

УДК 539.374

А. Д. ДРОЗДОВ

**КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ОБ ОТДИРЕ
ДЛЯ РАСТУЩИХ ВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛ**

Исследуется процесс непрерывного наращивания вязкоупругих тел, соединенных друг с другом или с основанием с помощью клеевого слоя. За счет натяжения в растущих телах возникают напряжения, приводящие к разрыву клеевых соединений. Для различных моделей клеевого слоя численно и аналитически изучено влияние усилий натяжения и старения материала на формирование напряженно-деформированного состояния и размеры зоны разрыва. Приведены оценки интенсивности натяга, гарантирующие отсутствие отдира. Задача рассматривается в квазистатической постановке при малых деформациях.

1. Наращивание двуслойного стержня. Рассмотрим плоскую деформацию прямолинейного стержня, состоящего из двух частей, соединенных клеевым слоем. До приложения нагрузки каждая часть представляет собой стержень длины l прямоугольного поперечного сечения единичной ширины и толщины h_0 . В момент времени $t=0$ на боковых поверхностях стержня начинается наращивание материала, которое осуществляется на отрезке времени $[0, T]$. При наращивании толщина каждой из частей стержня изменяется по закону $h=h(t)$. За время dt к растущему стержню присоединяются два новых элемента, представляющих собой стержни длины l прямоугольного поперечного сечения единичной ширины и толщины $dh(t)$. Эти элементы предварительно растягиваются приложенными к их торцам усилиями, после чего налагаются на поверхность растущего стержня и мгновенно соединяются с ним. Продольная деформация натяга при наращивании постоянна и равна ε_* .

Введем ось x , направленную вдоль продольной оси стержня в недеформированном состоянии. Обозначим через $w(t, x)$ прогиб каждой из частей стержня, вызванный усилиями натяжения. Согласно обобщенной гипотезе плоских сечений [1] деформация ε на расстоянии z от поверхности контакта с клеевым слоем определяется по формуле

$$\varepsilon = \varepsilon^\circ(t, x) - \varepsilon^\circ(\tau^*(z), x) + \varepsilon_* - z[w''(t, x) - w''(\tau^*(z), x)] \quad (1.1)$$

Здесь ε° — продольная деформация поверхности контакта части стержня с клеевым слоем, $\tau^*(z)$ — момент присоединения элемента на расстоянии z от поверхности контакта к растущему стержню, штрих обозначает производную по x .

При одноосном напряженном состоянии напряжение σ связано с деформацией ε законом Гука с постоянным модулем упругости E . Продольное усилие N и изгибающий момент M равны

$$N = \int_0^{h(t)} \sigma dz, \quad M = \int_0^{h(t)} \sigma z dz$$

Подставим в эти соотношения выражение (1.1). Найдем величину ε° из условия $N=0$ и подставим в формулу для изгибающего момента. Име-

ем (точка обозначает производную по t)

$$M = -\frac{E}{12} \left[h^3(t) w''(t, x) - 3 \int_0^l h^2(\tau) h'(\tau) w''(\tau, x) d\tau + \frac{\sigma_*}{Z} [h^2(t) - h_0^2], \quad (\sigma_* = E \varepsilon_*) \right] \quad (1.2)$$

Величина M равна

$$M = \int_x^l q(t, s) (s-x) ds \quad (1.3)$$

где q — интенсивность поперечной нагрузки, действующей на часть стержня со стороны клевого слоя.

Рассмотрим модель клевого слоя, согласно которой слой не препятствует продольной деформации и сдвигу, но сопротивляется растяжению, возникающему при изгибе частей растущего стержня. При симметричном изгибе возникающее в слое усилие q связано с его деформацией w/H равенством

$$q = E_0(t) w'(t, x) / H \quad (1.4)$$

Здесь $E_0(t)$ — мгновенный модуль Юнга клевого слоя, $2H$ — его толщина. Соотношение (1.4) описывает механическое поведение стареющего упругого тела. При достижении деформацией максимально допустимого значения ε_0 происходит разрыв клевого слоя, после которого усилие q полагается равным нулю.

