МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1989

УДК 531.011

Е. М. ПОТАПЕНКО

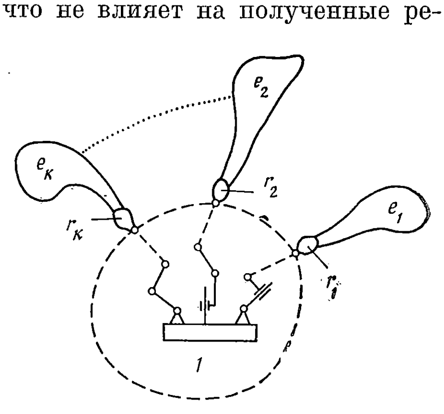
НАБЛЮДАЕМОСТЬ, УПРАВЛЯЕМОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ СЛОЖНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С УПРУГИМИ КОНЕЧНЫМИ ЗВЕНЬЯМИ

Рассматривается произвольная механическая система, имеющая структуру «дерева» с упругими конечными звеньями на каждой «ветви». Составлены обобщенные уравнения движения и исследованы управляемость и наблюдаемость системы. Доказаны теоремы, позволяющие судить об устойчивости упругой распределенной системы по уравнениям без учета упругости.

Рассматриваемую структуру могут иметь некоторые транспортные средства, многорукие роботы на подвижном основании, космические аппараты. Обычно при разработке систем управления подобных объектов учитывают несколько низших тонов упругих колебаний, отбрасывая все остальные тона. Однако это может привести к появлению неустойчивости движения в реальной системе, содержащей весь спектр частот упругих колебаний.

В публикуемой работе устанавливаются требования к законам управления, удовлетворение которых гарантирует асимптотическую устойчивость движения всей системы с полным учетом упругости конечных звеньев.

1. Уравнения движения. Пусть система представляет собой сложный механизм, состоящий из n звеньев, соединенных голономными связями; $(n-k)$ звеньев являются абсолютно твердыми и размещены в пространстве 1 на фигуре. Конечные звенья $1, 2, \ldots, j, \ldots, k$ кинематических ветвей состоят из абсолютно твердых оснований r_j и жестко присоединенных к ним упругих частей e_j. По всем степеням свободы в сочленениях установлены управляющие устройства и датчики перемещений. В сочленениях звеньев может быть учтена упругость, что не влияет на полученные результаты. Состояние твердой части системы, включая части r_j, определяется векторами координат x и скоростей $x^{\cdot}$. Состояние системы без учета k конечных элементов определяется векторами координат x_1 и скоростей $x_1^{\cdot}$. С частями r_j жестко связываются правые ортогональные базисы O_j. Пусть l_j — радиус-вектор элемента части e_j в базисе O_j в недеформированном состоянии, $u(l_j)$ и $u^{\cdot}(l_j)$ — векторы упругой деформации и ее скорости в базисе O_j в точке с радиусом-вектором l_j, v_{0j} и ω_j — векторы абсолютной линейной и угловой скоростей базиса O_j, записанные через проекции на собственные оси. Тогда вектор абсолютной скорости элемента упругой части определится выражением



$$v_j = v_{0j} - [l_j^* + u^*(l_j)]\,\omega_j + u^{\cdot}(l_j) \qquad (1.1)$$

где a^* — кососимметрическая матрица, составленная из проекций вектора **a**, а a^*b — матричное представление векторного умножения векторов **a** и **b**. Имеют место соотношения

$$v_{0j} = A_{1j}(x)\,x^{\cdot}, \quad \omega_j = A_{2j}(x)\,x^{\cdot} \qquad (1.2)$$

Кинетическая энергия T всей материальной системы определяется выражением (суммирование по j здесь и далее от 1 до k):

$$2T=x_1^{\cdot T}M_1(x_1)x_1^{\cdot}+x^{\cdot T}\left[\sum M_{rj}(x)\right]x^{\cdot}+\sum\int\limits_{m_j} v_j^T v_j\,dm \tag{1.3}$$

