МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1989

УДК 539.374

И. А. ПАШКОВ

ОБ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ СОБСТВЕННЫХ ФОРМ КОЛЕБАНИЙ ВЯЗКОУПРУГОГО ТЕЛА

В [1–4] приводятся соотношения типа ортогональности собственных векторов спектральных задач с квадратично входящим параметром. В настоящей работе на примере задачи о собственных колебаниях вязкоупругого тела получены соотношения обобщенной ортогональности и биортогональности в спектральной задаче с полиномиальной зависимостью от параметра. Вязкоупругие определяющие соотношения заданы в дифференциально-операторной форме и с помощью комплексных модулей. Предложен метод решения стационарной задачи, использующий свойства ортогональности собственных форм.

1. Постановка задачи. Рассмотрим вязкоупругое тело, занимающее в пространстве область Ω с границей Γ. Пусть тело совершает малые свободные колебания около положения равновесия. Тогда в рамках линейной теории уравнение закона сохранения импульса имеет вид

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} - \rho \partial^2 \mathbf{u}/\partial t^2 = 0 \tag{1.1}$$

Вязкоупругие определяющие соотношения заданы в следующей дифференциально-операторной форме

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \frac{\partial^k \boldsymbol{\sigma}}{\partial t^k} = \sum_{l=0}^{m} \beta_l \cdot\cdot \frac{\partial^l \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t^l}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon} = {}^1/_2 [\operatorname{grad} \mathbf{u} + (\operatorname{grad} \mathbf{u})^T] \tag{1.2}$$

где $\mathbf{u}$ — вектор перемещений, $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений, $\boldsymbol{\varepsilon}$ — тензор деформаций, ρ — плотность, α_k — скалярные коэффициенты, $\beta_l = \{\beta^l_{ijpq}\}$ — тензоры четвертого ранга, обладающие такими же свойствами симметрии, как и тензор модулей упругости в обобщенном законе Гука [5] $\beta^l_{ijpq} = \beta^l_{jipq} = \beta^l_{pqij}$.

Операторные определяющие соотношения типа (1.2) имеют место, например, при отсутствии объемной релаксации [5].

На части границы $\Gamma_0 \subset \Gamma$ заданы однородные условия в перемещениях

$$\mathbf{u} = 0 \ (\text{на } \Gamma_0) \tag{1.3}$$

На оставшейся части границы Γ_1 заданы однородные условия в напряжениях

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \ (\text{на } \Gamma_1) \tag{1.4}$$

где $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к поверхности Γ.

По аналогии с упругим телом собственными колебаниями вязкоупругого тела назовем решения краевой задачи (1.1)—(1.4) вида

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^0 e^{\lambda t}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^0 e^{\lambda t}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^0 e^{\lambda t} \tag{1.5}$$

где величины $\mathbf{u}^0$, $\boldsymbol{\varepsilon}^0$, $\boldsymbol{\sigma}^0$ — координатные функции формы колебаний (собственные формы), λ — собственное значение.

После подстановки (1.5) в (1.1)—(1.4) имеется следующая спектральная краевая задача относительно неизвестных функций формы по параметру λ

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}^0-\rho\lambda^2\mathbf{u}^0=0,\quad \left(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\lambda^k\right)\boldsymbol{\sigma}^0=\sum_{l=0}^{m}\lambda^l\boldsymbol{\beta}_l\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^0(\mathbf{u}^0)$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}^0(\mathbf{u}^0)={}^1/_2[\operatorname{grad}\mathbf{u}^0+(\operatorname{grad}\mathbf{u}^0)^T]\ (\text{в } \Omega) \tag{1.6}$$
$$\mathbf{u}^0=\mathbf{0}\ (\text{на } \Gamma_0);\ \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}^0=\mathbf{0}\ (\text{на } \Gamma_1)$$

Задача (1.6) может быть поставлена в перемещениях. Если решения этой задачи существуют, то нас будут интересовать соотношения типа ортогональности собственных форм $\mathbf{u}^0$, соответствующих различным собственным значениям λ.

