МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1989

УДК 539.214; 539.374

Ю. Н. РАДАЕВ

ДВУСТОРОННЯЯ ОЦЕНКА ПРЕДЕЛЬНОГО МОМЕНТА ПРИ ПЛАСТИЧЕСКОМ КРУЧЕНИИ

В теории кручения упругих тел [1, 2] доказано, что при заданной площади односвязного поперечного сечения призматического стержня круг имеет максимальную жесткость кручения. Аналогичная изопериметрическая теорема справедлива также для призматических стержней, находящихся в предельном состоянии [3]: предельный крутящий момент для стержня круглого поперечного сечения имеет наибольшую величину по сравнению с предельным моментом для стержня любого другого поперечного сечения заданной площади A.

В настоящей работе получены изопериметрические неравенства и дана двусторонняя оценка предельного крутящего момента для симметричных поперечных сечений. Установлена нижняя достижимая оценка величины предельного момента, справедливая и для несимметричного сечения. Уточнена верхняя оценка, полученная в [3]. Нижняя и верхняя оценки зависят от основных геометрических характеристик площади поперечного сечения, длины и кривизны контура сечения и т. п.

1. Представление предельного крутящего момента в виде контурного интеграла. Рассмотрим призматический стержень, сечение которого занимает односвязную область Ω на плоскости (x_1, x_2), $\gamma=\partial\Omega$ — гладкая выпуклая кривая, имеющая всюду конечную кривизну, A — площадь области Ω. Материал стержня характеризуется пределом текучести k.

При достижении предельного состояния весь материал стержня переходит в состояние пластического течения, соответствующее значение крутящего момента обозначим через $M_*(\gamma)$. Предельный крутящий момент связан с функцией напряжений Прандтля φ соотношением [4]:

$$M_*(\gamma)=2\iint\limits_{\Omega}\varphi\, dx_1\, dx_2 \tag{1.1}$$

Функция напряжений является решением задачи Коши для уравнения песчаной насыпи

$$(\partial\varphi/\partial x_1)^2+(\partial\varphi/\partial x_2)^2=k^2,\ (x_1, x_2)\in\Omega$$
$$\varphi|_\gamma=0 \tag{1.2}$$

Интеграл задачи Коши (1.2) в параметрической форме имеет вид

$$x_1=\lambda(s)-\xi\mu'(s),\ x_2=\mu(s)+\xi\lambda'(s),\ \varphi=k\xi \tag{1.3}$$

где $x_1=\lambda(s)$, $x_2=\mu(s)$, $0\leqslant s\leqslant l$ — уравнения контура γ; s — натуральный параметр вдоль γ; l — длина контура γ. Известно [4], что решение задачи Коши (1.2) не может быть непрерывно дифференцируемым всюду в Ω. Точки разрыва первых производных $\partial\varphi/\partial x_1$, $\partial\varphi/\partial x_2$ образуют гладкую кривую γ^*, либо множество, которое можно представить в виде объединения конечного числа гладких дуг. Кривая γ^* называется линией разрыва напряжений.

Для оценки предельного крутящего момента рассмотрим интеграл (1.1) и сделаем специальную замену переменных

$$x_1=\lambda(s)-\xi h(s)\mu'(s),\ x_2=\mu(s)+\xi h(s)\lambda'(s) \tag{1.4}$$

где $h(s)$ — расстояние от контура γ до линии разрыва γ^*, измеренное вдоль нормали к γ. В новых переменных будем иметь $\varphi=k\xi h(s)$, как это следует из уравнений (1.3). Отображение (1.4) преобразует прямоугольник $0\leqslant s\leqslant l$, $0\leqslant\xi\leqslant 1$ в замкнутую область Ω. Якобиан отображения (1.4) равен $J(\xi, s)=h(s)-\xi\varkappa(s)h^2(s)$, где $\varkappa(s)$ — кривизна контура γ, как функция натурального параметра s.

Если обозначить $f(s)=\varkappa(s)h(s)$, то интеграл (1.1) приводится к следующему

$$\frac{M_*(\gamma)}{2k}=\oint_\gamma\left(\frac{1}{2}f^2-\frac{1}{3}f^3\right)\frac{ds}{\varkappa^2} \tag{1.5}$$

Таким образом получено представление предельного крутящего момента в виде контурного интеграла. Альтернативный вывод (1.5) может быть получен, исходя из выражения [5] функции напряжений через опорную функцию контура сечения.

Изопериметрическое условие

$$A=\iint_\Omega dx_1\,dx_2$$

при помощи аналогичной замены переменных можно представить в следующем виде:

$$A=\oint_\gamma\left(f-\frac{1}{2}f^2\right)\frac{ds}{\varkappa} \tag{1.6}$$

Контур γ предполагается гладким, выпуклым и имеющим всюду конечную кривизну. При этом для всех $0\leqslant s\leqslant l$, $0\leqslant f(s)\leqslant 1$, то есть при движении вдоль нормали к γ внутрь контура γ сначала встречается линия разрыва, а уже потом — эволюта к контуру γ. Равенство $f(s)\equiv 1$ возможно только если γ является окружностью.

