенному или по экспоненциальному законам [1—4].

Однако указанные модели неоднородности не позволяют описать поведение важного с прикладной точки зрения класса материалов регулярного строения, когда упругие характеристики являются периодическими функциями координат. В [5] получено аналитическое решение (в виде ряда) задачи для плоскости с прямолинейной трещиной в случае, когда коэффициент Пуассона постоянный, а модуль Юнга периодическим образом зависит от расстояния до линии трещины.

В рамках плоской деформации рассмотрим задачу для прямолинейной трещины длиной $2a$ ($x_2=0, |x_1|\leq a$), расположенной в плоскости Ox_1x_2 . Модуль сдвига упругого материала постоянен ($\mu=\text{const}$), а коэффициент Пуассона $\nu=\nu(|x_2|)$ — произвольная кусочно-непрерывная функция, удовлетворяющая стандартным условиям: $-1<\nu\leq 1/2$ [6]. При этом модуль Юнга $E(|x_2|)=2\mu[1+\nu(|x_2|)]$ является положительной функцией расстояния до линии трещины. Поверхности трещины находятся под действием произвольной самоуравновешенной системы нормальных нагрузок $p(x_1)$.

С учетом симметрии упругих свойств материала и условий нагружения относительно линии трещины $x_2=0$ приходим к следующей смешанной краевой задаче для полуплоскости $x_2>0$ (объемные силы отсутствуют):

$$\Delta u + \nabla(\eta \nabla \cdot u) = 0 \quad (x_2 > 0) \tag{1.1}$$

$$\sigma_{12}(x_1, 0) = 0 \quad (|x_1| < \infty) \tag{1.2}$$

$$\sigma_{22}(x_1, 0) = -p(x_1) \quad (|x_1| < a) \tag{1.3}$$

$$u_2(x_1, 0) = 0 \quad (|x_1| > a) \tag{1.4}$$

где $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ — вектор перемещений, $\eta(x_2) = [1 - 2\nu(x_2)]^{-1}$ (здесь учтено, что в верхней полуплоскости $|x_2| = x_2$), Δ и ∇ — соответственно двумерные операторы Лапласа и градиента, $p(x_1)$ — заданная функция.

Соотношения (1.1)–(1.4) следует дополнить обычными условиями затухания упругого поля на бесконечности. Случай, когда нагрузки прикладываются на некотором расстоянии от трещины, сводится к рассматриваемому с помощью принципа Бюкнера [7].

Непосредственной проверкой можно убедиться, что общее решение векторного уравнения (1.1) имеет вид

$$\mathbf{u}(x_1, x_2) = \mathbf{B}(x_1, x_2) + \nabla b(x_1, x_2) \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{B} &= 0, \quad \Delta b = -\frac{1}{2} \gamma \nabla \cdot \mathbf{B} \quad (x_2 > 0) \\ \gamma(x_2) &= [1 - \nu(x_2)]^{-1} \end{aligned} \quad (1.6)$$

а компоненты тензора напряжений выражаются через функции $\mathbf{B} = (B_1, B_2)$ и b с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\alpha} &= \mu \nu \gamma \nabla \cdot \mathbf{B} + 2\mu \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(B_\alpha + \frac{\partial b}{\partial x_\alpha} \right) \\ \sigma_{12} &= \mu \left(\frac{\partial B_1}{\partial x_2} + \frac{\partial B_2}{\partial x_1} + 2 \frac{\partial^2 b}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \end{aligned} \quad (1.7)$$

в которых индекс α принимает значения 1 и 2, а суммирование по повторяющемуся индексу не проводится.

Другие формы общего решения уравнения (1.1) указаны в [8, 9]. Некоторые задачи для материалов с неоднородностью рассматриваемого типа изучены в [10, 11].

