МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1989

УДК 539.376

Я. М. КЛЕБАНОВ

НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ НАСЛЕДСТВЕННОСТИ

Рассматриваются общие закономерности поведения тел из материалов с нелинейными наследственными свойствами. Устанавливается единственность решения краевых задач, показывается выполнение принципа конвергентности решений и исследуются условия существования некоторых частных вариационных принципов.

1. Введение. Рассматриваются некоторые общие закономерности поведения среды, процесс деформирования которой описывается нелинейными наследственными зависимостями вида

$$\varepsilon_{ij}(x_m,\xi)=E^{-1}[(1+\nu)\sigma_{ij}(x_m,\xi)-\nu\delta_{ij}\sigma_{kk}(x_m,\xi)]+ \tag{1.1}$$
$$+\int_0^\xi U(\xi-\zeta,\sigma_e(x_m,\zeta))s_{ij}(x_m,\zeta)\,d\zeta$$
$$s_{ij}=\sigma_{ij}-{}^1/_3\delta_{ij}\sigma_{kk},\quad \sigma_e^2={}^3/_2s_{ij}s_{ij}\quad (i,j,k,m=1,2,3)$$

или альтернативными зависимостями

$$\sigma_{ij}(x_m,\xi)=2\mu\varepsilon_{ij}(x_m,\xi)+\lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk}(x_m,\xi)+ \tag{1.2}$$
$$+\int_0^\xi K(\xi-\zeta,\varepsilon_e(x_m,\zeta))\varepsilon_{ij}(x_m,\zeta)\,d\zeta,\quad \varepsilon_e^2={}^2/_3\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}$$

Здесь ε_{ij}, σ_{ij} — деформации и напряжения, образующие непрерывные тензорные поля, E, ν, μ, λ — упругие константы, $\mu>0$; $-1\leqslant\nu<0{,}5$; U, K — ограниченные функции, x_i — пространственные координаты, ξ — приведенное время, связанное с физическим временем t с помощью масштаба $d\xi/dt=g[q_r(x_m,t)]$ $(r=1,2,\ldots)$, где q_r — параметры состояния, в качестве которых могут выступать характеристики напряженного или деформированного состояний, температура, влажность, плотность потока нейтронов и другие [1—4]. При этом в (1.1) среди q_r отсутствуют деформации, а в (1.2) — напряжения. При $g\equiv1$ зависимости (1.1) и (1.2) сводятся к уравнениям наследственности без временной аналогии.

2. Единственность решений краевых задач. Заметим, что единственность решения задач линейной вязкоупругости доказывается в [5, 6], для среды с нелинейной вязкостью — в [7, 8] и для нелинейных наследственных уравнений частного вида — в [9].

Рассмотрим односвязное тело объема Ω. При $t<0$ оно находилось в естественном ненапряженном состоянии, а при $t=0$ к нему прикладываются поверхностные и массовые силы, изменяющиеся во времени. Полагаем сначала, что ползучесть материала описывается зависимостями (1.1).

Предположим, что существует два различных решения и обозначим их $\overset{(1)}{\varepsilon}_{ij}$, $\overset{(1)}{\sigma}_{ij}$ и $\overset{(2)}{\varepsilon}_{ij}$, $\overset{(2)}{\sigma}_{ij}$. Разность решений обозначим через $\Delta\varepsilon_{ij}=\overset{(1)}{\sigma}_{ij}-\overset{(2)}{\varepsilon}_{ij}$; $\Delta\sigma_{ij}=\overset{(1)}{\sigma}_{ij}-\overset{(2)}{\sigma}_{ij}$. Имеет место равенство

$$\int_\Omega \Delta\varepsilon_{ij}(x_m,t)\,\Delta\sigma_{ij}(x_m,t)\,d\Omega=0 \qquad (2.1)$$