2. Однородная релаксация. Пусть коэффициенты α_k в определяющих соотношениях (1.2) не зависят от координат. Тогда спектральная задача (1.6) в перемещениях имеет вид (верхний индекс 0 ниже опускается)

$$\sum_{l=0}^{m}\lambda^l\operatorname{div}(\boldsymbol{\beta}_l\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))-\rho\mathbf{u}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\lambda^{k+2}=\mathbf{0}\quad (\text{в } \Omega) \tag{2.1}$$

$$\mathbf{u}=\mathbf{0}\quad (\text{на } \Gamma_0);\quad \mathbf{n}\cdot\sum_{l=0}^{m}\lambda^l(\boldsymbol{\beta}_l\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))=\mathbf{0}\ (\text{на } \Gamma_1) \tag{2.2}$$

Отметим, что, если обозначить через $\mathbf{A}$ оператор краевой задачи (2.1), (2.2), то этот оператор будет самосопряженным в следующем смысле

$$\int_\Omega \mathbf{Au}\cdot\mathbf{v}d\Omega=\int_\Omega \mathbf{u}\cdot\mathbf{Av}d\Omega \tag{2.3}$$

для любых достаточно гладких функций $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, удовлетворяющих краевым условиям (2.2) при одном и том же значении λ.

Для удобства обозначений положим $m=n+2$, предполагая, что либо $\boldsymbol{\beta}_m\neq 0$, либо $\alpha_n\neq 0$, тогда степень спектрального параметра λ в выражениях (2.1), (2.2) не превосходит m. Вводя новые неизвестные $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{m-1}$ поставим спектральную краевую задачу по параметру λ в первой степени для системы дифференциальных и алгебраических уравнений, эквивалентную задаче (2.1), (2.2):

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\beta}_0\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))+\lambda\left\{\operatorname{div}(\boldsymbol{\beta}_1\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))+\sum_{l=2}^{m}[\operatorname{div}(\boldsymbol{\beta}_l\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{l-1}))-\rho\alpha_{l-2}\mathbf{u}_{l-1}]\right\}=\mathbf{0}$$
$$\mathbf{u}_i=\lambda\mathbf{u}_{i-1}\ (i=1, 2, \ldots, m-1),\ \mathbf{u}_0\equiv\mathbf{u}\ (\text{в } \Omega) \tag{2.4}$$

$$\mathbf{u}=\mathbf{0}\quad (\text{на } \Gamma_0),\quad \mathbf{n}\cdot\left[\boldsymbol{\beta}_0\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})+\lambda\sum_{l=1}^{m}\boldsymbol{\beta}_l\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{l-1})\right]=\mathbf{0}\quad (\text{на } \Gamma_1) \tag{2.5}$$

Систему уравнений (2.4) представим в операторном виде

$$\mathbf{Bq}\equiv\mathbf{Lq}+\lambda\mathbf{Mq}=\mathbf{0} \tag{2.6}$$

где клеточный вектор $\mathbf{q}$ составлен из векторов $\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{m-1}$, а $\mathbf{L}$ и $\mathbf{M}$ — операторные матрицы размерности $m\times m$, ненулевые элементы которых определяются по формулам

$$\mathbf{L}_{11}=\operatorname{div}(\boldsymbol{\beta}_0\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})),\ \mathbf{L}_{ii}\mathbf{u}=\mathbf{u}$$
$$\mathbf{M}_{11}\mathbf{u}=\operatorname{div}(\boldsymbol{\beta}_1\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})),\ \mathbf{M}_{ii-1}\mathbf{u}=-\mathbf{u}$$
$$\mathbf{M}_{1i}\mathbf{u}=\operatorname{div}(\boldsymbol{\beta}_i\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))-\rho\alpha_{i-2}\mathbf{u}\ (i=2, \ldots, m)$$

Рассматривая матрицу $\mathbf{B}$ вместе с краевыми условиями (2.2) как оператор, можно показать, что у него существует сопряженный оператор $\mathbf{B}^*$

в следующем смысле

$$\int_\Omega \mathbf{Bq}\cdot\mathbf{p}\,d\Omega=\int_\Omega \mathbf{q}\cdot\mathbf{B}^*\mathbf{p}\,d\Omega \tag{2.7}$$

для любых достаточно гладких вектор-функций **p** и **q**, удовлетворяющих краевым условиям (2.2) при одном и том же значении λ. При этом матрица оператора $\mathbf{B}^*$ совпадает с транспонированной матрицей оператора $\mathbf{B}$.

