МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1989

УДК 539.3

Ш. М. ТАХИРОВ

ДВИЖЕНИЕ МАССИВНОЙ ПОЛОСЫ, ЛЕЖАЩЕЙ НА ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОМ УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ, ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ВОЛНЫ

Решена задача о движении массивной жесткой полосы, лежащей на трансверсально-изотропном упругом полупространстве, под действием плоской нестационарной волны. Волна падает нормально к поверхности, на которой вне полосы заданы граничные условия равенства нулю нормальных напряжений и касательных перемещений. Для изотропного случая показано малое отличие полученного решения с известным решением, удовлетворяющим условию свободной границы.

Для трансверсально-изотропной среды, находящейся в условиях плоской деформации, напряжения и деформации (считающиеся малыми) связаны следующим образом

$$\sigma_{xx}=c_{11}\varepsilon_{xx}+c_{12}\varepsilon_{yy},\quad \sigma_{yy}=c_{12}\varepsilon_{xx}+c_{22}\varepsilon_{yy}$$

$$\sigma_{zz}=c_{13}\varepsilon_{xx}+c_{23}\varepsilon_{yy},\ \sigma_{xy}=c_{66}\varepsilon_{xy}$$

$$\varepsilon_{xx}=\partial u/\partial x,\ \varepsilon_{yy}=\partial v/\partial y,\ \varepsilon_{xy}=(\partial u/\partial y+\partial v/\partial x)/2$$

где u и v — компоненты вектора перемещений $\mathbf{w}=(u,\ v,\ 0)$; c_{11}, c_{12}, c_{22}, c_{13}, c_{23}, c_{66} — упругие постоянные среды. Считается, что движение среды одинаково в любых сечениях $z=\mathrm{const}$ и ось Oy является осью симметрии ее упругих свойств. В этом случае уравнения движения такой среды имеют вид (ρ — плотность среды):

$$a\partial^2u/\partial x^2+d\partial^2u/\partial y^2+c\partial^2v/\partial x\partial y=\partial^2u/\partial t^2$$

$$d\partial^2v/\partial x^2+b\partial^2v/\partial y^2+c\partial^2u/\partial x\partial y=\partial^2v/\partial t^2$$

$$a=c_{11}/\rho,\quad b=c_{22}/\rho,\quad d=c_{66}/(2\rho)$$

$$c=(2c_{12}+c_{66})/(2\rho)$$

Ограничимся для простоты (не нарушая общности) случаем трехконстантной анизотропной среды, считая, что $a=b$.

Рассматривается задача о падении плоской волны $v=v_0(t+y\cdot a^{-1/2})$ ($u=0$) из глубины трансверсально-изотропного полупространства $y>0$ на массивную подвижную жесткую полосу, лежащую на ее поверхности. Граничные условия при $y=0$ вне полосы приближенно берутся в виде

$$\sigma_{yy}=0,\quad u=0\quad (x\in(-\infty,\ 0)\cup(2l,\ +\infty)) \tag{1}$$

а под полосой ставятся условия гладкого контакта, т. е. при $x\in(0,\ 2l)$ перемещение полосы и частиц поверхности по оси y совпадают, а касательные напряжения равны нулю.

Движение полосы будет описываться уравнением [1] ($y=0$) $md^2v^0/dt^2=R(t)$, где m — погонная масса полосы, v^0 — перемещение полосы по оси y, $R(t)$ — результирующая сила, действующая в направлении той же оси. Величина v^0 состоит из двух перемещений: перемещения в случае отсутствия полосы и перемещения самой полосы относительно поверхности полупространства, т. е. $v^0(t)=2v_0(t)+v_n(t)$. Величина $R(t)$ — результирующая напряжений, возникающих под гладким штампом при его вдавливании в полупространство по закону $v_n(t)$.

Определим $R(t)$. Сначала решим задачу о вдавливании штампа по закону $v=v_1H(t)$. Здесь v_1 — константа, имеющая размерность длины, $H(t)$ — функция Хевисайда.

Решение будем искать в виде $u=u_2$, $v=v_2+v_1H(t-ya^{-1/2})$, где неизвестные величины u_2 и v_2 соответствуют перемещениям в областях дифракции.

