

УДК 539.3

В. А. МИСЮРА, В. В. РАКОМСА

**ВАРИАЦИОННО-АСИМПТОТИЧЕСКИЙ ПОДХОД  
К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ УПРУГИХ ТЕЛ С ПОЛОСТЯМИ,  
ПОДКРЕПЛЕННЫМИ УПРУГИМИ ОБОЛОЧКАМИ**

Обсуждается динамическая контактная задача взаимодействия массивного тела, содержащего полости с упругими оболочечными подкреплениями этих полостей. В предположении малости толщины подкреплений, эта задача сводится к некоторой задаче только для массивного тела с неклассическими краевыми условиями, которые асимптотически точно описывают взаимодействие в исходной контактной задаче. Построено аналитическое решение задачи дифракции плоской волны на подкрепленном цилиндрическом отверстии.

**1. Постановка задачи.** Пусть линейно упругое тело, занимающее в недеформируемом состоянии область  $V_0 \subset R^3$ , содержит внутри себя полость с границей  $\Omega$ . Примем, что подкрепление полости представляет собой оболочку  $V_1$  постоянной толщины  $h$ , внешняя лицевая поверхность которой совпадает с  $\Omega$ . Полагаем далее, что массивное тело и подкрепление изотропны, имеют разные модули упругости и жестко склеены между собой на поверхности контакта  $\Omega$ .

Решение динамических задач теории упругости для неоднородного тела  $V_0 \cup V_1$  эквивалентно нахождению стационарных точек функционала Гамильтона — Остроградского [1]:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \int_{V_0} \left( \rho_0 \frac{1}{2} v_i v^i - U_0(\varepsilon_{ij}) \right) d\tau_0 + \int_{V_1} \left( \rho_1 \frac{1}{2} v_i v^i - U_1(\varepsilon_{ij}) \right) d\tau_1 + \int_{S_\sigma} P_i u^i d\sigma \right] d\tau \quad (1.1)$$

на множестве полей перемещений, удовлетворяющих ограничениям

$$u^i(t_0, x^j) = u_0^i(x^j), \quad u^i(t_1, x^j) = u_1^i(x^j) \quad (1.2)$$

$$u^i(t, x^j)|_{S_u} = u^{*i}(t, x^j) \quad (1.3)$$

Здесь индексы  $i, j, k$  принимают значения 1, 2, 3 и соответствуют проекциям на оси декартовой системы координат  $x^j$ ,  $v^i = \partial u^i / \partial t$ ,  $\rho_0, \rho_1$  — плотности соответственно массива и подкрепления,  $d\tau_0, d\tau_1$  — элементы объема в областях  $V_0, V_1$ ;  $u_0^i, u_1^i, u^{*i}$  — заданные функции. Предполагается, что внешние массовые силы отсутствуют, а поверхностные  $P_i$  заданы на части  $S_\sigma$  внешней границы массива  $V_0$ :  $\partial V_0 = S_\sigma \cup S_u$ . Плотности упругой энергии массивного тела  $U_0$  и подкрепления  $U_1$  даются соотношениями  $U_0 = \frac{1}{2} \lambda_0 (\delta^{ij} \varepsilon_{ij})^2 + \mu_0 \varepsilon^{ij} \varepsilon_{ij}$ ,  $U_1 = \frac{1}{2} \lambda_1 (g^{ij} \varepsilon_{ij})^2 + \mu_1 \varepsilon^{ij} \varepsilon_{ij}$ , где  $\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$  — ковариантные компоненты тензора деформаций,  $\lambda_0, \mu_0, \lambda_1, \mu_1$  — модули Ламе соответственно массива и подкрепления,  $\delta_{ij}$  — символы Кронекера. Индекс после запятой означает операцию частного дифференцирования.

Как и в [1] введем характерный радиус кривизны  $R$  поверхности  $\Omega$  и характерный масштаб изменения напряженного состояния  $l$ . Будем рассматривать такие процессы в подкреплении, для которых  $h/R \ll 1$ ,  $h/l \ll 1$ , а характерное время их изменения  $\tau \sim l/c$ ,  $c$  — скорость волн сдви-

га в подкреплении. Значения  $R$ ,  $l$ ,  $\tau$  определяются внешней нагрузкой  $P_i(x^i, t)$ , краевыми и начальными условиями (1.2), (1.3) и геометрией поверхности  $\Omega$ . Сделанные предположения неявно накладывают на них ряд ограничений. Описание этих ограничений представляет собой отдельную задачу и тесно связано с проблемой построения погрешности решений двумерных теорий оболочек.