Таким образом, краевая задача (2.5), (2.2) имеет сопряженную задачу, решение которой $\mathbf{q}^*$ удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{B}^*\mathbf{q}^*\equiv\mathbf{L}\mathbf{q}^*+\lambda\mathbf{M}^T\mathbf{q}^*=\mathbf{u} \tag{2.8}$$

и краевым условиям (2.2). Для каждого решения прямой задачи **q** при том же λ существует решение сопряженной задачи $\mathbf{q}^*=(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}_1^*, \ldots, \mathbf{u}_{m-1}^*)^T$, компоненты которого выражаются через соответствующие компоненты **q** по формулам

$$\mathbf{u}^*=\mathbf{u},\quad \mathbf{u}_l^*=-\sum_{k=1}^{m-l}\left[\operatorname{div}(\beta_{l+k}\cdot\cdot\,\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_k))-\rho\mathbf{u}_k\alpha_{l+k-2}\right] \tag{2.9}$$

$$(l=1, 2, \ldots, m-1)$$

Пусть $\mathbf{q}$, $\mathbf{p}=(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{m-1})^T$ и $\mathbf{q}^*$, $\mathbf{p}^*=(\mathbf{v}^*, \mathbf{v}_1^*, \ldots \mathbf{v}_{m-1}^*)^T$ суть два решения прямой задачи (2.5), (2.6) и два решения сопряженной задачи (2.8), (2.2), соответствующие двум различным собственным значениям λ и μ. Рассмотрим разность

$$D=\int_\Omega(\mathbf{Lq}\cdot\mathbf{p}^*+\lambda\mathbf{Mq}\cdot\mathbf{p}^*-\mathbf{Lp}^*\cdot\mathbf{q}-\mu\mathbf{M}^T\mathbf{p}^*\cdot\mathbf{q})\,d\Omega.$$

Очевидно $D=0$. Используя теорему Гаусса — Остроградского и свойства симметрии тензоров β_l, можно показать также, что $D=(\mu-\lambda)(\mathbf{q}, \mathbf{p})_1$, где введено обозначение

$$(\mathbf{q},\mathbf{p})_1=\int_\Omega\Big\{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})\cdot\cdot\,\beta_1\cdot\cdot\,\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})+\sum_{l=1}^{m-1}\Big[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_l)\cdot\cdot\,\beta_{l+1}\cdot\cdot\,\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})+\rho\alpha_{l-1}\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_l+$$
$$+\sum_{k=1}^{m-l}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{l-1})\cdot\cdot\,\beta_{l+k}\cdot\cdot\,\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_k)+\rho\alpha_{l+k-2}\mathbf{u}_{l-1}\cdot\mathbf{v}_k)\Big]\Big\}\,d\Omega$$

Отсюда при $\lambda\neq\mu$ следует первое соотношение ортогональности $(\mathbf{q}, \mathbf{p})_1=$ $=0$. Тогда из равенства $\int_\Omega(\mathbf{Lq}\cdot\mathbf{p}^*+\lambda\mathbf{Mq}\cdot\mathbf{p}^*)\,d\Omega=0$ следует второе соотношение ортогональности

$$(\mathbf{q},\mathbf{p})_2=\int_\Omega\Big\{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})\cdot\cdot\,\beta_0\cdot\cdot\,\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})-\sum_{l=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{m-l}\left[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_l)\cdot\cdot\,\beta_{l+k}\cdot\cdot\,\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_k)+\right.$$
$$\left.+\rho\alpha_{l+k-2}\mathbf{u}_l\cdot\mathbf{v}_k\right]\Big\}\,d\Omega=0$$

В случае тела Фойхта $m=2$, $\beta_2=0$ и соотношения ортогональности принимают вид [1]

---

[1] Для тела Фойхта с внешним трением соотношения ортогональности получены ранее в работе: *Пашков И. А., Трояновский И. Е.* Соотношения ортогональности в задаче о колебаниях упругого тела с внутренней и внешней диссипацией.— М., 1987. 13 с. Деп. в ВИНИТИ 2.11.87, № 7688.