Эффективное решение краевых задач для уравнения (1.1) в полуплоскости может быть получено с помощью теории экспоненциального преобразования Фурье, определяемого следующим образом:

$$F\{\varphi(x_1, x_2)\}(k_1, x_2) = \varphi^F(k_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, x_2) \exp(ik_1 x_1) dx_1$$

Действуя оператором F на соотношения (1.6) и решая последовательно получаемые при этом обыкновенные дифференциальные уравнения с учетом условий на бесконечности, находим

$$\mathbf{B}^F(k_1, x_2) = \mathbf{C}(k_1) E_1(kx_2) \quad (1.8)$$

$b^F(k_1, x_2) = -k^{-1} E_2(kx_2) L_2(k_1, x_2) + E_1(kx_2) [C_3(k_1) - k^{-1} L_1(k_1, x_2)]$
где использованы обозначения

$$\mathbf{C} = (C_1, C_2), \quad E_1 = \exp(-kx_2), \quad E_2 = \exp(kx_2)$$

$$L_1 = \frac{D}{4} \int_0^{x_2} \gamma(s) ds, \quad L_2 = \frac{D}{4} \int_{x_2}^{\infty} \gamma(s) \exp(-2ks) ds$$

$$D = ik_1 C_1 + k C_2, \quad k = |k_1|$$

а $C_j(k_1)$ — произвольные функции ($j=1, 2, 3$).

Применяя преобразование Фурье к соотношениям (1.5), (1.7) и используя формулы (1.8), получаем представления компонентов вектора перемещений и тензора напряжений в пространстве изображений Фурье

$$u_1^F(k_1, x_2) = ik_1 k^{-1} E_2 L_2 + E_1 (C_1 - ik_1 C_3 + ik_1 k^{-1} L_1) \quad (1.9)$$

$$u_2^F(k_1, x_2) = E_1 (C_2 - k C_3 + L_1) - E_2 L_2$$

$$\mu^{-1} \sigma_{11}^F(k_1, x_2) = 2k E_2 L_2 - E_1 (\nu \gamma D + 2ik_1 C_1 + 2k^2 C_3 - 2k L_1)$$

$$\mu^{-1} \sigma_{22}^F(k_1, x_2) = -2k E_2 L_2 + E_1 (D - 2k C_2 + 2k^2 C_3 - 2k L_1)$$

$$\begin{aligned} \mu^{-1} \sigma_{12}^F(k_1, x_2) &= 2ik_1 E_2 L_2 + \\ &+ E_1 (2ik_1 k C_3 - k C_1 - ik_1 C_2 - 2ik_1 L_1) \end{aligned}$$

Полагая в (1.9) $C_1=0$ (что в данном случае не приводит к потере общности) и $x_2=0$, в частности, находим

$$\begin{aligned} u_2^F(k_1, 0) &= C_2(1-1/4kL) - kC_3 & (1.10) \\ \mu^{-1}\sigma_{22}^F(k_1, 0) &= -kC_2(1+1/2kL) + 2k^2C_3 \\ \mu^{-1}\sigma_{12}^F(k_1, 0) &= ik_1[2kC_3 - C_2(1-1/2kL)] \end{aligned}$$

$$L(k) = \int_0^{\infty} \gamma(s) \exp(-2ks) ds$$

Из третьего соотношения (1.10) следует, что граничное условие (1.2) будет удовлетворено, если положить

$$2kC_3 = (1-1/2kL)C_2 \quad (1.11)$$

При этом представления (1.10) принимают вид

$$u_2^F(k_1, 0) = 1/2C_2, \quad \mu^{-1}\sigma_{22}^F(k_1, 0) = -k^2LC_2 \quad (1.12)$$

Исключая из (1.12) функцию $C_2(k_1)$, устанавливаем следующую формулу связи между преобразованиями Фурье нормальных напряжений и нормальных перемещений в точках границы полуплоскости:

$$\sigma_{22}^F(k_1, 0) = -2\mu k^2 L(k) u_2^F(k_1, 0) \quad (1.13)$$

Далее ограничимся рассмотрением случая, когда нагрузка $p(x_1)$ является четной функцией. Из соображений симметрии следует, что при этом функции $u_2(x_1, 0)$ и $\sigma_{22}(x_1, 0)$ тоже четные, так что соотношение (1.13) заменяется следующим (далее нет необходимости различать k_1 и k):

$$\sigma_{22}^c(k, 0) = -2\mu k^2 L(k) u_2^c(k, 0) \quad (1.14)$$

где использовано обозначение для косинус-преобразования Фурье

$$\varphi^c(k) = \int_0^{\infty} \varphi(x) \cos(kx) dx$$

2. Получение интегрального уравнения Фредгольма. Использование формулы (1.14) позволяет привести рассматриваемую задачу к парным интегральным уравнениям, связанным с обобщенным интегральным оператором Ханкеля

$$S_{\nu, \alpha} \{ \varphi(x) \} (k) = \left(\frac{2}{k} \right)^{\alpha} \int_0^{\infty} x^{1-\alpha} \varphi(x) J_{2\nu+\alpha}(kx) dx$$