Подставляя сюда (1.1), получаем

$$E^{-1}\int_\Omega [\,(1+\nu)\,\Delta\sigma_{ij}(x_m,t)\,\Delta\sigma_{ij}(x_m,t)-\nu\,(\Delta\sigma_{kk}(x_m,t))^2]\,d\Omega+$$

$$+\int_\Omega\int_0^t \Delta\sigma_{ij}(x_m,t)\,X_{ij}(x_m,t,\zeta)\,d\zeta\,d\Omega=0$$

$$X_{ij}(x_m,t,\zeta)=U\Big(\int_\zeta^t g^{(1)}(x_m,\tau)\,d\tau,\,\sigma_e^{(1)}(x_m,\zeta)\Big)\,g^{(1)}(x_m,\zeta)\,s_{ij}\ (x_m,\zeta)-$$

$$-U\Big(\int_\zeta^t g^{(2)}(x_m,\tau)\,d\tau,\,\sigma_e^{(2)}\ (x_m,\zeta)\Big)\,g^{(2)}(x_m,\zeta)\,s_{ij}^{(2)}\ (x_m,\zeta)$$

Из теоремы о среднем следует

$$\Big|\int_\zeta^t [\,g^{(1)}(x_m,\tau)-g^{(2)}(x_m,\tau)\,]\,d\tau\Big|\leqslant g_+{}'(x_m,t_+)\int_\zeta^t \Delta\sigma_e(x_m,\tau)\,d\tau$$

где $t_+\in[\zeta,\ t]$; $g_+{}'=\partial g/\partial\sigma_e$ при $\sigma_e=\sigma_e{}^+$, $\sigma_e{}^+\in[\sigma_e{}^{(1)},\ \sigma_e{}^{(2)}]$. Используя теорему о среднем для произведения $U(\xi,\sigma_e)g$ и учитывая неравенство $|\sigma_e^{(1)}-\sigma_e^{(2)}|\leqslant\Delta\sigma_e$, можно показать, что существуют величины $M_1(Z)$ и $M_2(Z)$ такие, что для любых $0<\tau<Z$ и $t\geqslant0$ имеет место оценка

$$|X_{ij}|\leqslant|U(\xi^{(2)},\sigma_e^{(2)})\,g^{(2)}\Delta s_{ij}|+M_1(Z)\,\Delta\sigma_e|\,s_{ij}^{(1)}\ |+M_2(Z)\,|\,s_{ij}^{(1)}\,|\ \int^t \Delta\sigma_e(x_m,\tau)\,d\tau$$

Нетрудно далее убедиться, что

$$\Big|\int_0^t\int_\zeta^t \Delta\sigma_e(x_m,\tau)\,d\tau\,d\zeta\,\Big|\leqslant 2t\int_0^t \Delta\sigma_e(x_m,\zeta)\,d\zeta$$

Учитывая это соотношение, с помощью неравенств Минковского и Коши — Шварца можно показать, что существует величина $C(Z)$ такая, что для всех $t\leqslant Z$:

$$\Big|\int_\Omega\int_0^t \Delta\sigma_{ij}(x_m,t)\,X_{ij}(x_m,t,\zeta)\,d\zeta\,d\Omega\Big|\leqslant$$

$$\leqslant C(Z)\Big[\int_\Omega \Delta\sigma_{ij}(x_m,t)\,\Delta\sigma_{ij}(x_m,t)\,d\Omega\Big]^{1/2}\int_0^t\Big[\int_\Omega \Delta s_{ij}(x_m,\zeta)\,\Delta s_{ij}(x_m,\zeta)\,d\Omega\Big]^{1/2}d\zeta$$

Теперь из (2.2) следует, что при $0\leqslant t\leqslant Z$:

$$E^{-1}\int_\Omega [\,(1+\nu)\,\Delta\sigma_{ij}(x_m,t)\,\Delta\sigma_{ij}(x_m,t)-\nu\,(\Delta\sigma_{kk}(x_m,t))^2]\,d\Omega\leqslant$$

$$\leqslant C(Z)\,v_1(t)\int_0^t\Big[\int_\Omega \Delta s_{ij}(x_m,\zeta)\,\Delta s_{ij}(x_m,\zeta)\,d\Omega\Big]^{1/2}d\zeta$$

$$v_1(t)=\Big[\int_\Omega \Delta\sigma_{ij}(x_m,t)\,\Delta\sigma_{ij}(x_m,t)\,d\Omega\Big]^{1/2}$$

Так как $(\sigma_{kk})^2 \leqslant 3\sigma_{ij}\sigma_{ij}$, $s_{ij}s_{ij} = \sigma_{ij}\sigma_{ij} - {}^1/_3(\sigma_{kk})^2$, то в результате получаем

$$v_1(t) \leqslant \frac{E}{1-2\nu} C(Z) \int_0^t v_1(\zeta)\, d\zeta$$

Согласно леммы Гронуолла это условие означает, что $v_1 \equiv 0$ на $t \in [0, Z]$. Последнее возможно лишь при $\Delta\sigma_{ij} \equiv 0$. Таким образом, единственность решения краевой задачи доказана.