2. Нижняя оценка величины предельного момента. Представление предельного крутящего момента в виде контурного интеграла дает возможность получить ряд оценок снизу для $M_*(\gamma)$.

Интегральное неравенство Коши — Шварца с учетом (1.5), (1.6) позволяет установить следующую оценку

$$2kA^2\left\{\int_0^l\frac{[1-{}^1/_2f(s)]^2}{{}^1/_2-{}^1/_3f(s)}ds\right\}^{-1}\leqslant M_*(\gamma) \tag{2.1}$$

Так как функция $\tau(u)=(1-{}^1/_2u)^2({}^1/_2-{}^1/_3u)^{-1}$ достигает наибольшего значения на отрезке $[0,1]$ в точке $u=0$, то справедливо неравенство

$$kA^2l^{-1}<M_*(\gamma) \tag{2.2}$$

Необходимо отметить, что нижняя граница kA^2l^{-1} недостижима. Более точные оценки величины предельного крутящего момента могут быть получены из изопериметрического неравенства (2.1) следующим образом. Оценим сверху интеграл в левой части (2.1)

$$\int_0^l\frac{[1-{}^1/_2f(s)]^2}{{}^1/_2-{}^1/_3f(s)}ds\leqslant 6\int_0^l\left[1-\frac{1}{2}f(s)\right]^2ds\leqslant 6\left[\frac{5l}{4}-\int_0^l f(s)\,ds\right]$$

Следовательно для предельного момента $M_*(\gamma)$ имеет место более точная (достижимая) оценка снизу:

$$kA^2\left\{\frac{15l}{4}-3\int_0^l f(s)\,ds\right\}^{-1}\leqslant M_*(\gamma) \tag{2.3}$$

Изопериметрическое неравенство (2.3) можно преобразовать к еще более простому виду. Для этого предположим, что кривизна контура γ имеет на отрезке $[0, l]$ конечное число максимумов и минимумов. Обозначим

$R_m = \min_{0 \leqslant s \leqslant l} \varkappa^{-1}(s)$ — минимальный радиус кривизны контура γ. Справедливо следующее неравенство:

$$\int_0^l f(s)\,ds \geqslant R_m \int_0^l \varkappa(s)\,ds = 2\pi R_m \tag{2.4}$$

Неравенства (2.3), (2.4) позволяют получить следующую оценку

$$kA^2 (^{15}/_4 l - 6\pi R_m)^{-1} \leqslant M_*(\gamma) \tag{2.5}$$

Изопериметрическое неравенство (2.5) дает возможность судить о жесткости стержня по четырем характеристикам — площади поперечного сечения A, длине контура сечения стержня l, минимальному радиусу кривизны R_m и пределу текучести k.

Неравенство (2.3) содержит интеграл, существенно зависящий от формы контура γ. Величина этого интеграла достаточно просто вычисляется если γ является симметричным овалом с четырьмя вершинами. Под овалом понимается выпуклая замкнутая p раз дифференцируемая кривая ($p \geqslant 2$) [6]. Вершиной овала называется точка, в которой кривизна достигает локального экстремума.

Выберем оси симметрии овала γ в качестве координатных. Линия разрыва напряжений γ^* представляет собой прямолинейный отрезок, расположенный на оси симметрии, которую обозначим через x_1. Пусть α — угол между касательной к контуру γ и осью x_1; $x_1 = x_1(\alpha)$, $x_2 = x_2(\alpha)$ — параметризация γ специального вида (в качестве параметра взят угол наклона касательной к оси x_1). Так как

$$\int_0^l f(s)\,ds = -\int_0^{2\pi} \frac{x_2(\alpha)}{\cos\alpha}\,d\alpha$$

то оценка (2.3) может быть представлена следующим образом

$$kA^2 \left\{ \frac{15}{4} l + 3 \int_0^{2\pi} \frac{x_2(\alpha)}{\cos\alpha}\,d\alpha \right\}^{-1} \leqslant M_*(\gamma) \tag{2.6}$$

В частности для стержня эллиптического поперечного сечения с полуосями a, b ($a > b$) неравенство (2.6) имеет вид

$$2k\pi^2 a^3 b^2 [30a^2 \mathbf{E}(\varepsilon) - 24b^2 \mathbf{K}(\varepsilon)]^{-1} \leqslant M_*(\gamma)$$

где $\varepsilon = a^{-1}(a^2 - b^2)^{1/2}$ — эксцентриситет эллипса; $\mathbf{K}(\varepsilon)$, $\mathbf{E}(\varepsilon)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно.

3. Верхняя оценка величины предельного момента. Для симметричного овала с четырьмя вершинами может быть получена верхняя оценка предельного момента, более точная, чем оценка [3].