где $J_{\alpha}(x)$ — функция Бесселя первого рода. Вводя обозначение

$$\psi(k) = S_{-\nu, 1/2} \{ u_2(x_1, 0) \} (k) \quad (2.1)$$

представим соотношение (1.14) в виде $S_{-\nu, 1/2} \{ \sigma_{22}(x_1, 0) \} (k) = -2\mu k^2 L(k) \times \times \psi(k)$, откуда после некоторых преобразований получим представление для нормальных напряжений в точках границы полуплоскости через функцию ψ :

$$\begin{aligned} \sigma_{22}(x_1, 0) &= -2\mu(1-\nu_0)^{-1} x_1^{-1} S_{\nu, -\nu_2} \{ [1+G(k)] \psi(k) \} (x_1) & (2.2) \\ 1+G(k) &= 2(1-\nu_0) k L(k), \quad \nu_0 = \nu(0) \end{aligned}$$

С помощью предельной теоремы для преобразования Лапласа [12] (очевидно, что $L(k)$ является преобразованием Лапласа от функции $\gamma(x_2)$ с параметром преобразования $2k$) устанавливаем: $\lim_{k \rightarrow \infty} G(k) = 0$.

Представление для нормальных перемещений в точках границы полуплоскости через функцию ψ вытекает из (2.1):

$$u_2(x_1, 0) = S_{0, -1/2} \{ \psi(k) \} (x_1) \quad (2.3)$$

Удовлетворяя с помощью (2.2) и (2.3) граничным условиям (1.3) и (1.4), приходим к парным интегральным уравнениям относительно функции $\psi(k)$

$$S_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}\{(1+G)\psi\}(x_1) = (1-\nu_0)x_1 p(x_1)/2\mu \quad (0 < x_1 < a) \quad (2.4)$$

$$S_{0, -\frac{1}{2}}\{\psi\}(x_1) = 0 \quad (a < x_1 < \infty)$$

Полагая ($h(z) = 0$ при $z > a$) $\psi(k) = \pi^{-\frac{1}{2}}(1-\nu_0)\mu^{-1}S_{-\frac{1}{2}, 1}\{zh(z)\}(k)$, приводим парные уравнения (2.4) к следующему интегральному уравнению Фредгольма второго рода относительно вспомогательной функции $h(z)$ на отрезке $[0, a]$:

$$h(z) + \int_0^a K(z, s)h(s)ds = \int_0^z \frac{p(x_1)dx_1}{(z^2-x_1^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (0 \leq z \leq a) \quad (2.5)$$

$$K(z, s) = \int_0^\infty kG(k)J_0(zk)J_0(sk)dk$$

После решения интегрального уравнения (2.5), заранее неизвестные нормальные перемещения и нормальные напряжения в точках границы полуплоскости определяются через функцию $h(z)$ с помощью квадратур:

$$u_2(x_1, 0) = \frac{2(1-\nu_0)}{\pi\mu} \int_{x_1}^a \frac{h(z)z dz}{(z^2-x_1^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (0 \leq x_1 \leq a) \quad (2.6)$$

$$\sigma_{22}(x_1, 0) = -\frac{2}{\pi} \frac{d}{dx_1} \int_0^a \frac{h(z)z dz}{(x_1^2-z^2)^{\frac{1}{2}}} +$$

$$+ \int_0^a h(z)z dz \int_0^\infty kG(k)J_0(zk) \cos(x_1k) dk \quad (a < x_1 < \infty)$$

Основной интерес в задачах о трещинах представляет величина коэффициента интенсивности напряжений, определяемого формулой

$$K_I = \lim_{x_1 \rightarrow a+0} [2(x_1-a)]^{\frac{1}{2}} \sigma_{22}(x_1, 0) \quad (2.7)$$

Подставляя второе соотношение (2.6) в (2.7), после некоторых вычислений получаем

$$K_I = 2\pi^{-\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} h(a) \quad (2.8)$$

3. Решение интегрального уравнения. В случае произвольного закона изменения коэффициента Пуассона для решения интегрального уравнения (2.5) следует использовать численные методы. Однако можно указать нетривиальный закон изменения $\nu(x_2)$, когда уравнение (2.5) допускает построение точного аналитического решения.