$$(\mathbf{q},\mathbf{p})_1=\int_\Omega [\varepsilon(\mathbf{u})\cdot\cdot\beta_1\cdot\cdot\varepsilon(\mathbf{v})+\rho\alpha_0(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_1+\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{v})]\,d\Omega=0$$

$$(\mathbf{q},\mathbf{p})_2=\int_\Omega [\varepsilon(\mathbf{u})\cdot\cdot\beta_0\cdot\cdot\varepsilon(\mathbf{v})-\rho\alpha_0\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{v}_1]\,d\Omega=0$$

3. **Произвольно неоднородное тело.** Пусть теперь коэффициенты в определяющих соотношениях (1.2) суть кусочно-гладкие функции координат. После исключения тензора напряжений в (1.6) спектральная задача в перемещениях принимает вид

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m}\lambda^{k+l}[\alpha_k \operatorname{div}(\beta_l\cdot\cdot\varepsilon(\mathbf{u}))-\operatorname{grad}\alpha_k\cdot\beta_l\cdot\cdot\varepsilon(\mathbf{u})]-$$

$$-\rho\lambda^2\mathbf{u}\left(\sum_{k=0}^{n}\lambda^k\alpha_k\right)^2=0 \quad (\text{в } \Omega) \qquad (3.1)$$

$$\mathbf{u}=0 \quad (\text{на } \Gamma_0), \quad \mathbf{n}\cdot\sum_{l=0}^{m}\lambda^l\beta_l\cdot\cdot\varepsilon(\mathbf{u})=0 \quad (\text{на } \Gamma_1) \qquad (3.2)$$

У оператора **A** краевой задачи (3.1), (3.2) существует сопряженный оператор **A***, краевая задача которого относительно вектора **v** имеет вид

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m}\lambda^{k+l}\operatorname{div}[\beta_l\cdot\cdot(\alpha_k\mathbf{v})+\mathbf{v}\cdot(\operatorname{grad}\alpha_k\cdot\beta_l)]-\rho\lambda^2\mathbf{v}\left(\sum_{k=0}^{n}\lambda^k\alpha_k\right)^2=0 \qquad (3.3)$$

$$\mathbf{v}=0 \quad (\text{на } \Gamma_0), \quad \mathbf{n}\cdot\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m}\lambda^{k+l}[\beta_l\cdot\cdot\varepsilon(\alpha_k\mathbf{v})+\mathbf{v}\cdot(\operatorname{grad}\alpha_k\cdot\beta_l)]=0 \quad (\text{на } \Gamma_1) \qquad (3.4)$$

При этом для любых векторов **u** и **v**, удовлетворяющих при одном и том же значении λ краевым условиям (3.2) и (3.4) соответственно, выполняется следующее соотношение

$$\int_\Omega \mathbf{A}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\,d\Omega=\int_\Omega \mathbf{u}\cdot\mathbf{A}^*\mathbf{v}\,d\Omega$$

Предполагая, по-прежнему $m=n+2$ и вводя новые неизвестные $\mathbf{u}_0\equiv\mathbf{u}$, $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_{N-1}$ и $\mathbf{v}_0\equiv\mathbf{v}$, $\mathbf{v},\ldots,\mathbf{v}_{N-1}$ $(N=2n+2)$ построим по задачам (3.1), (3.2); (3.3), (3.4) две эквивалентные спектральные задачи с параметром в первой степени для системы дифференциальных и алгебраических уравнений

$$\mathbf{B}\mathbf{q}\equiv\mathbf{L}\mathbf{q}+\lambda\mathbf{M}\mathbf{q}=0 \quad (\text{в } \Omega) \qquad (3.5)$$

$$\mathbf{u}=0 \quad (\text{на } \Gamma_0), \quad \mathbf{n}\cdot\left[\beta_0\cdot\cdot\varepsilon(\mathbf{u})+\lambda\sum_{l=1}^{m}\beta_l\cdot\cdot\varepsilon(\mathbf{u}_{l-1})\right]=0 \quad (\text{на } \Gamma_1) \qquad (3.6)$$

$$\mathbf{B}^*\mathbf{p}\equiv\mathbf{L}^*\mathbf{p}+\lambda\mathbf{M}^*\mathbf{p}=0 \quad (\text{в } \Omega) \qquad (3.7)$$