где $M_1(x_1)$ — массовая матрица системы без учета конечных звеньев, $M_{rj}(x)$ — массовая матрица части r_j, m_j — масса части e_j. Имеют место соотношения

$$\int\limits_{m_j} l_j^* l_j^*\,dm=-J_j,\qquad \int\limits_{m_j} l_j^*\,dm=l_{cj}^* m_j \tag{1.4}$$

где J_j, l_{cj} — матрица моментов инерции и координата центра масс части e_j в базисе O_j без учета упругих деформаций. Подстановка (1.1) в (1.3) с учетом (1.2), (1.4) дает выражение

$$2T=x^{\cdot T}M(x)x^{\cdot}+\sum\int\limits_{m_j} u^{\cdot T}u^{\cdot}\,dm+$$

$$+2x^{\cdot T}\sum\left[A_{1j}^T(x)\int\limits_{m_j} u^{\cdot}\,dm+A_{2j}^T(x)\int\limits_{m_j} l_j^* u^{\cdot}\,dm\right]+\Delta T \tag{1.5}$$

где $M(x)$ — массовая матрица всей системы без учета упругих деформаций, ΔT — слагаемое, исчезающее при линеаризации в (1.1).

Ниже будет рассматриваться режим стабилизации с малым отклонением Δx от стационарного состояния x_0. Тогда, сохраняя только квадратичные члены малых величин, в выражениях (1.3), (1.5) вместо x следует писать x_0, а вместо $x^{\cdot}$ $\Delta x^{\cdot}$, но для краткости написания аргумент x_0 и знак Δ в дальнейшем писаться не будут. С учетом сказанного выражения (1.3), (1.5) принимают вид

$$2T=x_1^{\cdot T}M_1x^{\cdot}+x^{\cdot T}\left(\sum M_{rj}\right)x^{\cdot}+\sum\int\limits_{m_j}(A_jx^{\cdot}+u^{\cdot})^T(A_jx^{\cdot}+u^{\cdot})\,dm \tag{1.6}$$

$$2T=x^{\cdot T}Mx^{\cdot}+\sum\int\limits_{m_j} u^{\cdot T}u^{\cdot}\,dm+2x^{\cdot T}\sum\int\limits_{m_j} A_j^T u^{\cdot}\,dm \tag{1.7}$$

$$A_j=A_{1j}-l_j^*A_{2j},\qquad A_j^T=A_{1j}^T+A_{2j}^T l_{2j}^*$$

В потенциальной энергии системы будет учитываться только энергия упругих деформаций, которая имеет вид [1—3]:

$$2\Pi=\sum\int\limits_{e_j} u^T L_j(u)\,dl_j \tag{1.8}$$

где $L_j(u)$ — дифференциальный определенно положительный векторный оператор, определяющий упругую силу, вид которого зависит от вида упругих элементов.

Диссипативную функцию, учитывающую потери энергии при упругих деформациях, можно представить в виде

$$U=\sum\int\limits_{e_j} u^{\cdot T}Q_j(l_j)u^{\cdot}\,dl_j,\qquad Q_j(l_j)>0 \tag{1.9}$$

Соотношения (1.7)—(1.9) позволяют записать уравнения движения рассматриваемой системы в форме

$$Mx^{\cdot\cdot}+\sum A_{1j}^T\int\limits_{m_j} u^{\cdot\cdot}\,dm+\sum A_{2j}^T\int\limits_{m_j} l_j^* u^{\cdot\cdot}\,dm=F \tag{1.10}$$

$$\rho_j(l_j)[(A_{1j}-l_j^*A_{2j})x^{\cdot\cdot}+u^{\cdot\cdot}(l_j)]+Q_j(l_j)u^{\cdot}(l_j)+L_j(u)=0 \qquad (1.11)$$

где F — вектор обобщенных сил, соответствующий вектору координат x, $\rho_j(l_j)$ — плотность соответствующей упругой части системы.