Для несжимаемого материала $\nu = {}^1/_2$ и вместо (1.1) принимаем

$$\varepsilon_{ij}(x_m, \zeta) = \frac{3}{2E} s_{ij}(x_m, \xi) + \int_0^{\xi} U(\xi - \zeta, \sigma_e(x_m, \zeta))\, s_{ij}(x_m, \zeta)\, d\zeta$$

Тогда из (2.1) следует

$$\int_\Omega \Delta\varepsilon_{ij}(x_m, t)\, \Delta s_{ij}(x_m, t)\, d\Omega = 0$$

и по аналогии с предыдущим можно показать, что величина

$$v_2(t) = \left[\int_\Omega \Delta s_{ij}(x_m, t)\, \Delta s_{ij}(x_m, t)\, d\Omega \right]^{1/2}$$

удовлетворяет неравенству типа Гронуолла. Отсюда $\Delta s_{ij} \equiv 0$, т. е. решение для несжимаемой среды единственно с точностью до величины гидростатического давления.

Для определяющих зависимостей (1.2) единственность решения краевой задачи ползучести также имеет место. Неравенство Гронуолла выполняется здесь для величины

$$v_3(t) = \left[\int_\Omega \Delta\varepsilon_{ij}(x_m, t)\, \Delta\varepsilon_{ij}(x_m, t)\, d\Omega \right]^{1/2}$$

Для несжимаемой среды тензор напряжений в (1.2) заменяют девиатором [10]. Здесь единственность напряженного состояния имеет место с точностью до гидростатического давления.

3. Асимптотическое поведение среды с неустановившимся полем напряжений. Здесь ведущую роль имеет доказательство принципа конвергентности решений, который устанавливает, что в двух идентичных телах, программы нагружения которых различались только до некоторого момента времени t_0, напряжения с течением времени сближаются.

Возьмем определяющее уравнение в виде (1.1). Предположим, что имеет место разложение

$$U(\xi, \sigma_e) = \sum_{\alpha=1}^{d} U_\alpha(\xi) F_\alpha(\sigma_e) \tag{3.1}$$

и выполняются условия выпуклости в форме

$$[F_\alpha(\sigma_e^{(1)}) g^{(1)} s_{ij}^{(1)} - F_\alpha(\sigma_e^{(2)}) g^{(2)} s_{ij}^{(2)}]\, \Delta s_{ij} \geqslant 0 \tag{3.2}$$

где равенство имеет место лишь при $\Delta s_{ij} = 0$.

Представление (3.1) при $d \to \infty$ может соответствовать любому заданному семейству кривых ползучести при постоянном напряжении.

Пусть истории нагружения первого тела соответствуют напряжения и деформации $\sigma_{ij}^{(1)}$, $\varepsilon_{ij}^{(1)}$, а второго — $\sigma_{ij}^{(2)}$, $\varepsilon_{ij}^{(2)}$. Тогда их разности будут отвечать условию (2.1) при $t \geqslant t_0$. Из равенства (2.1) следует, что предел его левой части при $t \to \infty$ существует и равен нулю. Для этого достаточно

[11], чтобы интегральные операторы в (1.1) удовлетворяли условию затухающей памяти $U_\alpha(\infty)=0$ $(\alpha=1,\ldots,d)$, где $U_\alpha(\infty)=\lim_{\xi\to\infty}U_\alpha(\xi)$ и условию ограниченности, означающему существование конечных пределов $\int U_\alpha(\xi-\zeta)d\zeta=U_{\alpha\infty}$ (интегрирование от 0 до ∞). При этих условиях и $t\to\infty$ вместо (2.1) получаем равенство

$$\int_\Omega \Big\{ [(1+\nu)\Delta\sigma_{ij}(x_m,\infty)\Delta\sigma_{ij}(x_m,\infty)-\nu(\Delta\sigma_{kk}(x_m,\infty))^2](2E)^{-1}+$$

$$+\Delta\sigma_{ij}(x_m,\infty)\sum_{\alpha=1}^{d}U_{\alpha\infty}[F_\alpha(\sigma_e^{(1)}(x_m,\infty))g^{(1)}(x_m,\infty)s_{ij}^{(1)}(x_m,\infty)-$$

$$-F_\alpha(\sigma_e^{(2)}(x_m,\infty))g^{(2)}(x_m,\infty)s_{ij}^{(2)}(x_m,\infty)]\Big\}d\Omega=0$$

