УДК 539.374

Л. А. КИПНИС

ЛИНИЯ СКОЛЬЖЕНИЯ В ВЕРШИНЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО КЛИНА С ЖЕСТКО ЗАЩЕМЛЕННОЙ ГРАНЬЮ

Рассматривается плоская задача о начальном развитии пластических деформаций вблизи вершины прямоугольного клина $0<r<\infty$, $\alpha-\pi/2<\theta<\alpha$, грань $\theta=\alpha-\pi/2$ которого жестко защемлена, а грань $\theta=\alpha$ свободна от напряжений. Предполагается, что пластические деформации концентрируются вдоль прямой линии скольжения, исходящей из вершины (фигура). На бесконечности реализуется асимптотика, представляющая собой решение аналогичной задачи для клина без линии скольжения, которое при $r\to\infty$ удовлетворяет условию затухания напряжений и является асимптотически наибольшим. Это решение строится методом сингулярных решений [1].

Требуется определить длину l линии скольжения и угол α ее наклона к грани клина.

Граничные условия задачи имеют вид

$$\sigma_\theta=\tau_{r\theta}=0\quad(\theta=\alpha),\qquad u_\theta=u_r=0\quad(\theta=\alpha-\pi/2)\tag{1}$$

$$[\sigma_\theta]=[\tau_{r\theta}]=0,\quad [u_\theta]=0\quad(\theta=0)$$

$$\tau_{r\theta}=\tau_s\quad(\theta=0,\ r<l),\quad [u_r]=0\quad(\theta=0,\ r>l)\tag{2}$$

$$\tau_{r\theta}=Cfr^\lambda+o(1/r)\quad(\theta=0,\ r\to\infty)\tag{3}$$

$$f=f_1/f_2,\quad f_1=FF_++2(\varkappa+\lambda+1)f_-\sin\lambda(\pi/2-\alpha)-2\lambda f_+\sin(\lambda+2)(\pi/2-\alpha)$$

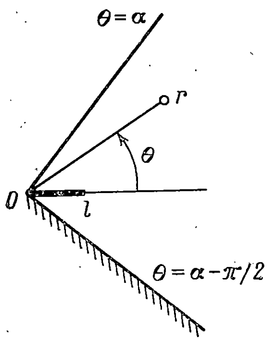
$$f_2=F+F_-\sin(\lambda+2)(\pi/2-\alpha)+2f_-\cos(\lambda+2)(\pi/2-\alpha)$$

$$F=\lambda\cos(\lambda+2)(\pi/2-\alpha)-(\varkappa+\lambda+1)\cos\lambda(\pi/2-\alpha)$$

$$F_\pm=\sin 2(\lambda+1)\alpha\pm(\lambda+1)\sin 2\alpha$$

$$f_\pm=\sin^2(\lambda+1)\alpha\pm(\lambda+1)\sin^2\alpha,\qquad \varkappa=3-4\nu$$

Здесь σ_θ, $\tau_{r\theta}$, σ_r – напряжения, u_θ, u_r – смещения, $[a]$ – скачок величины a, τ_s – предел текучести на сдвиг, ν – коэффициент Пуассона, λ – единственный корень уравнения $2\varkappa\cos\pi\lambda+4(\lambda+1)^2-\varkappa^2-1=0$ на интервале $]-1;0[$, C – произвольная постоянная, имеющая размерность силы, деленной на длину в степени $\lambda+2$.



Постоянная C считается заданной. Она характеризует интенсивность внешнего поля и определяется из решения внешней задачи.

Решение сформулированной задачи представляет собой сумму решений следующих двух задач. Первая отличается от нее тем, что вместо первого условия (2) имеем

$$\tau_{r\theta}=\tau_s-Cfr^\lambda\quad(\theta=0,\ r<l)\tag{4}$$

а на бесконечности напряжения затухают как $o(1/r)$. Вторая задача – упомянутая выше задача для клина без линии скольжения.

Применяя интегральное преобразование Меллина с комплексным параметром p [2] к уравнениям равновесия, условию совместности деформаций, закону Гука, условиям (1) и учитывая второе условие (2) и условие (4), приходим к функциональному уравнению Винера – Хопфа первой задачи

$$\tau_s(p+1)^{-1}+\tau(p+\lambda+1)^{-1}+\Phi^+(p)=-\mathrm{tg}\,p\pi G(p)\Phi^-(p)\quad(-\varepsilon_1<\mathrm{Re}\,p<\varepsilon_2)\tag{5}$$

$$\tau=-Cfl^\lambda,\quad G(p)=\frac{(\delta_1\Delta_2-4\Delta_1\delta_2)\cos p\pi}{(2\varkappa\cos p\pi-4p^2+\varkappa^2+1)\sin p\pi}$$