Для приведения системы (1.10), (1.11) к виду обыкновенных дифференциальных уравнений вводится преобразование

$$u(l_j, t)=\Phi_j(l_j)q_j(t) \qquad (1.12)$$

где $\Phi_j(l_j)$ есть $3\times\infty$ матрица ортонормированных допустимых функций, а $q_j(t)$ — бесконечный вектор обобщенных «упругих» координат. Подстановка (1.12) в (1.7) с учетом соотношения

$$\int_{m_j}\Phi_j^T(l_j)\Phi_j(l_j)dm=E=\mathrm{diag}[1,1,\ldots]$$

следующего из условия ортонормированности, дает выражение

$$2T=x^{\cdot T}Mx^{\cdot}+\sum q_j^{\cdot T}q_j^{\cdot}+2x^{\cdot T}\sum(A_{1j}^TP_j^T+A_{2j}^TH_j^T)q_j^{\cdot} \qquad (1.13)$$

$$P_j^T=\int_{m_j}\Phi_j(l_j)dm, \qquad H_j^T=\int_{m_j}l_j^*\Phi_j(l_j)dm$$

Полученное выражение можно привести к виду

$$2T=x^{\cdot T}\Big(M-\sum N_j^TN_j\Big)x^{\cdot}+\sum(N_jx^{\cdot}+q_j^{\cdot})^T(N_jx^{\cdot}+q_j^{\cdot}) \qquad (1.14)$$

$$N_j=P_jA_{1j}+H_jA_{2j}, \quad N_j^TN_j=A_{1j}^TP_j^TP_jA_{1j}+A_{2j}^TH_j^TH_jA_{2j}+2A_{2j}^TH_j^TP_jA_{1j} \qquad (1.15)$$

Для случая, когда $\Phi_j(l_j)$ удовлетворяет условиям полноты, имеют место соотношения [3]:

$$P_j^TP_j=m_jE_3, \; H_j^TH_j=J_j, \; H_j^TP_j=m_jl_{cj}^*, \; E_3=\mathrm{diag}[1, 1, 1] \qquad (1.16)$$

С учетом (1.15), (1.16):

$$M-\sum N_j^TN_j=M_r \qquad (1.17)$$

где M_r — инерционная матрица твердой части системы. Поскольку

$$x^{\cdot T}M_rx^{\cdot}=x_1^{\cdot T}M_1x_1^{\cdot}+x^{\cdot T}\Big(\sum M_{rj}\Big)x^{\cdot} \qquad (1.18)$$

то выражение (1.14) преобразуется к виду

$$2T=x_1^{\cdot T}M_1x_1^{\cdot}+x^{\cdot T}\Big(\sum M_{rj}\Big)x^{\cdot}+\sum(N_jx^{\cdot}+q_j^{\cdot})^T(N_jx^{\cdot}+q_j^{\cdot}) \qquad (1.19)$$

Подстановка (1.12) в (1.8) дает выражение

$$2\Pi=\sum q_j^T\Omega_j^2q_j \qquad (1.20)$$

$$\Omega_j^2=\mathrm{diag}[\Omega_{j1}^2,\Omega_{j2}^2,\ldots]=\int_{e_j}\Phi_j^T(l_j)L_j[\Phi_j(l_j)]dl_j$$

где Ω_{j1}, Ω_{j2}, ... — собственные частоты колебаний упругой части e_j при неподвижной части r_j.