Его выполнение с учетом (3.2) возможно лишь при $\Delta\sigma_{ij}(x_m,\ \infty)=0$. Отсюда следует $\Delta\varepsilon_{ij}(x_m,\ \infty)=0$, т. е. имеет место конвергентность решений. Для несжимаемого материала $\Delta s_{ij}(x_m,\ \infty)=0$.

Также доказывается выполнение принципа конвергентности и для тел, материал которых следует уравнениям (1.2) при $K(\infty,\ \varepsilon_e)=0$.

Пусть теперь существует предел $U(\infty,\ \sigma_e)>0$. Вместо (2.1) используется равенство $\int_\Omega \Delta\sigma_{ij}(x_m,t)\Delta\dot\varepsilon_{ij}(x_m,t)\,d\Omega=0$, имеющее место при $t\geqslant t_0$. При $t\to\infty$ получаем

$$\int_\Omega \Big\{ \frac{1}{2E}\lim_{t\to\infty}\frac{\partial}{\partial t}[(1+\nu)\Delta\sigma_{ij}(x_m,t)\Delta\sigma_{ij}(x_m,t)-\nu(\Delta\sigma_{kk}(x_m,t))^2]+$$

$$+\Delta\sigma_{ij}(x_m,\infty)\sum_{\alpha=1}^{d}U_\alpha(\infty)[F_\alpha(\sigma_e^{(1)}(x_m,\infty))g^{(1)}(x_m,\infty)s_{ij}^{(1)}(x_m,\infty)-$$

$$-F_\alpha(\sigma_e^{(2)}(x_m,\infty))g^{(2)}(x_m,\infty)s_{ij}^{(2)}(x_m,\infty)]\Big\}d\Omega=0$$

Упругий потенциал не может принимать отрицательные значения и, следовательно, скорость его при $t\to\infty$ также неотрицательна. Учитывая условие (3.2) приходим к выводу, что в последнем равенстве оба слагаемых равны нулю. Это возможно лишь при $\Delta s_{ij}(x_m,\ \infty)=0$ т. е. конвергентность имеет место с точностью до величины гидростатического давления.

Конвергентность решений может быть доказана и для случая, когда заданы истории изменения перемещений отдельных точек тела при $U(\infty,\ \sigma_e)=0$ или их скоростей при $U(\infty,\ \sigma_e)>0$. При этом для идентичных тел заданные перемещения или их скорости отличаются только до момента времени t_0.

4. Вариационные принципы. Интегральные операторы, входящие в определяющие уравнения (1.1) и (1.2), непотенциальны. Это приводит к необходимости вводить дополнительные требования к вариациям при построении вариационных уравнений, эквивалентных системе уравнений наследственной теории [11]. В [12—14] при разработке приближенных расчетных методов принималось, что при варьировании напряжений или деформаций их скорости не варьируются. Рассмотрим условия выполнения соответствующих минимальных принципов.

Для удобства выкладок введем следующие градиентальные зависимости $(\Phi\geqslant0,\ \Lambda\leqslant0)$:

$$U(\xi,\ \sigma_e)s_{ij}=\partial\Phi(\xi,\ \sigma_e)/\partial\sigma_{ij},\qquad K(\xi,\ \varepsilon_e)\varepsilon_{ij}=\partial\Lambda(\xi,\ \varepsilon_e)/\partial\varepsilon_{ij}\tag{4.1}$$

Пусть поведение среды описывается определяющими зависимостями (1.1). Для отыскания поля истинных напряжений σ_{ij0} среди статически возможных полей σ_{ij} введем локальный потенциал [14]:

$$J[\sigma_{ij},\sigma_{ij0}]=\int\limits_\Omega \Psi(\sigma_{ij}(x_m,t),\sigma_{ij0}(x_m,t))\,d\Omega$$

$$\Psi(\sigma_{ij},\sigma_{ij0})=\Pi[\sigma_{ij}(x_m,t)]+\int\limits_0^t \Phi\left(\int\limits_\zeta^t g(x_m,\tau)\,d\tau,\sigma_e(x_m,\zeta)\right)g(x_m,\zeta)\,d\zeta$$

$$\Pi(\sigma_{ij})=(2E)^{-1}[(1+\nu)\sigma_{ij}\sigma_{ij}-\nu(\sigma_{kk})^2]$$

В число параметров состояния q_r входят характеристики только истинного напряженного состояния σ_{ij0}.