$$\mathbf{v}=0 \quad (\text{на } \Gamma_0); \quad \mathbf{n}\cdot\Big\{\beta_0\cdot\cdot\varepsilon(\alpha_0\mathbf{v})+\mathbf{v}\cdot(\operatorname{grad}\alpha_0\cdot\beta_0)+$$

$$+\lambda\sum_{i=1}^{N}\sum_{k+l=i}[\beta_l\cdot\cdot(\alpha_k\mathbf{v}_{i-1})+\mathbf{v}_{i-1}\cdot(\operatorname{grad}\alpha_k\cdot\beta_l)]\Big\}=0 \qquad (3.8)$$

$$(0\leqslant k\leqslant n,\ 0\leqslant l\leqslant m) \quad (\text{на } \Gamma_1)$$

Здесь $\mathbf{q}=\{\mathbf{u}_i\}$, $\mathbf{p}=\{\mathbf{v}_i\}$ $(i=0, 1, \ldots, N-1)$ — клеточные векторы с векторными компонентами; $\mathbf{L}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{L}^*$, $\mathbf{M}^*$ — операторные клеточные матрицы размерности $N\times N$, ненулевые элементы которых определяются по формулам

$$\mathbf{L}_{11}\mathbf{u}=\alpha_0 \operatorname{div}(\beta_0\cdot\cdot\,\varepsilon(\mathbf{u}))-\operatorname{grad}\alpha_0\cdot\beta_0\cdot\cdot\,\varepsilon(\mathbf{u})$$

$$\mathbf{L}_{11}{}^*\mathbf{v}=\operatorname{div}(\beta_0\cdot\cdot\,\varepsilon(\alpha_0\mathbf{v})+\mathbf{v}\cdot(\operatorname{grad}\alpha_0\cdot\beta_0))$$

$$\mathbf{L}_{jj}\mathbf{u}=\mathbf{u},\quad \mathbf{L}_{jj}{}^*\mathbf{v}=\mathbf{v},\quad \mathbf{M}_{jj-1}\mathbf{u}=-\mathbf{u},\quad \overset{*}{\mathbf{M}}_{jj-1}\mathbf{v}=-\mathbf{v}$$

$$(j=2, 3, \ldots, N)$$

$$\mathbf{M}_{1i}\mathbf{u}=\sum_{k+l=i}[\alpha_k \operatorname{div}(\beta_l\cdot\cdot\,\varepsilon(\mathbf{u}))-\operatorname{grad}\alpha_k\cdot\beta_l\cdot\cdot\,\varepsilon(\mathbf{u})]-c_i\mathbf{u}$$

$$\mathbf{M}_{1i}{}^*\mathbf{v}=\sum_{k+l=i}\operatorname{div}[\beta_l\cdot\cdot\,\varepsilon(\alpha_k\mathbf{v})+\mathbf{v}\cdot(\operatorname{grad}\alpha_k\cdot\beta_l)]-c_i\mathbf{v}\quad (0\leqslant k\leqslant n,\ 0\leqslant l\leqslant m)$$

$$c_1=0,\quad c_i=\rho\sum_{k+l=i-2}\alpha_k\alpha_l\quad (0\leqslant k, l\leqslant n;\ i>1),\quad (i=1, 2, \ldots, N)$$

В свою очередь для каждой из задач (3.5), (3.6) и (3.7), (3.8) можно поставить сопряженную задачу в смысле (2.7). Сопряженное матричное уравнение краевой задачи (3.5), (3.2) имеет вид

$$\mathbf{B}^T\mathbf{q}^*\equiv\mathbf{L}\mathbf{q}^*+\lambda\mathbf{M}^T\mathbf{q}^*=0,\quad \mathbf{q}^*=(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}_1{}^*, \ldots, \overset{*}{\mathbf{u}}_{N-1})^T \tag{3.9}$$

Сопряженная краевая задача включает в себя соотношения (3.9), (3.2). Аналогично сопряженное матричное уравнение краевой задачи (3.7), (3.4) записывается в виде

$$(\mathbf{B}^*)^T\mathbf{p}^*\equiv\mathbf{L}^*\mathbf{p}^*+\lambda(\mathbf{M}^*)^T\mathbf{p}^*=0,\quad \mathbf{p}^*=(\mathbf{v}^*, \mathbf{v}_1{}^*, \ldots, \overset{*}{\mathbf{v}}_{N-1})^T \tag{3.10}$$

Сопряженные краевые условия совпадают с (3.4).