С помощью (1.12) выражение (1.9) преобразуется к виду

$$U=\sum q_j^{\cdot T}R_jq_j^{\cdot}, \qquad R_j=\int_{e_j}\Phi_j^T(l_j)Q_j(l_j)\Phi_j(l_j)dl_j \qquad (1.21)$$

Применение процедуры получения уравнений Лагранжа второго рода к функциям (1.13), (1.20), (1.21) с учетом (1.15) дает систему уравнений

$$Mx^{\cdot\cdot}+\sum N_j^T q_j^{\cdot\cdot}=F \qquad (1.22)$$

$$N_j x^{\cdot\cdot}+q_j^{\cdot\cdot}+R_j q_j^{\cdot}+\Omega_j^2 q_j=0 \quad (j=1,\ldots,k) \qquad (1.23)$$

С помощью обозначений

$$\begin{gathered} N^T=[N_1^T, N_2^T, \ldots, N_k^T], \quad q=[q_1^T, q_2^T, \ldots, q_k^T]^T \\ R=\operatorname{diag}[R_1, R_2, \ldots], \quad \Omega^2=\operatorname{diag}[\Omega_1^2, \Omega_2^2, \ldots] \end{gathered} \qquad (1.24)$$

Уравнения (1.22), (1.23) переписываются в виде

$$Mx^{\cdot\cdot}+N^T q^{\cdot\cdot}=F, \quad Nx^{\cdot\cdot}+q^{\cdot\cdot}+Rq^{\cdot}+\Omega^2 q=0 \qquad (1.25)$$

С упругой системой будет сопоставляться система без учета упругости, описываемая уравнением

$$Mx^{\cdot\cdot}=F \qquad (1.26)$$

Пусть работа исполнительных органов, формирующих управляющие воздействия, описывается уравнением

$$F^{\cdot}+\alpha F=f(g, p, w) \qquad (1.27)$$

а выходные сигналы датчиков имеют вид

$$g^{\cdot}+\beta g=\varphi(x), \quad p^{\cdot}+\gamma p=\psi(x^{\cdot}) \qquad (1.28)$$

где $f(g, p, w)$, $\varphi(x)$, $\psi(x^{\cdot})$ — непрерывные, удовлетворяющие условиям единственности решения функции, характеризующие нелинейности приборов, являющиеся нечетными функциями каждого аргумента при равенстве нулю остальных аргументов и обращающиеся в ноль только при равенстве нулю всех своих аргументов, α, β, γ — положительно определенные матрицы, связанные с постоянными времени приборов, w — вектор состояния компенсатора или динамического наблюдателя, в уравнение которого подставлено выражение входного воздействия

$$w^{\cdot}=K_0 w+K_1 g+K_2 p \qquad (1.29)$$

Здесь K_0, K_1, K_2 — постоянные матрицы.

2. Наблюдаемость и управляемость. Систему уравнений (1.25) с помощью обозначений

$$\begin{gathered} Mx+N^T q=r, \quad \omega^2=[E+N(M-N^T N)^{-1} N^T]\Omega^2 \\ S=-N(M-N^T N)^{-1}, \quad D=[E+N(M-N^T N)^{-1} N^T] \end{gathered} \qquad (2.1)$$

можно привести к виду

$$r^{\cdot\cdot}=F, \quad q^{\cdot\cdot}=-Dq^{\cdot}-\omega^2 q+SF \qquad (2.2)$$

или при $R=0$, $z=[r^T, q^T]^T$ к виду

$$z^{\cdot\cdot}=Az+BF, \quad A=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\omega^2 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} E_x \\ S \end{bmatrix} \qquad (2.3)$$

В (2.1) и (2.3) E, E_x — единичные матрицы ($\dim E_x=\dim x$). В силу своей структуры матрицы D и ω^2 — диагональные.

На основании (1.17), (1.24) можно записать $M-N^T N=M_r$. Каждое конечное звено лежит в конце своей кинематической ветви. С учетом этого из (1.18) видно, что для существования M_r^{-1} необходимо, чтобы все $M_{rj}>0$, то есть в конечных звеньях должны присутствовать жесткие основания r_j (см. фигуру).