Граничные условия в этом случае могут быть представлены в виде $(y=0)$:

$$\sigma_{yy}=0, \quad u=0 \quad (x<0)$$

$$\sigma_{xy}=0, \quad v=v_1H(t) \quad (x>0)$$

Здесь граничные условия распространены на всю правую полупрямую, так как отыскивается сначала решение для случая первичных дифрагированных волн, возникающих на одном из ребер полосы (в данном случае взято левое ребро). Последние условия выполнены, если положить (при $y=0$):

$$\partial v_2/\partial y=v_1\delta(t)a^{-1/2}, \quad u_2=0 \quad (x<0)$$

$$\partial u_2/\partial y=0, \quad v_2=0 \quad (x>0)$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака.

Переходя к комплексной переменной θ_1 [2] и решая соответствующую краевую задачу для аналитических функций, действительные части которых совпадают с компонентами перемещений, получим решение

$$u_2=\operatorname{Re} U(\theta_1), \quad v_2=\operatorname{Re} V(\theta_1)$$

$$U=\int_{\theta_0}^{\theta_1}\alpha_0 c\lambda_1/[(a\theta^2+d\lambda_1^2-1)\pi i(\theta+1/\sqrt{a})^{1/2}]d\theta$$

$$V=\int_{\theta_0}^{\theta_1}\alpha_0/[\pi i\theta(\theta+1/\sqrt{a})^{1/2}]d\theta, \quad \alpha_0=v_1a^{-1/4}$$

$$\lambda_1(\theta)=\{B-[B^2-(1/a-\theta^2)(1/d-\theta^2)]^{1/2}\}^{1/2}$$

$$B=[a+d-\theta^2(a^2+d^2-c^2)]/(2ad)$$

а θ_1 есть решение уравнения $1-\theta_1x/t+\lambda_1(\theta_1)y/t=0$.

Из последних выражений с учетом зависимости $(y=0)$

$$\sigma_{yy}=\rho\{-a\operatorname{Re}[\lambda_1V'/x]+(c-d)\operatorname{Re}[\theta_1U'/x]\}$$

получим для этой компоненты напряжений следующее выражение $(y=0)$

$$\sigma_{yy}=\frac{\rho a v_1\operatorname{Im}\zeta}{x\pi z\sqrt{z+1}}\,\frac{z^2[1-\gamma_2^2(\gamma_2^2-\gamma_1^2)]+\gamma_1^2\zeta^2-1}{z^2+\gamma_1^2\zeta^2-1}$$

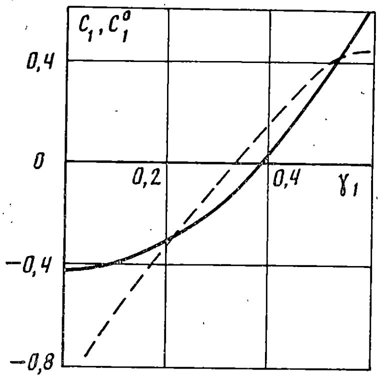
Здесь введены обозначения: $\zeta=\sqrt{a}\lambda_1$, $z=\sqrt{a}\theta_1$, $\theta_1=t/x$, $\gamma_1^2=d/a$, $\gamma_2^2=c/a$.

Интегрируя σ_{yy} по x от 0 до $\sqrt{a}t$ (т. е. до фронта волны), получим результирующую силу $R_1(t)=-\rho a v_1C_1^0/2$, где через C_1^0 обозначен интеграл

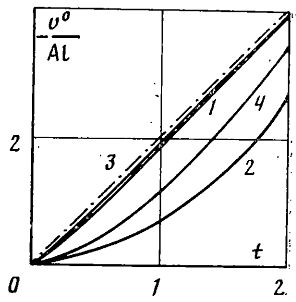
$$C_1^0=\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{\operatorname{Im}\beta}{\sqrt{\alpha}\sqrt{1+\alpha}}\,\frac{1-\gamma_2^2(\gamma_2^2-\gamma_1^2)+\gamma_1^2\beta^2-\alpha^2}{1+\gamma_1^2\beta^2-\alpha^2}d\alpha$$

$$\beta=\{B_1-[B_1^2-(\alpha^2-1)(\alpha^2/\gamma_1^2-1)]^{1/2}\}^{1/2}$$

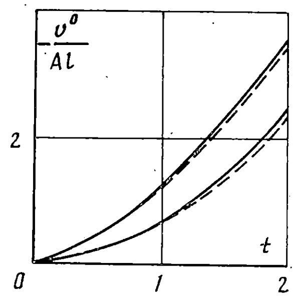
$$B_1=[(1+\gamma_1^2)\alpha^2-(1+\gamma_1^4-\gamma_2^4)]/(2\gamma_1^2)$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Вернемся теперь к основной исследуемой задаче. Для полосы, вдавливаемой по неизвестному закону $v_n(t)$, с помощью интеграла Дюамеля получим полную результирующую силу (учитывая напряжения в плоской волне и используя принцип суперпозиции): $R(t) = -\rho l\sqrt{a}v_n'(t) - \rho a C_1^0 v_n(t)/2$. Для полосы конечной ширины (для времен меньших, чем время возникновения вторично-дифрагированных волн) полученное выражение должно удвоиться, так как первичные волны распространяются от обоих концов полосы.