Решения $\mathbf{q}^*$, $\mathbf{p}^*$ указанных выше сопряженных задач существуют при тех же собственных значениях, что и соответствующие решения прямых задач и выражаются через них по формулам

$$\begin{aligned}&\mathbf{u}^*=\mathbf{u},\quad \mathbf{u}_i{}^*=-\sum_{k=1}^{N-i}\mathbf{M}_{1\,i-1+k}\mathbf{u}_k\\ &\mathbf{v}^*=\mathbf{v},\quad \mathbf{v}_i{}^*=-\sum_{k=1}^{N-i}\overset{*}{\mathbf{M}}_{1\,i-1+k}\mathbf{v}_k\quad (i=1, 2, \ldots, N-1)\end{aligned} \tag{3.11}$$

Пусть λ, $\mathbf{q}$ являются собственным значением и собственным вектором задачи (3.5), (3.6), а $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}^*$ являются решениями задач (3.7), (3.8) и (3.10), (3.4) с собственным значением μ, не равным λ. Рассмотрев два очевидных равенства

$$\int_\Omega(\mathbf{B}\mathbf{q}\cdot\mathbf{p}^*-(\mathbf{B}^*)^T\mathbf{p}^*\cdot\mathbf{q})\,d\Omega=0,\quad \int_\Omega\mathbf{B}\mathbf{q}\cdot\mathbf{p}^*\,d\Omega=0$$

получаем два соотношения биортогональности

$$\begin{aligned}&(\mathbf{q}, \mathbf{p})_1=\int_\Omega\Big[\sum_{i=1}^{N}l_i(\mathbf{u}_{i-1}, \mathbf{v})+\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{k=1}^{N-i}l_{i-1+k}(\mathbf{u}_{i-1}, \mathbf{v}_k)\Big]d\Omega=0\\ &(\mathbf{q}, \mathbf{p})_2=\int_0\Big[l_0(\mathbf{u}, \mathbf{v})-\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{k=1}^{N-i}l_{i-1+k}(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_k)\Big]d\Omega=0\end{aligned} \tag{3.12}$$

Здесь введены обозначения билинейных форм

$$l_i(\mathbf{u},\mathbf{v})=\sum_{k+l=i}[\varepsilon(\alpha_k\mathbf{v})\cdot\cdot\beta_l\cdot\cdot\varepsilon(\mathbf{u})+$$

$$+\mathbf{v}\cdot(\operatorname{grad}\alpha_k\cdot\beta_l)\cdot\cdot\varepsilon(\mathbf{u})]+c_i\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\quad(0\leqslant k\leqslant n,0\leqslant l\leqslant m)$$

4. Частотно-независимые комплексные модули. В этом случае в соответствии с теорией внутреннего трения, предложенной в [6], уравнение установившихся гармонических колебаний может быть записано в виде

$$[-\operatorname{div}(\beta_c\cdot\cdot\varepsilon(\mathbf{u}^0))-\omega^2\rho\mathbf{u}^0]e^{i\omega t}=\mathbf{P}_0e^{i\omega t}\tag{4.1}$$

где ω — частота колебаний, $\mathbf{P}_0$ — координатная функция амплитуд внешнего возмущения, $\mathbf{u}^0$ — амплитуда функции перемещений, β_c — симметричный тензор комплексных модулей, не зависящий от частоты.

На границе однородные условия в перемещениях имеют вид

$$\mathbf{u}^0=\mathbf{0}\ (\text{на } \Gamma_0)\tag{4.2}$$

$$\mathbf{n}\cdot\beta_c\cdot\cdot\varepsilon(\mathbf{u}^0)=\mathbf{0}\ (\text{на } \Gamma_1)$$

Задаче (4.1), (4.2) можно поставить в соответствие следующую спектральную задачу с параметром λ^2

$$\operatorname{div}(\beta_c\cdot\cdot\varepsilon(\mathbf{u}))-\lambda^2\rho\mathbf{u}=\mathbf{0}\ (\text{в } \Omega)\tag{4.3}$$

$$\mathbf{u}=\mathbf{0}\ (\text{на } \Gamma_0),\ \mathbf{n}\cdot\beta_c\cdot\cdot\varepsilon(\mathbf{u})=\mathbf{0}\ (\text{на } \Gamma_1)$$