Пусть

$$\nu(x_2) = [1 - \nu(x_2)]^{-1} = b_1 + b_2 \cos(b_3 x_2) \quad (3.1)$$

где b_j ($j=1, 2, 3$) — некоторые постоянные, так что функция $\nu(x_2)$ периодическая.

Ограничивая диапазон значений $\nu(x_2)$ отрезком $[0, \frac{1}{2}]$ и учитывая четность функции $\cos x$, устанавливаем следующие области допустимых значений для параметров b_j ($b = b_2/b_1$):

$$0 \leq b_3 < \infty, \quad 1 \leq b_1 \leq 2 \quad (3.2)$$

$$(2\nu_0 - 1)(3 - 2\nu_0)^{-1} \leq b \leq \nu_0(2 - \nu_0)^{-1}$$

Для закона (3.1) ядро интегрального уравнения (2.5) принимает вид:

$$K(z, s) = -\beta \int_0^\infty \frac{kJ_0(zk)J_0(sk)dk}{k^2 + \alpha^2} = -\beta \begin{cases} I_0(\alpha s)K_0(\alpha z) & (0 \leq s \leq z) \\ I_0(\alpha z)K_0(\alpha s) & (0 \leq z \leq s) \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\alpha = b_3/2; \quad \beta = \alpha^2 b(1+b)^{-1}$$

где $I_0(x)$ и $K_0(x)$ — модифицированные функции Бесселя.

С помощью (3.3) запишем уравнение (2.5) следующим образом:

$$h(z) = \beta K_0(\alpha z) \int_0^z I_0(\alpha s) h(s) s ds + \beta I_0(\alpha z) \int_z^a K_0(\alpha s) h(s) s ds + r(z) \quad (0 \leq z \leq a) \quad (3.4)$$

$$r(z) = \int_0^z p(x_1) (z^2 - x_1^2)^{-1/2} dx_1$$

Дважды дифференцируя (3.4) по z и вводя новую функцию $\theta(z) = h(z) - r(z)$, приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка относительно этой функции ($\kappa^2 = \beta/b$):

$$d^2\theta(z)/dz^2 + z^{-1}d\theta(z)/dz - \kappa^2\theta(z) = -\beta r(z) \quad (3.5)$$

Общее решение уравнения (3.5) выражается через модифицированные функции Бесселя от аргумента κz : $\theta(z) = A_1 I_0(\kappa z) + A_2 K_0(\kappa z) + R(z)$, где A_1 и A_2 — произвольные постоянные, а $R(z)$ — некоторое частное решение неоднородного уравнения (3.5).

Следовательно, решение интегрального уравнения (3.4) имеет вид

$$h(z) = A_1 I_0(\kappa z) + A_2 K_0(\kappa z) + R(z) + r(z)$$

причем постоянные A_1 и A_2 зависят от вида нагрузки, прикладываемой к поверхностям трещины.

В качестве примера рассмотрим случай, когда поверхности трещины находятся под действием постоянного внутреннего давления $p(x_1) \equiv p = \text{const}$. При этом $r(z) = 1/2 \pi p = p^*$, $R(z) = b p^*$ и

$$h(z) = A_1 I_0(\kappa z) + A_2 K_0(\kappa z) + (1+b)p^* \quad (3.6)$$

Подставляя (3.6) в (3.4) и исследуя асимптотическое поведение правой части при $z \rightarrow 0$, заключаем, что $h(z)$ ограничена при $z=0$. Поэтому в (3.6) следует положить $A_2=0$, так как функция $K_0(z)$ имеет в нуле особенность логарифмического типа. После этого, внося (3.6) в (3.4) и полагая $z=0$, получаем следующее соотношение для определения постоянной A_1 :

$$A_1 + b p^* = \beta(1+b)p^* \int_0^a K_0(\alpha s) s ds + A_1 \beta \int_0^a I_0(\alpha s) K_0(\alpha s) s ds \quad (3.7)$$

Вычисляя фигурирующие в (3.7) интегралы, находим

$$A_1 = -b p^* K_1(\omega) [I_0(\omega^*) K_1(\omega) + \varepsilon K_0(\omega) I_1(\omega^*)]^{-1} \quad (3.8)$$

$$\omega = b_3 a/2, \quad \varepsilon = (1+b)^{-1/2}, \quad \omega^* = \varepsilon \omega$$