Варьируя J по σ_{ij} и полагая затем $\sigma_{ij}=\sigma_{ij0}$, получаем условие первого порядка для минимума введенного потенциала

$$\delta J[\sigma_{ij},\sigma_{ij0}]\,|_{\sigma_{ij}=\sigma_{ij0}}=0 \tag{4.2}$$

Нетрудно убедиться, что при принятом ограничении $\delta\sigma_{ij}^{\cdot}=0$ условие (4.2) совпадает с необходимым условием минимума дополнительной работы.

Пусть $\delta\varepsilon_{ij}$ — бесконечно малые приращения деформаций, отвечающие бесконечно малым приращениям напряжений в соответствии с (1.1). Потребуем выполнение условия локальной устойчивости в форме

$$\delta\varepsilon_{ij}(x_m,\ t)\,\delta\sigma_{ij}(x_m)\geqslant 0 \tag{4.3}$$

Оно совпадает с условием неотрицательности работы приращений напряжений на соответствующих приращениях деформаций. Равенство в (4.3) возможно лишь при $\delta\sigma_{ij}=0$. Нетрудно убедиться, что теперь выполняется и второе условие существования локального потенциала — условие строгого минимума вблизи стационарного решения $J[\sigma_{ij},\ \sigma_{ij0}]-J[\sigma_{ij0},\ \sigma_{ij0}]>$ >0. Действительно, пусть $\sigma_{ij}=\sigma_{ij0}+\gamma\delta\sigma_{ij}$. Разложим функционал $J[\sigma_{ij0}+$ $+j\delta\sigma_{ij},\ \sigma_{ij0}]$ по степеням γ до порядка γ^2 и положим затем $\gamma=1$. Учитывая $\int_\Omega \varepsilon_{ij}\delta\sigma_{ij}d\Omega=0$, что в силу самоуравновешенности поля напряжений $\delta\sigma_{ij}$, приходим к зависимости

$$J[\sigma_{ij},\sigma_{ij0}]-J[\sigma_{ij0},\sigma_{ij0}]={}^1/_2\int\limits_\Omega\left\langle 2\Pi[\delta\sigma_{ij}(x_m)]+\int\limits_0^t \partial^2\Phi[\xi-\zeta_1,\sigma_e(\sigma_{ij}(x_m,\zeta))]/\right.$$

$$\left./(\partial\sigma_{ij}\partial\sigma_{kl})\,|_{\sigma_{ij}=\sigma_{ij0}}g(x_m,\zeta)\,\delta\sigma_{ij}(x_m)\,\delta\sigma_{kl}(x_m)\,d\zeta\right\rangle d\Omega,\quad \xi-\zeta_1=\int\limits_\zeta^t g(x_m,\tau)\,d\tau$$

или

$$J[\sigma_{ij},\sigma_{ij0}]-J[\sigma_{ij0},\sigma_{ij0}]={}^1/_2\int\limits_\Omega \delta\varepsilon_{ij}(x_m,t)\,\delta\sigma_{ij}(x_m)\,d\Omega$$

Поскольку $\Pi\geqslant 0$, то для выполнения (4.3) достаточно потребовать выпуклость функции $\Phi(\xi,\ \sigma_{ij})\geqslant 0$ в пространстве напряжений.

Аналогичный вариационный принцип может быть сформулирован и на основе определяющих уравнений (1.2). Здесь локальный потенциал имеет вид

$$W[\varepsilon_{ij},\varepsilon_{ij0}]=\int\limits_\Omega \chi(\varepsilon_{ij}(x_m,t)),\varepsilon_{ij0}(x_m,t))\,d\Omega$$

$$\chi(\varepsilon_{ij},\varepsilon_{ij0})=R[\varepsilon_{ij}(x_m,t)]+\int\limits_0^t \Lambda\left(\int\limits_\zeta^t g(x_m,\tau)\,d\tau,\varepsilon_e(x_m,\zeta)\right)g(x_m,\zeta)\,d\zeta$$

$$R(\varepsilon_{ij})=\mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}+{}^1/_2\lambda(\varepsilon_{kk})^2$$

где ε_{ij0} — поле истинных деформаций в конструкции, а ε_{ij} — кинематически допустимые поля деформаций. В число параметров состояния q_r входят характеристики только истинного деформированного состояния.