Можно показать, что разрыв клевого слоя начинается в точке l . Обозначим через $\tau_0(x)$ момент разрыва слоя в точке x , а через $a(t)$ — координату конца зоны разрыва в момент времени t . Эта величина определяется из условия

$$w(t, a(t)) = w_0, \quad (w_0 = \varepsilon_0 H) \quad (1.5)$$

Формально положим $a(t) = l$ ($t \in [0, \tau_0(l))$). Подставляя выражения (1.2), (1.4) в (1.3), получим

$$\begin{aligned} w(0, x) &= 0 \\ w^{IV} + 12E_0(t) [Eh^3(t)]^{-1} w' &= 0 \quad (x \in [0, a(t))) \\ w^{IV} &= 0 \quad (x \in [a(t), l]) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Уравнения (1.6) с граничными условиями

$$w(t, 0) = 0, \quad w'(t, 0) = 0 \quad (1.7)$$

$$w'''(t, l) = -6\sigma_* h'(t) [Eh^2(t)]^{-1}, \quad w''(t, l) = 0 \quad (1.8)$$

описывают изгиб частей растущего стержня. Условия (1.7) характеризуют жесткую заделку на торце $x=0$, а соотношения (1.8) представляют собой условия равенства нулю изгибающего момента и перерезывающей силы на торце $x=l$. Из (1.6) и условия непрерывности перерезывающей силы и изгибающего момента в точке $a(t)$ следует, что граничные условия (1.8) можно перенести в точку $a(t)$

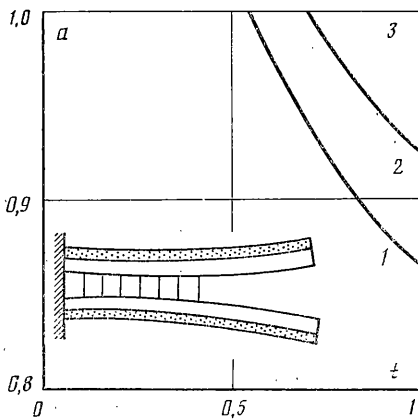
$$w'''(t, a(t)) = -6\sigma_* h'(t) [Eh^2(t)]^{-1}, \quad w''(t, a(t)) = 0 \quad (1.9)$$

Введем безразмерные переменные и параметры: $x_* = x/l$, $t_* = t/T$, $w_* = w/h_0$, $y_* = Tw'/h_0$, $h_* = h/h_0$, $E_{0*} = E_0/E_0(0)$, $a_* = a/l$, $w_{0*} = w_0/h_0$, $\tau_{0*} = \tau_0/T$, $\alpha = 12E_0(0)l^3/(Eh_0^3)$, $\beta = 6\sigma_* l^2/(Eh_0^2)$.

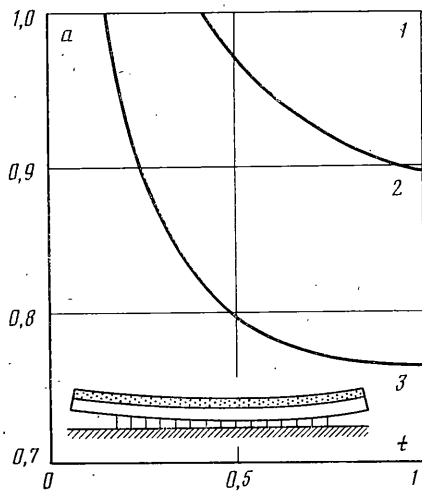
В новых обозначениях система уравнений (1.6), (1.7) и (1.9) принимает вид (для сокращения записи звездочку опускаем):

$$\begin{aligned} w_* = y, \quad y^{IV} + \alpha E_{0*}(t) h_*^{-3}(t) y &= 0, \quad y(t, 0) = 0, \quad y'(t, 0) = 0, \quad y''(t, a(t)) = \\ &= -\beta h_*'(t) h_*^{-2}(t), \quad y'''(t, a(t)) = 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$a(t) = 1 \quad (t \in [0, \tau_{0*}(1)]), \quad a'(t) = -y(t, a(t)) / w'(t, a(t)) \quad (t \in (\tau_{0*}(1), 1]) \quad (1.11)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Для исследования влияния старения клеевого слоя на деформацию растущего стержня проведем численное интегрирование уравнений (1.10), (1.11) при $\alpha=25$, $\beta=0,3$, $w_0=0,024$, $h=1+2t$, $E_0=1+4[1-\exp(-\gamma t)]$. На фиг. 1 изображены графики зависимости от времени координаты конца зоны разрыва. Кривые 1-3 соответствуют значениям $\gamma=0,1; 1,0; 10,0$. Результаты расчетов показывают существенную зависимость длины зоны разрыва клеевого слоя от параметра старения γ . При слабо выраженном старении ($\gamma=0,1$) зона разрыва в конце процесса наращивания составляет 14% общей длины стержня. При интенсивном старении ($\gamma=10,0$) зона разрыва отсутствует.