$$\Delta_1=\sin^2 p\alpha-p^2\sin^2\alpha,\qquad \Delta_2=2\varkappa\cos p(\pi-2\alpha)-4p^2\cos^2\alpha+\varkappa^2+1,$$

$$\delta_1=\sin 2p\alpha+p\sin 2\alpha,\qquad \delta_2=\varkappa\sin p(\pi-2\alpha)-p\sin 2\alpha$$

$$\Phi^-(p)=\frac{E}{4(1-\nu^2)}\int_0^1\left[\frac{\partial u_r}{\partial r}\right]\Bigg|_{\substack{r=\rho l\\ \theta=0}}\rho^p d\rho$$

$$\Phi^+(p)=\int_1^\infty \tau_{r\theta}(\rho l,0)\,\rho^p\,d\rho$$

Здесь E – модуль Юнга, ε_1, ε_2 – достаточно малые положительные числа.

Решения функциональных уравнений, подобных (5), построены, например, в [3, 4]. В данном случае имеем ($\Gamma(z)$ – гамма-функция)

$$\Phi^-(p)=K^-(p)G^-(p)\left(\frac{\tau_s K^+(-1)}{(p+1)G^+(-1)}+\frac{\tau K^+(-\lambda-1)}{(\lambda+1)(p+\lambda+1)G^+(-\lambda-1)}\right)$$

$$(\mathrm{Re}\,p>0)$$

$$\Phi^+(p)=-\frac{pG^+(p)}{K^+(p)}\left\{\frac{\tau_s}{p+1}\left(\frac{K^+(p)}{pG^+(p)}+\frac{K^+(-1)}{G^+(-1)}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\tau}{p+\lambda+1}\left(\frac{K^+(p)}{pG^+(p)}+\frac{K^+(-\lambda-1)}{(\lambda+1)G^+(-\lambda-1)}\right)\right\} \tag{6}$$

$$(\mathrm{Re}\,p<0)$$

$$\exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\ln G(z)}{z-p}\,dz\right)=\begin{cases}G^+(p), & \mathrm{Re}\,p<0\\ G^-(p), & \mathrm{Re}\,p>0\end{cases}$$

$$K^{\pm}(p)=\Gamma(1\mp p)/\Gamma(^1/_2\mp p)$$

Определим коэффициент K_{II} интенсивности напряжений в конце линии скольжения в исходной задаче с граничными условиями (1) – (3). Из (6) получаем ($p\to\infty$)

$$\Phi^-(p)\sim\left(\frac{\tau_s K^+(-1)}{G^+(-1)}+\frac{\tau K^+(-\lambda-1)}{(\lambda+1)G^+(-\lambda-1)}\right)p^{-1/2} \tag{7}$$

Имеет место асимптотика ($p\to\infty$) [1]:

$$\Phi^-(p)-K_{\mathrm{II}}(2pl)^{-1/2} \tag{8}$$

Из (7), (8) следует

$$K_{\mathrm{II}}=-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\,G^+(-1)}\tau_s\sqrt{l}+\frac{\sqrt{2}\,f\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+^3/_2)\,G^+(-\lambda-1)}Cl^{\lambda+1/2} \tag{9}$$

Приравнивая коэффициент K_{II} вязкости скольжения K_{IIc}, являющейся заданной постоянной материала, получим уравнение для определения длины l линии скольжения.

Предположим, что концентрация напряжений в конце линии скольжения отсутствует, т. е. $K_{\mathrm{IIc}}=0$. Тогда при помощи (9) находим

$$l=D(\alpha)\left(\frac{C}{\tau_s}\right)^{-1/\lambda},\quad D(\alpha)=\left(\frac{\sqrt{\pi}\,f\Gamma(\lambda+1)G^+(-1)}{2\Gamma(\lambda+^3/_2)G^+(-\lambda-1)}\right)^{-1/\lambda}$$

Согласно [5], в однородном и изотропном по прочности теле линия скольжения развивается в направлении, соответствующем наибольшему значению функции $D(\alpha)$. Как показывают вычисления при $\nu={}^1/_3$, $\lambda\approx-0{,}310$, а функция $D(\alpha)$ достигает своего наибольшего значения 8,399 при $\alpha\approx54°$. Следовательно, искомая длина линии скольжения определяется формулой $l=8{,}399(C/\tau_s)^{3{,}226}$, а угол ее наклона к свободной от напряжений грани клина приблизительно равен 54°.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
2. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. 402 с.
3. *Кипнис Л. А., Черепанов Г. П.* К теории механизма Билби – Коттрелла зарождения трещин в металлах // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 3. С. 109–114.
4. *Кипнис Л. А.* Кусочно-однородная плоскость с границей раздела в форме сторон угла и симметричным разрезом, исходящим из вершины // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 2. С. 334–336.
5. *Черепанов Г. П.* Пластические линии разрыва в конце трещины // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 4. С. 720–728.

Умань

Поступила в редакцию
13.I.1988