Далее, подставляя (3.8) в (3.6) и полагая $A_2=0$, определяем функцию $h(z)$:

$$h(z) = (1+b)p^* - \frac{b p^*}{1+W(b, \omega)} \frac{I_0(\kappa z)}{I_0(\omega^*)} \quad (3.9)$$

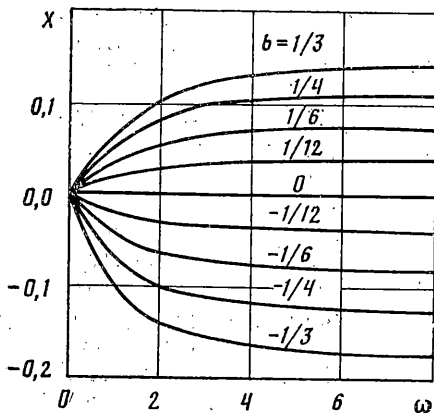
$$W(b, \omega) = \varepsilon K_0(\omega) I_1(\omega^*) [K_1(\omega) I_0(\omega^*)]^{-1}$$

и, в частности,

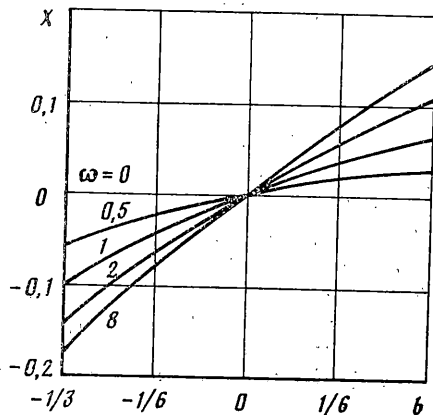
$$h(a) = (1+b)p^* - b p^* [1+W(b, \omega)]^{-1} \quad (3.10)$$

В соответствии с (3.9), $h(z)$ выражается через модифицированные функции Бесселя нулевого и первого порядка. Достаточно подробные таблицы этих функций приведены в [13].

Заметим, что интегральное уравнение типа (3.4) решалось ранее [14] методом приведения к дифференциальному уравнению, однако постоян-



Фиг. 1



Фиг. 2

ные определялись более трудоемким способом в результате удовлетворения исходным парным интегральным уравнениям.

4. Вычисление коэффициента интенсивности напряжений. Зная функцию $h(z)$, можно вычислить величину раскрытия трещины и нормальные напряжения на продолжении линии трещины в соответствии с формулами (2.6).

Ниже ограничимся определением величины коэффициента интенсивности напряжений нормального отрыва. При этом удобно перейти к безразмерному коэффициенту интенсивности напряжений $K_I^* = K_I / K_I^0$, где $K_I^0 = \rho a^{1/2}$ — величина коэффициента интенсивности для трещины в однородной плоскости.

Подставляя (3.10) в (2.8), после некоторых преобразований находим

$$K_I^* = 1 + X(b, \omega) \quad (4.1)$$

$$X = bW(b, \omega) [1 + W(b, \omega)]^{-1}$$

Величина X характеризует влияние неоднородности упругого материала на коэффициент интенсивности напряжений нормального отрыва и зависит лишь от двух безразмерных параметров $b = b_2/b_1$ и $\omega = b_3 a/2$. В случае однородного материала величина K_I^0 не зависит от упругих постоянных.

Параметр ω может принимать произвольные значения из интервала $[0, \infty)$. Область значений параметра b определяется в соответствии с (3.2) и зависит от величины ν_0 . Можно проверить, что для любого $\nu_0 \in [0, 1/2]$ область допустимых значений параметра b содержится в интервале $[-1/3, 1/3]$.

При $b_2 = 0$ ($b = 0$) и $b_3 = 0$ ($\omega = 0$), что соответствует однородному материалу, $X = 0$ и (4.1) сводится к известному результату.

Особый интерес представляет исследование асимптотического поведения величины X при $\omega \rightarrow \infty$, что (при фиксированном a) соответствует переходу к случаю, когда $\nu(x_2)$ и $E(x_2)$ становятся быстроосциллирующими функциями. Используя асимптотические разложения модифицированных функций Бесселя при больших значениях аргумента, получаем

$$X(b, \infty) = b\varepsilon(1 + \varepsilon)^{-1} \quad (4.2)$$

Характер зависимости величины X от ω (при фиксированных b) и от b (при фиксированных ω) показан на фиг. 1 и 2 соответственно.