Условие первого порядка получается при варьировании W по ε_{ij}: $\delta W[\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij0}]|_{\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij0}}=0$. При $\delta\dot{\varepsilon}_{ij}=0$ оно соответствует принципу минимума полной мощности для частного случая, когда объемные силы отсутствуют, а на той части поверхности, где не заданы перемещения, нагрузки равны нулю.

Соответствующее условие второго порядка выполняется, если имеет место неравенство

$$\delta\varepsilon_{ij}(x_m)\,\delta\sigma_{ij}(x_m, t)\geqslant 0 \tag{4.4}$$

где приращения $\delta\sigma_{ij}$ отвечают приращениям $\delta\varepsilon_{ij}$ в соответствии с (1.2).

Выполнение последнего неравенства осложняется в связи с тем, что $\Lambda\leqslant 0$. Пусть при деформировании конструктивного элемента относительного перераспределения деформаций не происходит [14], материал несжимаемый и имеет место разложение ($n_\alpha\geqslant 1$):

$$\Lambda(\xi, \varepsilon_e)=\sum_\alpha K_\alpha(\xi)\Lambda_\alpha(\varepsilon_e), \quad \Lambda_\alpha=\varepsilon_e^{n_\alpha+1}/(n_\alpha+1) \quad (\alpha=1,2,\ldots) \tag{4.5}$$

Тогда из (4.4) следует

$$E+\sum_\alpha\int_0^\xi K_\alpha(\xi-\zeta)\,n_\alpha[\varepsilon_e(x_m,\zeta)]^{n_\alpha-1}d\zeta\geqslant 0 \tag{4.6}$$

Для материала, линейного в шкале приведенного времени, $n_\alpha=1$ ($\alpha=1, 2, \ldots$) и приходим к известному условию [16]:

$$E+\sum_\alpha\int_0^\xi K_\alpha(\zeta)\,d\zeta\geqslant 0$$

При релаксации напряжений ($\varepsilon_{ij}=\mathrm{const}$) из (4.6) следует

$$E+\sum_\alpha n_\alpha\varepsilon_e^{n_\alpha-1}\int_0^\xi K_\alpha(\zeta)\,d\zeta\geqslant 0 \tag{4.7}$$

Выполнение этого условия проверялось по многочисленным экспериментальным данным для металлов и их сплавов, приведенным в [17, 18]; полагалось $g\equiv 1$. Нарушений условия (4.7) не отмечено.

5. Связь с устойчивостью по Ляпунову. В [7] показано, что условие локальной устойчивости для среды с нелинейной вязкостью при некоторых ограничениях совпадает с условием устойчивости по Ляпунову для системы дифференциальных уравнений движения. Рассмотрим здесь также тело с однородным напряженным состоянием, находящееся в условиях установившейся ползучести ($\sigma_{ij}(x_m, t)=\mathrm{const}$). Для перехода к дифференциальным уравнениям представим ядра в (4.5) в виде (суммирование по β): $K_\alpha(\xi)=-\Sigma a_{\alpha\beta}\exp(-\lambda_{\alpha\beta}\xi)$, где $a_{\alpha\beta}$, $\lambda_{\alpha\beta}$ — константы, $a_{\alpha\beta}>0$, $\lambda_{\alpha\beta}>0$.

Обозначим (здесь и далее суммирование по индексам α и β не производится):

$$d_{ij\alpha\beta}(x_m, \xi)=\frac{2}{3}a_{\alpha\beta}\int_0^\xi \exp(-\lambda_{\alpha\beta}(\xi-\zeta))\,[\varepsilon_e(\varepsilon_{ij}(x_m,\xi))]^{n_\alpha-1}\varepsilon_{ij}(x_m,\zeta)\,d\zeta$$

Тогда вместо (1.2) можно записать

$$\dot{d}_{ij\alpha\beta}=\frac{2}{3}a_{\alpha\beta}\varepsilon_e^{n_\alpha-1}\varepsilon_{ij}-\lambda_{\alpha\beta}d_{ij\alpha\beta} \tag{4.8}$$