В соответствии с [4] необходимым и достаточным условием полной управляемости системы (2.3) является равенство $\operatorname{rank} Q_c=\dim x+\dim q$, где $Q_c=(B, AB, A^2B\ldots)$. С учетом (2.3):

$$Q_c=\begin{bmatrix} E_x & 0 & 0\ldots \\ S & -\omega^2 S & \omega^4 S\ldots \end{bmatrix}$$

Очевидно, что $\operatorname{rank} Q_c=\dim x+\operatorname{rank} Q_c'$, где с учетом (2.1):

$$Q_c'=[\omega^2 NM_r^{-1}, -\omega^4 NM_r^{-1},\ldots]=[\omega^2 N, -\omega^4 N,\ldots]\operatorname{diag}[M_r^{-1}, M_r^{-1},\ldots]$$

Благодаря обратимости второй матрицы, $\operatorname{rank} Q_c'=\operatorname{rank} Q_c''$, где

$$Q_c''=[\omega^2 N, -\omega^4 N, \omega^6 N,\ldots] \tag{2.4}$$

Пусть измеряются перемещения по всем степеням свободы твердой части системы с выходным вектором (см. (2.1)):

$$y=Cx=CM^{-1}(r-N^Tq)=C_1z \tag{2.5}$$

$$C_1=[CM^{-1}, -CM^{-1}N^T] \tag{2.6}$$

причем существует C^{-1}. Система, дуальная системе (2.3), (2.5), имеет вид $s^{\cdot\cdot}=A^Ts+C_1^Tv$, $r=B^Ts$ с матрицей управляемости (наблюдаемости для системы (2.3), (2.5)) $Q_0=[C_1^T, A^TC_1^T, (A^T)^2C_1^T,\ldots]$. Так как $A^T=A$, $M=M^T$ и существуют матрицы C^{-1}, M^{-1}, то условие полной наблюдаемости системы (2.3), (2.5) сводится к равенству $\operatorname{rank} Q_0=\dim x+\operatorname{rank} Q_0''$, где $Q_0''=Q_c''$ из (2.4). (Этот результат получается с помощью преобразований матрицы Q_0, аналогичных преобразованиям матрицы Q_c). Таким образом, с оговоренными в системе измерениями и управлениями при $R=0$ условия полной управляемости и полной наблюдаемости совпадают. Можно показать, но с более громоздкими выкладками, что это совпадение будет и при $R>0$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.1. Пусть в системе (1.25) при $x\equiv0$ колебания являются недемпфированными или слабодемпфированными и в матрице Ω отсутствуют равные элементы. Тогда в системе (1.25), (2.5) полностью наблюдаемыми и полностью управляемыми будут те и только те координаты вектора q, для которых соответствующие строки матрицы N не являются нуль-строками.

Доказательство. Под слабодемпфированными колебаниями понимаются колебания при $\pi R_{nn}\leqslant 0{,}05\Omega_n$, $\pi=3{,}14\ldots$, где R_{nn} и Ω_n – диагональные элементы соответственно матриц R и Ω, соответствующие номеру n. Воспользуемся критерием [5], согласно которому система полностью наблюдаема тогда и только тогда, когда она при $F\equiv0$ и при нулевых выходных сигналах имеет только нулевое решение. Из равенства $x\equiv C^{-1}0$ следует $x\equiv x^{\cdot}\equiv x^{\cdot\cdot}\equiv0$. С учетом этих тождеств при $F\equiv0$ система (1.25) принимает вид

