МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1989

УДК 539.374

О. Г. КИКВИДЗЕ

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ТЕЧЕНИЕ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКО-УПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ МАТЕРИАЛА В КОНТЕЙНЕРЕ

Изложен расчет неустановившегося течения материала в круглом цилиндрическом контейнере под действием пресс-штемпеля на основе теории ползучести (теории упрочнения). Предполагается, что на поверхности контакта имеет место прилипание.

1. Постановка задачи. Рассмотрим неустановившееся течение нелинейно-вязко-упрочняющегося материала в круглом цилиндрическом контейнере. Примем цилиндрическую систему координат (r, Θ, z) (фиг. 1). Предположим, что течение ламинарное, осесимметричное и компоненты скорости перемещения $v_r=v_\Theta=0$, $v_z\neq0$, а на поверхности контакта материала с контейнером имеет место прилипание $v_z=0$.

В момент времени $t=0$ на материал начинает давить пресс-штемпель, который движется с постоянной скоростью u. Материал считается несжимаемым и изотропным. Примем уравнение состояния в следующем виде [1]:

$$\sigma_e=a\xi_e{}^m p^n \tag{1.1}$$

где σ_e, ξ_e, $p=\int \xi_e dt$ — эквивалентное напряжение, эквивалентная скорость деформации и параметр Одквиста соответственно; a, m, n — постоянные материала при определенной температуре.

Используя условие несжимаемости нетрудно показать, что осевая скорость $v_z=v_z(r, t)$.

Эквивалентная скорость деформации в рассматриваемом случае [1]:

$$\xi_e=3^{-1/2}\partial v_z/\partial r \tag{1.2}$$

Согласно принятому уравнению состояния (1.1), используя соотношение (1.2) имеем

$$\sigma_e=3^{-(m+n)/2}a\left|\frac{\partial v_z}{\partial r}\right|^{m-1}\frac{\partial v_z}{\partial r}\left(\int\frac{\partial v_z}{\partial r}dt\right)^n$$

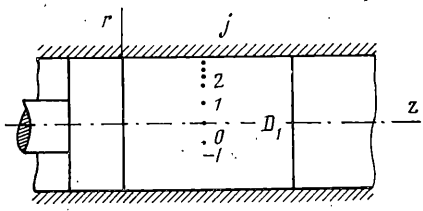
Касательное напряжение, которое возникает при таком течении [1] равно $\tau=\sigma_e/\sqrt{3}$.

Если принять, что $\partial\sigma_0/\partial z=f(t)$ (σ_0 — среднее нормальное напряжение), то решение поставленной одномерной нестационарной задачи сводится к интегрированию нелинейного дифференциального уравнения в частных производных (ρ — плотность материала):

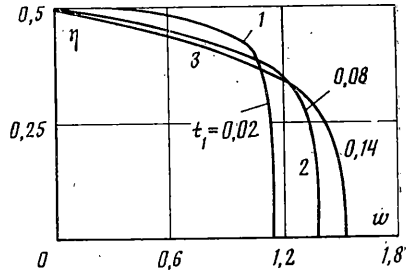
$$\rho\frac{\partial v_z}{\partial t}=3^{-(m+n+1)/2}a\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\left|\frac{\partial v_z}{\partial r}\right|^{m-1}\frac{\partial v_z}{\partial r}\left(\int\frac{\partial v_z}{\partial r}dt\right)^n r\right]+f \tag{1.3}$$

Граничные и начальное условия:

$$v_z(D_1/2, t)=0,\quad (\partial v_z/\partial r)_{r=0}=0,\quad v_z(r, 0)=u \tag{1.4}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Для того, чтобы определить неизвестную функцию f используем условие постоянства расхода в единицу времени

$$Q=2\pi\int_0^{D_1/2}|v_z|r\,dr$$

тогда средняя скорость перемещения материала в сечении трубы

$$v_1=u=\frac{8}{D_1^2}\int_0^{D_1/2}|v_z|r\,dr \tag{1.5}$$

Для численного решения введем безразмерные величины

$$w=v_z/u,\qquad \eta=r/D_1$$

$$t_1=3^{-(m+n+1)/2}\rho^{-1}D_1^{-m-1}au^{m-1},\qquad f_1(t_1)=3^{(m+n+1)/2}a^{-1}u^{-m}D_1^{m+1}f(t)$$