2. Наращивание стержня на жестком основании. Рассмотрим плоскую деформацию прямолинейного стержня, который лежит на клеевом слое, опирающемся на жесткое горизонтальное основание. Длина стержня равна $2l$. Стержень имеет прямоугольное поперечное сечение единичной ширины и толщины h_0 . В момент времени $t=0$ к стержню прикладывается сила тяжести, а на боковой поверхности начинается наращивание материала, которое осуществляется на отрезке времени $[0, T]$. При непрерывном наращивании за время dt к растущему телу присоединяется элемент, представляющий собой стержень длины $2l$ прямоугольного поперечного сечения единичной ширины и толщины $dh(t)$. Этот элемент предварительно растягивается приложенными к его торцам усилиями, так что в нем возникает деформация натяга ϵ_* . После растяжения наращиваемый элемент накладывается на поверхность растущего стержня и мгновенно соединяется с ним. За счет притока вещества толщина растущего стержня изменяется по закону $h=h(t)$. Введем ось x , направленную вдоль продольной оси стержня в недеформированном состоянии. Обозначим через $w(t, x)$ прогиб стержня, направленный по вертикали вниз. Аналогично (1.2) найдем выражение для изгибающего момента

$$M = \frac{E}{12} \left[h^3(t) w''(t, x) - 3 \int_0^t h^2(\tau) h'(\tau) w''(\tau, x) d\tau \right] + \frac{\sigma_*}{4} [h^2(t) - h_0^2] \quad (2.1)$$

Величина M равна

$$M = [\rho g h(t) - q(t, s)] (s-x) ds \quad (2.2)$$

Здесь ρ — плотность материала, g — ускорение силы тяжести.

Для описания механического поведения клеевого слоя примем модель п. 1, для простоты считая модуль упругости постоянным: $E_0(t) = E_0$. При этом

$$\begin{aligned} q &= E_0 w(t, x) / H \quad (t \in [0, \tau_0(x)]) \\ q &= 0 \quad (t \in [\tau_0(x), T]) \end{aligned} \quad (2.3)$$

где H — толщина клеевого слоя. Момент разрыва слоя $\tau_0(x)$ определяется из условия

$$w(\tau_0(x), x) = 0 \quad (2.4)$$

При монотонном нагружении клеевой слой ведет себя как гидростатическое основание, которое сопротивляется сжатию, но не сопротивляется растяжению [2].

Изгиб стержня под действием силы тяжести и усилий натяжения происходит симметрично относительно точки $x=0$. Поэтому можно ограничиться анализом деформации стержня на отрезке $[0, l]$. При этом разрыв клеевого слоя начинается в момент времени $\tau_0(l)$ в точке l . Подставляя выражения (2.1), (2.3) в (2.2), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{12} E h_0^3 w^{IV}(0, x) + E_0 w(0, x) / H &= \rho g h_0 \quad (x \in [0, l]) \\ \frac{1}{12} E h^3(t) w^{IV} + E_0 w' / H &= \rho g h'(t) \quad (x \in [0, a(t))) \\ \frac{1}{12} E h^3(t) w^{IV} &= \rho g h'(t) \quad (x \in [a(t), l]) \end{aligned} \quad (2.5)$$

В качестве граничных условий для уравнений (2.5) примем (1.8) и

$$w'(t, 0) = 0, \quad \frac{E_0}{H} \int_0^{a(t)} w(t, x) dx = \rho g l h(t) \quad (2.6)$$

Первое равенство (2.6) следует из симметрии прогиба, а второе представляет собой уравнение равновесия стержня под действием силы тяжести и реакции основания. В точке $a(t)$ выполняются условия непрерывности прогиба, его производной по x , а также изгибающего момента и перерезывающей силы.