$$N^Tq^{\cdot\cdot}=0,\qquad q^{\cdot\cdot}+Rq^{\cdot}+\Omega^2q=0 \tag{2.7}$$

Последнее уравнение при оговоренных выше соотношениях между элементами матриц R и Ω эквивалентно системе уравнений независимых осцилляторов, имеющих комплексные корни [7]. Пусть среди этих корней отсутствуют кратные корни. Это возможно только при отсутствии в матрице Ω равных элементов. Тогда решение последнего уравнения представляет собой ряд линейно независимых функций, образующих вектор q. Линейно независимыми будут и координаты вектора $q^{\cdot\cdot}$. Первое уравнение системы (2.7) эквивалентно системе уравнений. Уравнению с номером ν соответствует строка матрицы N^T с номером ν. Пусть в этой строке некоторые элементы не равны нулю. Тогда вследствие линейной независимости координат вектора $q^{\cdot\cdot}$ уравнение ν будет удовлетворено только при равенстве нулю координат вектора $q^{\cdot\cdot}$, соответствующих ненулевым элементам строки матрицы N^T. Поэтому, если столбец матрицы N^T (строка матрицы N) не есть нуль-столбец (нуль-строка), то соответствующая координата вектора $q^{\cdot\cdot}$ должна равняться нулю. Таким образом, координаты вектора $q^{\cdot\cdot}$ (вектора q), соответствующие ненулевым строкам матрицы N, должны обратиться в нуль. Эти координаты образуют пространство наблюдаемых координат. Как было показано выше, условия полной наблюдаемости и полной управляемости совпадают. Таким образом, теорема доказана.

Теорема 2.2. Пусть в системе (1.25) при $x\equiv0$ колебания являются недемпфированными или слабодемпфированными и в матрице Ω имеются s равных элементов. Тогда в системе (1.25), (2.5) количество полностью наблюдаемых и полностью управляемых координат вектора q с равными собственными частотами равно рангу матрицы N_s, составленной из строк матрицы N, соответствующих координатам с равными частотами.

Доказательство проводится аналогично доказательству предыдущей теоремы. При наличии равных частот выполнение первого равенства в (2.7) возможно только при выполнении условий теоремы 2.2. Количество полностью наблюдаемых и полностью управляемых координат вектора q с равными частотами не превышает $\dim x$. Если имеется несколько множеств координат с равными частотами, то проверка проводится для каждого множества отдельно.

3. Устойчивость. Для системы (1.10), (1.11) в соответствии с (1.6), (1.8), (1.9) полная энергия системы определяется выражением

$$V' = T + \Pi \tag{3.1}$$

и удовлетворяет уравнению

$$V^{\cdot\prime} = x^{\cdot T} F - \sum \int_{e_j} u^{\cdot T} Q_j(l_j) u^{\cdot}\, dl_j \tag{3.2}$$

Для системы (1.25) в соответствии с (1.19)—(1.21), (1.24) полная энергия определяется также уравнением (3.1) и удовлетворяет равенству

$$V^{\cdot\prime} = x^{\cdot T} F - q^{\cdot T} R q^{\cdot} \tag{3.3}$$

Выражения (3.2), (3.3) составлены в соответствии с законом изменения полной энергии и могут быть получены непосредственно из уравнений движения.

Выражение (1.19) с учетом (1.18) при $M_{rj} > 0$ является определенно положительной функцией. Легко убедиться в том, что при $M_{rj} > 0$ функция V', составленная из (1.19), (1.20), является определенно положительной функцией по отношению к координатам векторов $x^{\cdot}$, $q^{\cdot}$, q. Если хотя бы при одном значении j $M_{rj} = 0$ (отсутствует твердая часть конечного звена), функция V' будет лишь знакоположительной.

Соотношения (1.16) справедливы при учете всех членов ряда (1.12), количество которых равно ∞. Пусть в ряде (1.12) учтено конечное количество членов. В этом случае система моделируется конечномерной системой дифференциальных уравнений, описывающей движение конечномерной механической системы. Полная энергия такой системы будет определенно положительной функцией и при $M_{rj} = 0$. (С помощью работы [6] это утверждение можно доказать формальным образом).