Тогда уравнение относительного движения полосы примет вид

$$mv_n''(t) + 2\sqrt{a}\rho l v_n'(t) + C_1^0 \rho a v_n(t) = -2mv_0'' \qquad (2)$$

Так, для изотропной среды (когда $\gamma_2^2 = 1 - \gamma_1^2$) константа C_1^0 имеет следующую зависимость от параметра γ_1: $C_1^0 = 1 - \sqrt{2}(1 - 2\gamma_1^2)$.

Близость полученной константы и постоянной, определенной в [1] для изотропного полупространства с граничными условиями свободной границы вне полосы, показана на фиг. 1. Уравнения относительного движения полосы в этих двух случаях отличаются только константами: в первом случае C_1^0 (сплошная линия), во втором, следуя обозначениям [1], $-C_1$ (штриховая линия).

В качестве простейшего примера падающей волны можно взять

$$v_0(t) = -\sigma_0/(\sqrt{a}\rho)tH(t) \qquad (3)$$

Тогда решение уравнения (2) с начальными условиями $v_n(0) + 2v_0(0) = 0$, $v_n'(0) + 2v_0'(0) = 0$ имеет вид

$$v_n(\tau)/l = 2A/\alpha \exp(-M\tau) sh(\alpha\tau)$$

$$\alpha = (M(M - C_1^0))^{1/2}, \quad \tau = \sqrt{a}t/l, \quad M = \rho l^2/m, \quad A = \sigma_0/(\rho a)$$

Значения C_1^0 для некоторых значений параметров γ_1 и γ_2 трансверсально-изотропной среды определены численно; причем выбраны такие значения этих параметров, которые удовлетворяют условиям отсутствия кромок на фронтах дифракционных волн [3]. На фиг. 2 приведены зависимости перемещений полосы от времени для сильвина ($C_1^0=0{,}34$ — кривые *1* и *2*) и кубических пиритов ($C_1^0=3{,}24$ — кривые *3* и *4*). Кривые с четными номерами построены при $M=0{,}5$, нечетными — при $M=10$.

В случае изотропного полупространства, для различных γ_1 (т. е. различных отношений скоростей продольной и поперечной волн) полученное решение сравнивалось с результатами [1]. Показано, что различие в перемещениях полосы — для падающей волны (3) — не превышает 5—9%. Наиболее характерные графики представлены на фиг. 3 (сплошные и штриховые линии соответствуют решениям с C_1^0 и C_1). Верхняя пара кривых получена при $M=0{,}5$, нижняя — при $M=2$. В обоих случаях $\gamma_1=0{,}6$ ($C_1^0=0{,}6$; $C_1=0{,}43$).

Следует отметить, что условие на ребре выполнено, т. е. не потребовалось введения дополнительных обменных волн как, например, в задачах дифракции.

Проведенный выше анализ показывает, что на движение полосы мало влияет замена граничных условий свободной поверхности на граничные условия (1). Слабое влияние аналогичной замены типа граничных условий на решение для стационарной задачи было отмечено в [4].

Результаты, полученные для изотропной среды, дают основание надеяться, что и в анизотропном случае такая близость решений сохранится.

Автор выражает благодарность М. Ш. Исраилову за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Флитман Л. М.* О движении под действием сейсмической волны жесткой массивной полосы, лежащей на упругом полупространстве // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 6. С. 1043–1058.
2. *Свекло В. А.* К решению динамических задач плоской теории упругости для анизотропного тела // ПММ. 1961. Т. 25. Вып. 5. С. 885–896.
3. *Будаев В. С.* Распространение колебаний от источника типа сосредоточенного импульса в анизотропной среде // Прикл. механика. 1973. Т. 9. Вып. 2. С. 67–73.
4. *Ойен М. А.* Установившееся движение жесткой полосы, скрепленной с упругим полупространством // Тр. Америк. общества инж.-механиков. Прикл. механика. 1971. № 2. С. 37–44.

Москва

Поступила в редакцию
1.III.1988