Уравнение (1.3), условия (1.4) и (1.5) в безразмерных величинах имеют вид

$$\frac{\partial w}{\partial t_1}=\frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\left|\frac{\partial w}{\partial\eta}\right|^{m-1}\frac{\partial w}{\partial\eta}\left(\int\frac{\partial w}{\partial\eta}dt_1\right)^n\eta\right]+f_1(t_1) \tag{1.6}$$

$$w(^1/_2,t_1)=0,\qquad (\partial w/\partial\eta)_{\eta=0}=0,\qquad w(\eta,0)=1 \tag{1.7}$$

$$\int_0^{1/2}|w|\eta\,d\eta={}^1/_8 \tag{1.8}$$

Для того, чтобы вычислить интеграл по времени в правой части (1.6) введем обозначение $y(\eta,t_1)=\int(\partial w/\partial\eta)dt_1$.

Для $y(\eta,t_1)$ будем иметь следующее дифференциальное уравнение с начальным условием

$$\partial y/\partial t_1=\partial w/\partial\eta \tag{1.9}$$

$$y(\eta,0)=0 \tag{1.10}$$

Заметим, что аналитическое выражение для осевой скорости w в случае установившегося течения при условии, что на поверхности контакта материала с контейнером $w=0$, [2]:

$$w=[3(m+n)+1](m+n+1)^{-1}[1-(2\eta)^{(m+n+1)/(m+n)}] \tag{1.11}$$

2. Численное решение. Решение уравнений (1.6), (1.9) проводим методом прямых. Заменим в них дифференциальные операторы по η центральными конечно-разностными аналогами

$$\frac{\partial w}{\partial\eta}=\frac{w_{i+1}-w_{i-1}}{2\Delta},\qquad \frac{\partial^2 w}{\partial\eta^2}=\frac{w_{i+1}-2w_i+w_{i-1}}{\Delta^2}$$

где $\Delta=1/(2j)$; j — число участков деления радиуса. Тогда получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

Чтобы исключить значение функции w в точке, номер которого (-1), используем второе условие (1.7) $w_{-1}=w_1$ (фиг. 1), а на поверхности контакта $w_j=0$.

При известной функции f_1 задача сводится к задаче Коши и решение ее в случае нелинейно-вязкой жидкости можно найти в [3]. Поскольку в нашем случае f_1, неизвестна, то интегрирование проводим в следующем порядке.

Разделим интервал по времени на ряд малых интервалов и будем считать, что в течение каждого из них $f_1=\text{const}$. На каждом шаге времени задачу можно решить методом стрельбы с применением пристрелки по методу Ньютона. Параметром стрельбы является f_1 и подбирается таким образом, чтобы удовлетворить условие (1.8). Сходимость метода Ньютона зависит от нулевого приближения $f_1(f_1^{(0)})$. Для того, чтобы получить $f_1^{(0)}$ в правой части (1.6) нелинейные слагаемые умножаются на параметр q. При $q=0$ легко определяется f_1, а при $q=1$ получаем решение исходного уравнения (1.6). Изложим последовательность интегрирования более подробно.