Выражение (3.1) при (1.6), (1.8) является функционалом. Поэтому для того, чтобы получить суждение об определенной положительности этого функционала, необходимо показать определенную положительность его плотности [1, 2]. Для этого с основаниями упругих элементов связываются правые ортогональные базисы $O_j' x_j' y_j' z_j'$, которые выбраны так, что упругие перемещения вдоль осей этого базиса независимы друг от друга. На основании отношения Релея для потенциальной энергии упругих сил можно записать [1, 2]:

$$\int_{e_j} u^T L_j(u)\, dl_j = \int_{e_j} u'^T L_j(u')\, dl_j' \geqslant \int_{e_j} \rho_j(l_j') u'^T \Omega_{ji}^2 u'\, dl_j' \tag{3.4}$$

где $\Omega_{ji} = \operatorname{diag}[\Omega_{jx} \Omega_{jy} \Omega_{jz}]$, Ω_{jx}, Ω_{jy}, Ω_{jz} — наименьшие собственные значения, соответствующие упругим колебаниям вдоль осей $O_j' x_j'$, $O_j' y_j'$, $O_j' z_j'$ при неподвижной твердой части r_j, а матрица — столбец u' записана через проекции на указанные оси. Векторы u и u' связаны матрицей направляющих косинусов между базисами O_j и O_j'.

Таким образом, подынтегральная функция исходного выражения в (3.4) является определенно положительной.

Плотность v функционала V' на основании (3.1), (1.6), (1.8) определится выражением

$$v = \sum \left\{ \left(\sum m_i \right)^{-1} \left[x_1^{\cdot T} M_1 x_1^{\cdot} + x^{\cdot T} \left(\sum M_{ri} \right) x^{\cdot} \right] + \right.$$
$$\left. + [A_j(l_j) x^{\cdot} + u^{\cdot}(l_j)]^T [A_j(l_j) x^{\cdot} + u^{\cdot}(l_j)] + \rho_j^{-1}(l_j) u(l_j) L_j[u(l_j)] \right\} \tag{3.5}$$

На основании (3.4) и определенной положительности функции (1.18) можно заключить, что плотность (3.5) будет определенно положительной в каждой точке пространства $\sum e_j$ при $M_{rj}>0$. Следовательно, при $M_{rj}>0$ определенно положительным будет и функционал (3.1), (1.6), (1.8).

Для системы без учета упругости (1.26)

$$2V_0'=x^{\cdot T}Mx^{\cdot},\quad V_0''=x^{\cdot T}F \tag{3.6}$$

Теорема 3.1. Пусть $M_{rj}>0$ $(j=1,\ldots,k)$, в упругих элементах существует демпфирование или система (1.25) является полностью управляемой. Тогда, если система (1.26)–(1.29) (без учета упругости) удовлетворяет теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости, причем вектор $x^{\cdot}$ входит в функцию Ляпунова V_0 только через слагаемое V_0' из (3.6), то положение равновесия системы (1.10), (1.11), (1.27)–(1.29) или системы (1.25), (1.27)–(1.29) будет асимптотически устойчивым.

Доказательство для системы (1.10), (1.11), (1.27)–(1.29). Замена в V_0 слагаемого V_0' из (3.6) на V' из (3.1), (1.7), (1.8) при $M_{rj}>0$ дает определенно положительный для рассматриваемой системы функционал V. Функционал $V^{\cdot}$ для рассматриваемой системы будет знакоотрицательным (следует из определенной отрицательности $V_0^{\cdot}$ по отношению к координатам системы (1.26)–(1.29) и из (3.2)), обращающимся в ноль при $x=x^{\cdot}=0$, $u^{\cdot}=0$. Следовательно, если $V^{\cdot}\equiv0$, то $x^{\cdot\cdot}\equiv0$ и $u^{\cdot}=u^{\cdot\cdot}\equiv0$, а это, как следует из уравнения (1.11), соответствует неподвижному положению оснований упругих элементов и самих упругих элементов, которое возможно только при $u\equiv0$. Тогда из теоремы работы [2] следует асимптотическая устойчивость положения равновесия рассматриваемой системы.

Доказательство для системы (1.25), (1.27)–(1.29). Замена в V_0 слагаемого V_0' из (3.6) на V' из (3.1), (1.13), (1.20) дает определенно положительную для рассматриваемой системы функцию V. Функция $V^{\cdot}$ для рассматриваемой системы будет знакоотрицательной. При $R>0$ доказательство проводится аналогично предыдущему.