Введем безразмерные переменные и параметры: $w_* = E h_0^2 w / (12 \rho g l^4)$, $y_* = E h_0^2 T w' / (12 \rho g l^4)$, $\alpha = 12 E_0 l^4 / (E H h_0^3)$, $\beta = \sigma_* h_0 / (2 \rho g l^2)$. В новых обозначениях система уравнений (1.8), (2.5), (2.6) принимает вид (звездочку опускаем):

$$y^{IV} + \alpha h^{-3}(t) y = h'(t) h^{-3}(t) \quad (x \in [0, a(t))) \quad (2.7)$$

$$y^{IV} = h'(t) h^{-3}(t) \quad (x \in [a(t), 1]) \quad (2.8)$$

$$y''(t, 1) = -\beta h'(t) h^{-2}(t), \quad y'''(t, 1) = 0 \quad (2.9)$$

$$y'(t, 0) = 0, \quad \int_0^{a(t)} y(t, x) dx = \alpha^{-1} h'(t) \quad (2.10)$$

При выводе последнего уравнения (2.10) учитывалось условие разрыва клеевого слоя (2.4). Начальное значение прогиба стержня постоянно и равно $w(0, x) = \alpha^{-1}$. Из уравнения (2.8) с граничными условиями (2.9), условий непрерывности изгибающего момента и перерезывающей силы в точке $a(t)$ и (2.4) найдем

$$\begin{aligned} y''(t, a(t)) &= 2h'(t) h^{-3}(t) [(1-a(t))^2 - 2\beta h(t)] \\ y'''(t, a(t)) &= -h'(t) h^{-3}(t) (1-a(t)) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Уравнение (2.7) с граничными условиями (2.10), (2.11) описывает прогиб растущего стержня, лежащего на клеевом слое. Граница зоны разрыва определяется из соотношения (2.4).

Для исследования влияния усилий натяжения на деформацию растущего стержня проведем численное интегрирование соотношений (2.7) и (2.11) при $\alpha=15$, $h=1+2t$. На фиг. 2 представлены графики зависимости от времени координаты конца зоны разрыва. Кривые 1-3 соответствуют значениям $\beta=0, 1; 0, 5; 1, 0$. Результаты расчетов свидетельствуют о существенной зависимости длины зоны разрыва от усилий натяга. При сравнительно слабом натяге ($\beta=0, 1$) зона разрыва вообще не

возникает. При сильном натяге ($\beta=1,0$) длина зоны разрыва составляет 24% длины стержня.

При изучении процессов наращивания в условиях, когда возможен разрыв клеевого соединения, представляют интерес ограничения на параметры задачи, гарантирующие отсутствие отдира. Рассмотрим вывод соответствующей оценки на примере задачи наращивания упругого стержня. При отсутствии разрыва клеевого слоя безразмерная скорость прогиба описывается уравнением (2.7) с граничными условиями (2.9) и (2.10). Положим $y=h^{\cdot}(t)[\alpha^{-1}-\beta h^{-2}(t)y_1(t,x)]$. Подставляя это выражение в соотношения (2.7)–(2.10), получим

$$y_1^{IV} + \alpha h^{-3}(t)y_1 = 0, \quad y_1'(t, 0) = 0.$$

$$y_1''(t, 1) = 1, \quad y_1'''(t, 1) = 0, \quad \int_0^1 y_1(t, x) dx = 0 \quad (2.12)$$

Безразмерный прогиб растущего стержня равен

$$w = \alpha^{-1} + \int_0^t y(\tau, x) d\tau$$

Поскольку разрыв клеевого слоя начинается в точке $x=1$, для его предотвращения достаточно потребовать: $\min_t w(t, 1) > 0$ ($t \in [0, 1]$). Отсюда найдем

$$\beta < \beta_* = \min_t h(t) \left[\alpha \int_0^t y_1(\tau, 1) h^{-2}(\tau) h^{\cdot}(\tau) d\tau \right]^{-1} \quad (2.13)$$

Соотношение (2.13) представляет собой условие на интенсивность натяга β , гарантирующее отсутствие разрыва клеевого слоя. Согласно (2.12) это неравенство является явной оценкой параметра β , так как величина β_* не зависит от усилий натяжения.

В результате интегрирования уравнения (2.12) при $\alpha=15$, $h=1+2t$ получим значение $\beta_*=0,31$.