при

$$\varepsilon_{ij}=\frac{3}{2E}\Big(s_{ij}+\sum_\alpha\sum_\beta d_{ij\alpha\beta}\Big)$$

Система (4.8) является автономной и имеет точку равновесия

$$d_{ij\alpha\beta}^{\circ}=\frac{2}{3}\frac{a_{\alpha\beta}}{\lambda_{\alpha\beta}}[\varepsilon_e(\varepsilon_{ij}^{\circ})]^{n_\alpha-1},\quad \varepsilon_{ij}^{\circ}=\frac{3}{2E}\left(s_{ij}+\sum_\alpha\sum_\beta d_{ij\alpha\beta}^{\circ}\right)$$

В соответствии с теоремой Ляпунова система (4.8) будет асимптотически устойчива, если все собственные значения матрицы

$$B_{rp}=A_r\frac{n_\alpha}{E}[\varepsilon_e(\varepsilon_{ij}^{\circ})]^{n_\alpha-1}-L_p\quad (p,r=1,2,\ldots)$$

будут иметь отрицательные действительные части. Здесь обозначено $A_r=a_{\alpha\beta}$, $L_r=\lambda_{\alpha\beta}$, каждой паре значений α, β соответствует определенное значение r.

Нетрудно убедиться, что из критерия Рауса — Гурвица для матрицы B_{rp} следует справедливость неравенства (4.6) при $\xi\to\infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Уржумцев Ю. С.* Прогнозирование длительного сопротивления полимерных материалов. М.: Наука, 1982. 222 с.
2. *Schapery R. A.* On the characterization of nonlinear viscoelastic materials // Polymer Eng. and Sci. 1969. V. 9. N 4. P. 295–310.
3. *Бугаков И. И., Чеповецкий М. А.* Сравнительное исследование нелинейных уравнений вязкоупругости // Изв. АН АрмССР. Механика. 1984. Т. 37. № 1. С. 56–63.
4. *Бугаков И. И.* Прогнозирование вязкоупругого поведения полимеров с помощью эндохронных уравнений // Вопросы прочности композиционных материалов и конструкций. Л.: Судостроение, 1984. С. 13–20.
5. *Curtin M. E., Sternberg E.* On the linear theory of viscoelasticity // Arch. Ration. Mech. and Analysis. 1962. V. 11. N 4. P. 291–356.
6. *Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б.* Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336 с.
7. *Цвелодуб И. Ю.* К теории нелинейной вязкоупругости // Изв. АН СССР МТТ. 1982. № 2. С. 70–75.
8. *Edelstein W. S.* On uniqueness of solutions for secondary creep problems // Intern. J. Solids and Struct. 1977. V. 13. N 9. P. 807–812.
9. *Победря Б. Е.* О сходимости метода «упругих» решений в нелинейной вязкоупругости // Докл. АН СССР. 1970. Т. 195. № 2. С. 307–310.
10. *Rivlin R. S.* On the foundations of the theory of nonlinear viscoelasticity // Mechanics of Viscoelastic Media and Bodies: Symp. in Gothenburg, 1974. Berlin: Springer. 1975. P. 26–40.
11. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 383 с.
12. *Клебанов Я. М.* Нелинейная наследственная ползучесть и оптимальное проектирование некоторых элементов конструкций // Изв. вузов. Машиностроение. 1984. № 7. С. 13–17.
13. *Клебанов Я. М., Сорокин О. В.* Приближенный метод решения задач нелинейной наследственной теории ползучести // Машиноведение. 1985. № 6. С. 90–95.
14. *Клебанов Я. М.* Приближенный метод расчета конструкций из вязкоупругих материалов с внутренним временем // Изв. вузов. Машиностроение. 1986. № 1. С. 29–35.
15. *Победря Б. Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1981. 343 с.
16. *Кристенсен Р.* Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974. 336 с.
17. *Либерман Л. Я., Пейсихис М. И.* Свойства сталей и сплавов, применяемых в котлотрубостроении. Л.: ЦКТИ. Ч. 1, 1966. 218 с. Ч. 2, 1966. 243 с. Ч. 3. 1967. 179 с.
18. *Лепин Г. Ф.* Ползучесть материалов и критерии жаропрочности. М.: Металлургия, 1976. 343 с.

Куйбышев

Поступила в редакцию
8.VII.1988