Как и выше через α будем обозначать угол между касательным к γ вектором к единичным ортом оси x_1, вдоль которой расположена линия разрыва γ^*. Параметр s выберем таким образом, чтобы при его возрастании контур γ обходился против часовой стрелки. Если обозначить $v(\alpha) = h(s(\alpha))$, заменить переменную интегрирования в (1.5), (1.6) и учесть, что $v(\alpha) = -x_2(\alpha)/\cos\alpha$, $\varkappa = d\alpha/ds$, $ds/d\alpha = x_1'(\alpha)\cos\alpha$, то для предельного момента и площади сечения получим следующие выражения

$$\frac{M_*(\gamma)}{2k} = \frac{1}{6} \int_0^{2\pi} \left[v^3(\alpha) - \operatorname{ctg}\alpha \frac{d}{d\alpha} v^3(\alpha) \right] d\alpha \tag{3.1}$$

$$2A = \int_0^{2\pi} \left[v^2(\alpha) - ctg\,\alpha \frac{d}{d\alpha} v^2(\alpha) \right] d\alpha \tag{3.2}$$

Формулы (3.1), (3.2) обладают очевидной симметрией, которая будет существенно использована в дальнейшем. Без ограничения общности можно принять, что $A=\pi$.

В интегралах (3.1), (3.2) заменим переменную $\alpha=\arccos t$ и обозначим $v(\arccos t)=w(t)$:

$$\frac{M_*(\gamma)}{2k}=\frac{2}{3}\int_0^1[w^3+3tw^2w'](1-t^2)^{-1/2}dt$$

$$\frac{\pi}{2}=\int_0^1[w^2+2tww'](1-t^2)^{-1/2}dt$$

Здесь штрих вверху обозначает производную по t. Первое слагаемое в каждом из интегралов проинтегрируем по частям (a, b — большая и малая полуоси овала γ соответственно):

$$\frac{M_*(\gamma)}{2k}=\frac{2}{3}\left\{\frac{\pi b^3}{2}+3\int_0^1[t(1-t^2)^{-1/2}-\arcsin t]w^2w'\,dt\right\} \tag{3.3}$$

$$\frac{\pi}{2}=\frac{\pi b^2}{2}+2\int_0^1[t(1-t^2)^{-1/2}-\arcsin t]ww'dt \tag{3.4}$$

Так как при $t\in[0, 1)$ имеем $t(1-t^2)^{-1/2}-\arcsin t\geqslant 0$, то

$$3\int_0^1[t(1-t^2)^{-1/2}-\arcsin t]w^2w'\,dt\leqslant\frac{3b}{2}\int_0^1[t(1-t^2)^{-1/2}-\arcsin t]2w\,w'dt \tag{3.5}$$

Интеграл в правой части неравенства (3.5) может быть заменен своим точным значением по (3.4). С учетом этого можно записать оценку

$$M_*(\gamma)\leqslant k\pi(b-{}^1/_3b^3) \tag{3.6}$$

Изопериметрическое неравенство (3.6) указывает верхнюю границу для предельного крутящего момента сечения площади π в форме симметричного овала с четырьмя вершинами и малой полуосью b. Так как $b\leqslant 1$ и функция $\xi(u)=3u-u^3$ достигает максимального значения на сегменте $[0, 1]$ в точке $u=1$, то оценка (3.6) существенно была точная, чем в [3]. Оценка, данная в [3], имеет вид

$$M_*(\gamma)\leqslant{}^2/_3k\pi \tag{3.7}$$

Сравнение неравенств (3.6) и (3.7) показывает, насколько уменьшается величина предельного крутящего момента при уменьшении малой полуоси сечения стержня.

Если площадь сечения равна A, то неравенство (3.6) следует заменить следующим

$$M_*(\gamma)\leqslant k\pi(bA/\pi-{}^1/_3b^3) \tag{3.8}$$

Объединяя неравенства (2.5) и (3.8) получим двустороннюю оценку предельного крутящего момента сечения в форме симметричного овала с четырьмя вершинами

$$2kA^2[{}^{15}/_2l-12\pi R_m]^{-1}\leqslant M_*(\gamma)\leqslant k\pi(bA/\pi-{}^1/_3b^3) \tag{3.9}$$

Подчеркнем, что верхнее и нижнее граничные значения предельного момента в двусторонней оценке (3.9) являются достижимыми, например для круглого поперечного сечения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сен-Венан Б.* Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм. М.: Физматгиз, 1961. 518 с.
2. *Полиа Г., Сеге Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962. 336 с.
3. *Leavitt J., Ungar P.* Cirle supports the lagest sandpile // Communs Pure Appl. Math. 1962. V. 15. No 1. P. 35–37.
4. *Соколовский В. В.* Теория пластичности. М.: Высш. шк., 1969. 608 с.
5. *Аннин Б. Д.* Существование и единственность решения задачи упругопластического кручения цилиндрического стержня овального сечения // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 5. С. 879–887.
6. *Мищенко А. С., Фоменко А. Т.* Курс дифференциальной геометрии и топологии. М.: Изд-во МГУ, 1980. 439 с.

Москва

Поступила в редакцию
11.XII.1987