Приведенные результаты, в частности, показывают, что $|X|$ монотонно возрастает с ростом ω ($|b|$) при фиксированных значениях $b(\omega)$. С ростом ω величина $X(b, \omega)$ довольно быстро стремится к значению $X(b, \infty)$. К примеру, $X(1/4, 8) = 0,110$ и $X(1/4, \infty) = 0,118$.

Подставляя (4.2) в (4.1), получаем следующую простую формулу: $K_I^* = \varepsilon^{-1} = (1 + b)^{1/2}$, которая дает точное значение коэффициента интенсивности напряжений при $\omega = \infty$ и является достаточно хорошим приближением при $\omega > 8$.

Введем модифицированный коэффициент Пуассона $\nu^*(x_2)$ с помощью соотношения

$$[1-\nu^*(x_2)] [1+\nu(x_2)] = 1 \quad (4.3)$$

Заменяя в приведенных выше формулах для плоской деформации коэффициент Пуассона $\nu(x_2)$ на модифицированный коэффициент Пуассона $\nu^*(x_2)$, получим решение аналогичной задачи, справедливое для обобщенного плоского напряженного состояния.

Заметим, что при решении интегрального уравнения (2.5) удобно задаваться законом изменения функции $\gamma(x_2)$, а не $\nu(x_2)$. Поэтому решение, полученное для закона $\gamma(x_2) = \varphi(x_2)$, в случае плоской деформации соответствует коэффициенту Пуассона $\nu(x_2) = [\varphi(x_2) - 1] / \varphi(x_2)$, а в случае плоского напряженного состояния — коэффициенту Пуассона $\nu(x_2) = \varphi(x_2) - 1$; что проверяется с помощью (4.3). Таким образом, задаваясь видом функции $\gamma(x_2)$, получаем решения задачи о трещине, отвечающие разным законам изменения коэффициента Пуассона в случаях плоской деформации и обобщенного плоского напряженного состояния.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Erdogan F.* The crack problem for bonded nonhomogeneous materials under antiplane shear loading // Trans. ASME: J. Appl. Mech. 1985. V. 52. No. 4. P. 823–828.
2. *Delale F.* Mode-III fracture of bonded non-homogeneous materials // Eng. Fract. Mech. 1985. V. 22. No. 2. P. 213–226.
3. *Delale F., Erdogan F.* The crack problem for a nonhomogeneous plane // Trans. ASME: J. Appl. Mech. 1983. V. 50. No. 3. P. 609–614.
4. *Kassir M. K., Sih G. C.* Three-dimensional crack problems. Leyden: Noordhoff. 1975. 452 p.
5. *Милейко С. Т., Твардовский В. В.* Трещина в упругой среде с модулем упругости, периодически изменяющимся по координате // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 2. С. 112–117.
6. *Gurtin M. E.* The linear theory of elasticity // Handbuch der Physik. B, e. a.: Springer. 1972. Vol. VIa/2. 295 p.
7. *Cartwright D. J.* Stress intensity factor determination // Developments in fracture mechanics. London: Appl. Sci. Publ., 1979. V. 1. P. 29–65.
8. *Бородачев А. Н.* Об одном обобщении преобразования Нахди-Хсу и его применение к задачам теории упругости // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 4. С. 611–615.
9. *Ломакин В. А.* Теория упругости неоднородных тел. М.: Изд-во МГУ, 1976. 367 с.
10. *Плевако В. П.* Двумерная обратная задача теории упругости неоднородных сред в полярных координатах // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 5. С. 775–783.
11. *Бородачев А. Н., Дудинский В. И.* Контактная задача для упругого полупространства с переменным коэффициентом Пуассона // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 1. С. 86–91.
12. *Слепян Л. И., Яковлев Ю. С.* Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики. Л.: Судостроение, 1980. 343 с.
13. Таблицы значений функций Бесселя от мнимого аргумента. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1950. 404 с.
14. *Паргон В. З., Морозов Е. М.* Механика упруго-пластического разрушения. М.: Наука, 1974. 416 с.

Киев

Поступила в редакцию
16.III.1988