Получим решение в малом интервале времени $[0, \Delta t_1]$. Перепишем (1.6), (1.9), третье условие (1.7), (1.10), (1.8) в следующем виде

$$\mathbf{V}^{\cdot}=q\psi(\mathbf{V}, \mathbf{Y})+f_1, \qquad \mathbf{Y}^{\cdot}=F(\mathbf{V}) \tag{2.1}$$

$$\mathbf{V}(0)=1, \qquad \mathbf{Y}(0)=0 \tag{2.2}$$

$$\varphi(\mathbf{V}(\Delta t_1))=0 \tag{2.3}$$

где $\mathbf{V}$ — вектор, представляющий совокупность значений скорости перемещения в точках деления; $\mathbf{Y}$ — вектор, представляющий совокупность значений $y(\eta, t_1)$ в точках деления; q — параметр, от численного значения которого зависит решение задачи; точкой обозначена производная по времени.

При фиксированном численном значении параметра q $(q=0)$ используя условие (2.3) можно задать f_1:

$$f_1=\left(1-8\int_0^{1/2}|w(\eta,0)|\eta\, d\eta\right)/\Delta t_1$$

После этого численным интегрированием системы (2.1) с начальными условиями (2.2) определяем вектор $\mathbf{V}(\Delta t_1)$. Этот вектор будет зависеть от значения f_1 и от фиксированного значения параметра $q=q_0$: $\mathbf{V}(\Delta t_1)=\mathbf{V}(f_1, q_0)$. Чтобы вектор $\mathbf{V}(\Delta t_1)$ являлся решением задачи, дополнительно должно выполняться [4]: $\varphi(\mathbf{V}(f_1, q_0))=0$.

Это уравнение решается методом Ньютона при осуществлении итерационного процесса [4] (k — номер итерации):

$$f_1^{(k+1)}=f_1^{(k)}-(d\varphi/df_1)^{-1}\varphi(f_1^{(k)}, q_0)$$

Предположим, что при $q=q_i$ решение, определяемое функцией f_{1i} известно. Необходимо получить решение задачи при $q_{i+1}=q_i+\Delta q$. Начальное приближение в итерационном процессе находим по формуле [4]:

$$f_{1(i+1)}^{(0)}=f_{1i}+\frac{\partial f_{1i}}{\partial q}\Delta q+\frac{\partial^2 f_{1i}}{2\partial q^2}\Delta q^2 \tag{2.4}$$

Используя вышеописанный алгоритм при $q=1$ получаем решение исходного уравнения (1.6) в малом интервале $[0, \Delta t_1]$. На последующих шагах времени начальное значение функции берется с предыдущего шага и требуется, чтобы выполнялось условие (1.8). При первом шаге, т. е. в начале движения по параметру q, в правой части уравнения (2.4) учи-

тывается только одно слагаемое, при втором — два первых слагаемых, а в дальнейшем — все слагаемые.

Таким образом был просчитан пример течения материала, у которого $m=0{,}15$; $n=0{,}2$. На фиг. 2 кривыми *1*, *2*, *3* представлены изменения скорости течения. Безразмерное время, за которое скорость перемещения на оси достигает значения скорости установившегося течения, $t_1=0{,}14$. Результаты численного расчета для указанного времени в пределах 2% согласуются с теми, которые получаются из формулы (1.11).

Задача такого рода для линейно-вязкой жидкости решена в [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Малинин Н. Н.* Ползучесть в обработке металлов. М.: Машиностроение, 1986. 221 с.
2. *Киквидзе О. Г., Малинин Н. Н.* Прессование нелинейно-вязко-упрочняющегося материала через коническую матрицу // Изв. вузов. Машиностроение. 1987. № 9. С. 116–120.
3. *Balmer R. T., Florina M. A.* Insteady flow of an inelastic power-low fluid in a circular tube // J. non-Newtonian fluid mech. 1980. V. 7. No. 2/3. P. 189–198.
4. *Валишвили Н. В.* Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. М.: Машиностроение, 1976. 278 с.
5. *Огибалов П. М., Мирзаджанзаде А. Х.* Нестационарные движения вязко-пластичных сред. М.: Изд-во МГУ, 1970. 415 с.

Москва

Поступила в редакцию
8.I.1988