Пусть $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ суть решения задачи (4.3), соответствующие различным собственным значениям λ^2 и μ^2. Тогда нетрудно проверить справедливость двух соотношений ортогональности

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})_1=\int_\Omega\rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\,d\Omega=0,$$

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})_2=\int_\Omega\varepsilon(u)\cdot\cdot\beta_c\cdot\cdot\varepsilon(v)\,d\Omega=0\tag{4.4}$$

Если решение $\mathbf{u}^0$ задачи о вынужденных колебаниях (4.1), (4.2) допускает разложение по собственным формам $\mathbf{u}_k$ спектральной задачи (4.3)

$$\mathbf{u}^0=\sum_{k=1}^{\infty}C_k\mathbf{u}_k\tag{4.5}$$

то неизвестные комплексные коэффициенты C_k могут быть найдены с помощью соотношений ортогональности (4.4) в результате подстановки выражения (4.5) в уравнение (4.1):

$$C_k=-[(\lambda_k^2+\omega^2)(\mathbf{u}_k,\mathbf{u}_k)_1]^{-1}\int_\Omega\mathbf{P}_0\cdot\mathbf{u}_k\,d\Omega$$

Краевые условия (4.2) удовлетворяются при этом тождественно.

5. Общий случай. Определяющие соотношения вязкоупругого тела заданы с помощью тензора комплексных модулей $\mathbf{K}(i\omega)$: $\sigma^0e^{i\omega t}=\mathbf{K}(i\omega)\cdot\cdot\varepsilon^0e^{i\omega t}$, который объединяет два предыдущих варианта

$$\mathbf{K}(i\omega)=\beta_c+\left(\sum_{l=0}^{m}(i\omega)^l\beta_l\right)\left(\sum_{k=0}^{n}(i\omega)^k\alpha_k\right)^{-1}$$

Здесь ω — действительная частота; σ^0, ε^0 — комплекснозначные координатные функции формы установившихся колебаний для тензора напряжений и тензора деформаций.

Задаче об установившихся вынужденных колебаниях в перемещениях $\mathbf{u}^0$:

$$[-\operatorname{div}(\mathbf{K}(i\omega)\cdot\cdot\varepsilon(\mathbf{u}^0))-\omega^2\rho\mathbf{u}^0]e^{i\omega t}=\mathbf{P}_0 e^{i\omega t} \text{ (в } \Omega)$$
$$u^0=0 \text{ (на } \Gamma_0); \ \mathbf{n}\cdot\mathbf{K}(i\omega)\cdot\cdot\varepsilon(\mathbf{u}^0)=\mathbf{0} \text{ (на } \Gamma_1) \qquad (5.1)$$

поставим в соответствие спектральную задачу по параметру λ:

$$-\operatorname{div}(\mathbf{K}(\lambda)\cdot\cdot\varepsilon(\mathbf{u}))+\lambda^2\rho\mathbf{u}=\mathbf{0} \text{ (в } \Omega)$$
$$\mathbf{u}=\mathbf{0} \text{ (на } \Gamma_0); \ \mathbf{n}\cdot\mathbf{K}(\lambda)\cdot\cdot\varepsilon(\mathbf{u})=\mathbf{0} \text{ (на } \Gamma_1) \qquad (5.2)$$

Пусть

$$\mathbf{Lq}_0+i\omega\mathbf{Mq}_0=(\mathbf{P}_0, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0})^T \text{ (в } \Omega); \ \mathbf{u}^0=\mathbf{0} \text{ (на } \Gamma_0) \qquad (5.3)$$
$$\mathbf{n}\cdot\left[\beta_0{}^c\cdot\cdot\varepsilon(\mathbf{u}^0)+i\omega\sum_{l=1}^{m}\beta_l{}^c\cdot\cdot\varepsilon(\mathbf{u}_{l-1})\right]=0 \quad \text{(на } \Gamma_1)$$
$$\mathbf{Lq}+\lambda\mathbf{Mq}=\mathbf{0} \text{ (в } \Omega); \ \mathbf{u}=\mathbf{0} \text{ (на } \Gamma_0) \qquad (5.4)$$
$$\mathbf{n}\cdot\left[\beta_0{}^c\cdot\cdot\varepsilon(\mathbf{u})+\lambda\sum_{l=1}^{m}\beta_l{}^c\cdot\cdot\varepsilon(\mathbf{u}_{l-1})\right]=0 \quad \text{(на } \Gamma_1)$$

эквивалентные (5.1) и (5.2) задачи с параметрами $i\omega$ и λ в первой степени соответственно, которые поставлены указанным в п. 3 способом введения алгебраических уравнений.