3. Нарощивание круглой пластины. Рассмотрим осесимметричную деформацию круглой пластины радиуса l толщины h_0 , которая лежит на клеевом слое, опирающемся на вязкоупругое полупространство. В момент времени $t=0$ к пластине прикладывается сила тяжести, а на ее верхней грани начинается наращивание материала, которое осуществляется на отрезке времени $[0, T]$. При этом толщина пластины изменяется по закону $h=h(t)$. Боковая кромка пластины свободна от нагрузки. Введем цилиндрическую систему координат (r, ϑ, z) , начало которой лежит в центре нижней грани пластины, а ось z направлена вертикально вниз. При непрерывном наращивании за время dt к растущему телу присоединяется новый элемент, который представляет собой круглую пластину радиуса l и толщины $dh(t)$. Нарощиваемый элемент предварительно деформируется приложенными к его кромке растягивающими усилиями, так что в нем возникает однородное поле деформаций, характеризуемое ненулевыми компонентами тензора деформаций $\varepsilon_r = \varepsilon_\vartheta = \varepsilon_*$. После растяжения наращиваемый элемент накладывается на верхнюю грань пластины и мгновенно соединяется с ней. Под действием силы тяжести и усилий натяжения происходит изгиб растущей пластины. Обозначим через $w(t, r)$ прогиб пластины. Согласно обобщенной гипотезе Кирхгофа–Лява [3] ненулевые компоненты тензора деформаций определяются по формулам

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \varepsilon_r^\circ(t, r) - \varepsilon_r^\circ(\tau^*(z_1), r) + \varepsilon_* + z_1 [w''(t, r) - w''(\tau^*(z_1), r)] \\ \varepsilon_\vartheta &= \varepsilon_\vartheta^\circ(t, r) - \varepsilon_\vartheta^\circ(\tau^*(z_1), r) + \varepsilon_* + z_1 r^{-1} [w'(t, r) - w'(\tau^*(z_1), r)] \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь ε_r° , $\varepsilon_\vartheta^\circ$ — компоненты тензора деформаций на нижней грани пластины, $z_1 = -z$, штрих обозначает производную по r . Поведение мате-

риала пластины описывается уравнением состояния упругого тела с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν . Из гипотезы Кирхгофа — Лява найдем ненулевые компоненты тензора напряжений

$$\begin{aligned}\sigma_r &= E(1-\nu^2)^{-1}(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\phi) \\ \sigma_\phi &= E(1-\nu^2)^{-1}(\nu\varepsilon_r + \varepsilon_\phi)\end{aligned}\quad (3.2)$$

Подставим выражения (3.1), (3.2) в соотношения для определения продольных усилий и изгибающих моментов

$$\begin{aligned}N_r &= \int_0^{h(t)} \sigma_r dz_1, & N_\phi &= \int_0^{h(t)} \sigma_\phi dz_1 \\ M_r &= \int_0^{h(t)} \sigma_r z_1 dz_1, & M_\phi &= \int_0^{h(t)} \sigma_\phi z_1 dz_1\end{aligned}$$

Найдем величины ε_r° , ε_ϕ° из условий $N_r=0$, $N_\phi=0$ и подставим в выражения для изгибающих моментов. Получим

$$\begin{aligned}M_r &= \frac{1}{12}E(1-\nu^2)^{-1} \left[h^3(t) (w''(t, r) + \nu r^{-1} w'(t, r)) - \right. \\ &- 3 \int_0^t h^2(\tau) h'(\tau) (w''(\tau, r) + \nu r^{-1} w'(\tau, r)) d\tau \left. \right] + \frac{1}{4}\sigma_* (1-\nu)^{-1} [h^2(t) - h_0^2] \\ M_\phi &= \frac{1}{12}E(1-\nu^2)^{-1} \left[h^3(t) (\nu w''(t, r) + r^{-1} w'(t, r)) - \right. \\ &- 3 \int_0^t h^2(\tau) h'(\tau) (\nu w''(\tau, r) + r^{-1} w'(\tau, r)) d\tau \left. \right] + \frac{1}{4}\sigma_* (1-\nu)^{-1} [h^2(t) - h_0^2]\end{aligned}\quad (3.3)$$

Уравнения равновесия элемента пластины имеют вид [4]:

$$Q_r' + r^{-1} Q_r = \rho g h - q, \quad M_r' + r^{-1} (M_r - M_\phi) = Q_r \quad (3.4)$$

Здесь Q_r — перерезывающая сила, q — интенсивность нагрузки, действующей на пластину со стороны клеевого слоя. Подставляя выражения (3.3) в (3.4), найдем $(\Delta w = w'' + r^{-1} w')$:

$$\frac{E}{12(1-\nu^2)} \left[h^3(t) \Delta^2 w(t, r) - 3 \int_0^t h^2(\tau) h'(\tau) \Delta^2 w(\tau, r) d\tau \right] = \rho g h(t) - q(t, r) \quad (3.5)$$