В случае пренебрежимо малого естественного демпфирования в уравнениях (1.25), (3.3) надо положить $R=0$. Покажем при каких условиях система будет асимптотически устойчивой. При $R=0$ из равенства $V^{\cdot\prime}=V_0^{\cdot\prime}$ следует равенство $V^{\cdot}=V_0^{\cdot}$, следовательно, $V^{\cdot}\equiv0$ при $x\equiv x^{\cdot}\equiv0$, откуда следует $x^{\cdot\cdot}\equiv0$. Подстановка последнего тождества в (1.25) дает систему (2.7) при $R=0$. Отсюда следует, что условия отсутствия целых траекторий, отличных от $x\equiv0$, $q\equiv0$, где $V^{\cdot}\equiv0$, совпадает с условиями полной управляемости рассматриваемой системы. Тогда на основании теоремы Барбашина – Красовского можно сделать заключение, что при выполнении условий полной управляемости тривиальное решение системы (1.25), (1.27)–(1.29) будет асимптотически устойчивым.

Теорема 3.2. Пусть $M_{rj}>0$ при $j=1,\ldots,k$, в упругих элементах присутствует демпфирование с полной диссипацией или система (1.25) является полностью управляемой. Тогда, если система (1.26)–(1.29) (без учета упругости) удовлетворяет теореме Барбашина – Красовского, причем вектор $x^{\cdot}$ входит в функцию Ляпунова V_0 только через слагаемое, пропорциональное V_0' из (3.6), а совокупность точек, где $V_0^{\cdot}=0$, не составляет целых траекторий для системы уравнений (1.25), (1.27)–(1.29) или (1.10), (1.11), (1.27)–(1.29) кроме точки 0, то положение равновесия указанных систем будет асимптотически устойчивым.

Доказательство теоремы 3.2 проводится аналогично доказательству теоремы 3.1. Формулировка теорем устойчивости не изменится, если работа датчиков и исполнительных органов будет описываться другими по сравнению с (1.27)–(1.29) уравнениями. Теоремы 3.1, 3.2 сводят задачу исследования устойчивости упругих систем к задаче исследования устойчивости систем без учета упругости. Выбор регулятора, удовлетворяющего этим теоремам, делает систему робастной к изменению характеристик упругих элементов. Это особенно важно для роботов, так как устойчивость не будет теряться при любых перемещаемых грузах. Обычно синтез системы управления осуществляется по усеченной системе. Если при синтезе наряду с удовлетворением выбранных критериев выполнить также условия одной из доказанных теорем устойчивости, то синтезированная система будет асимптотически устойчивой при полном учете упругости. Теоремы позволяют исследовать устойчивость не только распределенных систем, но также систем твердых тел с упругими связями, например железнодорожных составов. Для линейных систем поиск функции Ляпунова V_0 можно формализовать с помощью матричного уравнения Ляпунова. При этом матрица квадратичной функции Ляпунова должна иметь блочно-диагональную структуру.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мирович Л.* Исследование устойчивости вращающегося тела, содержащего упругие части, прямым методом Ляпунова // Ракетн. техника. 1970. Т. 8. № 7. С. 11–20.
2. *Мирович Л., Калико Р. А.* Сравнение методов исследования устойчивости для нежестких спутников // Ракетн. техника и космонавтика. 1973. Т. 11. № 1. С. 108–117.
3. *Hughes P. C.* Modal identitis for elastic bodies, with application to vehicle dynamics and control // Trans. of the ASME. J. Appl. Mech. 1980. V. 47. № 1. P. 177–184.
4. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
5. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977. 650 с.
6. *Hughes P. C., Skelton R. E.* Modal truncation for flaxible spacecraft // J. Guidance and Control. 1981. V. 4. № 3. P. 291–297.
7. *Болотин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гос. изд-во техн.-теор. литерат., 1956. 600 с.

Запорожье

Поступила в редакцию
15.III.1988