Тогда задача (5.4), как и задача (3.5), (3.6), имеет сопряженную, и для собственных форм прямой и сопряженной задач, соответствующим различным собственным значениям, справедливы соотношения ортогональности, которые получаются из соотношений (3.12) заменой тензоров β_l на тензоры $\beta_l{}^c$, определяемые из выражений $\beta_l{}^c=\beta_l+\alpha_l\beta_c$ $(0\leqslant l\leqslant n)$, $\beta_l{}^c=\beta_l$ $(l=n+1, n+2)$. Если все собственные значения спектральной задачи (5.2) простые и существует разложение решения $\mathbf{q}_0$ задачи (5.3) в ряд по собственным формам $\mathbf{q}_k$ задачи (5.4):

$$\mathbf{q}_0=\sum_{k=1}^{\infty}C_k\mathbf{q}_k \qquad (5.5)$$

то неизвестные коэффициенты C_k могут быть найдены по формуле

$$C_k=[(i\omega-\lambda_k)(\mathbf{q}_k, \mathbf{p}_k)_1]^{-1}\int_{\Omega}\mathbf{P}_0\cdot\mathbf{v}^k\,d\Omega \qquad (5.6)$$

где λ_k — собственные значения задачи (5.2) с отрицательной действительной частью; $\mathbf{p}_k$ — соответствующие собственные формы сопряженной задачи, $\mathbf{v}^k$ — первая векторная компонента клеточного вектора $\mathbf{p}_k$.

Формула (5.6) получена в результате подстановки выражения (5.5) в уравнение неоднородной краевой задачи (5.3), свертки с сопряженным вектором $\mathbf{p}_k$ и интегрирования по объему Ω.

Если задача (5.2) имеет также собственные значения с положительной действительной частью, то это будет свидетельствовать о том, что в линейной системе с предложенным комплексным тензором $\mathbf{K}(i\omega)$, как, впрочем, и в системе с частотно-независимым тензором β_c, не выполняется закон причинности.

Вопрос о существовании разложений (4.5), (5.5) и о возможности обращения скалярных квадратов $(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k)$, $(\mathbf{q}_k, \mathbf{p}_k)$ в нуль приводит к условию базисности системы собственных векторов соответствующих спектральных задач в специальных пространствах и к настоящему времени остается открытым. Для обыкновенных дифференциальных уравнений некоторые результаты получены в [7—9].

Автор благодарит И. Е. Трояновского за постановку задачи исследования и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бобровницкий Ю. Н.* Соотношение ортогональности для волн Лэмба // Акуст. ж., 1972. Т. 18. Вып. 4. С. 513–515.
2. *Федорюк М. В.* Соотношения типа ортогональности в твердых волноводах // Акуст. ж. 1974. Т. 20. Вып. 2. С. 310–314.
3. *Fraser W. B.* Orthogonality relation for the Rayleigh – Zamb modes of vibration of aplate // J. Acoust. Soc. Amer. 1976. V. 59. No. 1. P. 215–216.
4. *Зильберглейт А. С., Нуллер Б. М.* Обобщенная ортогональность однородных решений в динамических задачах теории упругости // Докл. АН СССР. 1977. Т. 234. № 2. С. 333–335.
5. *Москвитин В. В.* Сопротивление вязко-упругих материалов. М.: Наука, 1972. 327 с.
6. *Сорокин Е. С.* К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. М.: Госстройиздат, 1960. 131 с.
7. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.
8. *Шкаликов А. А.* Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1983. Вып. 9. С. 190–229.
9. *Лужина Л. М.* Регулярные спектральные задачи в пространстве вектор-функций // Вестн. МГУ. Сер. I. Математика, механика. 1988. № 1. С. 31–35.

Москва

Поступила в редакцию
19.I.1988