Рассмотрим модель клеевого слоя, отличающуюся от изложенной в пп. 1, 2. Считаем, что клеевой слой не сопротивляется деформации в плоскости (r, ϕ) и сдвиговым деформациям. Если осевое растягивающее усилие $\sigma_z = -q$ не превосходит максимально допустимого значения σ_0 , то осевая деформация слоя ε_z равна нулю. В момент $\tau_0(r)$ достижения растягивающим усилием в точке с радиусом r значения σ_0 происходит разрыв клеевого соединения в окрестности этой точки. Согласно этой модели до момента разрыва слоя $\tau_0(r)$ прогиб пластины $w(t, r)$ совпадает с вертикальным смещением полупространства, на которое опирается клеевой слой. После разрыва усилие взаимодействия пластины с основанием $q(t, r)$ полагается равным нулю.

Зависимость вертикального смещения на границе полупространства w от интенсивности давления q для упругой среды следует из решения задачи Буссинеска [5]. Предположим, что поведение основания описывается уравнением состояния стареющего вязкоупругого тела [6] с постоянным модулем объемной деформации K , мгновенным модулем сдвига $G(t)$ и оператором релаксации Q . Обозначим через $a(t)$ радиус зоны кон-

такта пластины с основанием в момент времени t . Можно показать, что вертикальное смещение на границе вязкоупругого полупространства w определяется по формуле

$$w = \frac{3K+4G(t)}{2G(t)(3K+G(t))} \left[\int_0^{a(t)} \Lambda(r, s) q(t, s) ds + \int_0^l \Lambda(r, s) ds \int_0^{\min(t, \tau_0(s))} S^0(t, \tau) q(\tau, s) d\tau \right] \quad (3.6)$$

Входящая в это соотношение функция $\Lambda(r, s)$ равна

$$\Lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \left(\frac{s}{r} \right)^{2n+1} \quad (s < r)$$

$$\Lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \left(\frac{r}{s} \right)^{2n} \quad (s > r)$$

Функция $S^0(t, \tau)$ является ядром интегрального оператора S :

$$I+S = \frac{(3K+G)G}{3K+4G} \left(I - \frac{G}{3K+G} Q \right)^{-1} \frac{3K+4G}{3K+G} \left(I - \frac{4G}{3K+4G} Q \right) (I-Q)^{-1} \frac{1}{G}$$

где I — единичный оператор.

На боковой кромке пластины выполняются условия $M_r(t, l) = 0$, $Q_r(t, l) = 0$. Из этих соотношений, (3.3) и (3.4) найдем

$$h^3(t) \left[w''(t, l) + \frac{\nu}{l} w'(t, l) \right] - 3 \int_0^l h^2(\tau) h'(\tau) \left[w''(\tau, l) + \frac{\nu}{l} w'(\tau, l) \right] d\tau = -3\varepsilon_*(1+\nu) [h^2(t) - h_0^2]$$

$$w'''(t, l) + w''(t, l)/l - w'(t, l)/l^2 = 0 \quad (3.7)$$

Запишем условие ограниченности прогиба в центре пластины и уравнение равновесия пластины под действием силы веса и силы реакции основания

$$|w(t, 0)| < \infty, \quad 2 \int_0^{a(t)} q(t, r) r dr = \rho g l^2 h(t) \quad (3.8)$$

В точке $a(t)$ выполняется условие отдира

$$q(t, a(t)) = -\sigma_0 \quad (3.9)$$

Система интегродифференциальных уравнений (3.5), (3.6) с граничными условиями (3.7) — (3.9) определяет прогиб растущей пластины, лежащей на вязкоупругом основании, в условиях разрыва клеевого слоя.

Автор выражает глубокую благодарность Н. Х. Арутюняну за внимание к работе и полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арутюнян Н. Х., Поганов В. Д. Об устойчивости растущего вязкоупругого стержня, подверженного старению // Докл. АН СССР. 1983. Т. 270, № 4. С. 799–803.
2. Саусвелл Р. В. Введение в теорию упругости: Для инженеров и физиков. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. 675 с.
3. Арутюнян Н. Х., Михайлов М. Н., Поганов В. Д. Устойчивость растущих вязкоупругих оболочек, подверженных старению // ПМТФ. 1986. № 2. С. 151–160.
4. Новожиллов В. В. Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1951. 344 с.
5. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
6. Арутюнян Н. Х., Дроздов А. Д., Наумов В. Э. Механика растущих вязкоупруго-пластических тел. М.: Наука, 1987. 471 с.