**2. Асимптотический анализ упругой энергии подкрепления.** Зададим на  $\Omega$  каким-либо образом перемещения

$$w^i|_{\Omega} = w^{*i}(x^j, t) \quad (2.1)$$

Задачу о стационарных точках функционала (1.1)–(1.3) разобьем на две. На первом этапе будем искать решение этой задачи, когда перемещения дополнительно удовлетворяют ограничению (2.1). На втором — будем варьировать функции  $w^{*i}$ . Первая задача в свою очередь распадается на две: задачу о стационарных точках функционала Гамильтона — Остроградского для массива и аналогичную задачу для подкрепления. Последнюю рассмотрим отдельно. Функционал Гамильтона — Остроградского для нее, в силу сделанных предположений относительно внешних сил, имеет вид

$$I_1 = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} \rho_i (1/2 v_i v^i - U_1(\varepsilon_{ij})) d\tau dt \quad (2.2)$$

Стационарные точки его ищутся при ограничениях (1.2), (2.1). Так как  $h/l \ll 1$  и  $h/R \ll 1$ , то вариационную задачу (1.2), (2.1), (2.2) можно рассматривать как задачу с малыми параметрами. Асимптотический анализ ее аналогичен вариационно-асимптотическому анализу функционала Гамильтона — Остроградского для оболочки как трехмерного тела в [1]. Проведя его, получим, что в первом приближении поле перемещений подкрепления дается соотношениями

$$w_{;r^{\alpha}i} = w_{\alpha} = w_{\alpha}^{*}(\xi^{\alpha}) - \xi(w_{,\alpha}^{*} + b_{\alpha}^{\lambda} w_{\lambda}^{*}) \quad (2.3)$$

$$w_{;n^i} = w = w^{*}(\xi^{\alpha}) - \sigma' \xi \gamma_{\nu}^{\nu} + 1/2 \sigma' \rho_{\lambda}^{\lambda} (\xi^2 - h^2/3)$$

где  $r_{\alpha}^i = \partial r^i / \partial \xi^{\alpha}$ ,  $x^i = r^i(\xi^{\alpha})$  — уравнения поверхности  $\Omega$ ,  $\xi^{\alpha}$  — поверхностные координаты на  $\Omega$ , греческие индексы  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  принимают значения 1, 2 и соответствуют проекциям на оси  $\xi^{\alpha}$ . Через  $\xi$  обозначено расстояние с отрицательным знаком до поверхности  $\Omega$  по нормали  $n^i$  к ней. Тензор второй квадратичной формы поверхности  $\Omega$  обозначен через  $b_{\alpha\beta}$ , поднятие и опускание греческих индексов производится с помощью первой квадратичной формы  $a_{\alpha\beta}$ ,  $w_{\alpha}^{*} = w_{i}^{*} u^i$ ,  $\sigma' = \nu_1 / (1 - \nu_1)$ ,  $\nu_1$  — коэффициент Пуассона подкрепления. Поверхностные тензоры  $\gamma_{\alpha\beta}$  и  $\rho_{\alpha\beta}$  характеризуют растяжение и изгиб поверхности контакта и выражаются через перемещения последней по формулам

$$\gamma_{\alpha\beta} = w_{(\alpha,\beta)}^{*} - b_{\alpha\beta} w^{*}, \quad \rho_{\alpha\beta} = n_i w_{;\alpha\beta}^{*i} - b_{(\alpha\gamma\lambda\beta)}^{\lambda} \quad (2.4)$$

где точка с запятой означает ковариантное дифференцирование относительно связности на  $\Omega$  [1], круглые скобки в индексах — операцию симметризации.

Соотношения (2.3), (2.4) позволяют вычислить главный член функционала (2.2), который будет зависеть от функции  $w^{*i}$  — перемещений точек контактной поверхности. Несложные алгебраические операции с последующим интегрированием по  $\xi$  от  $-h$  до 0 дают

$$I' = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} [\rho_i h w_{i,t}^{*} w_{,t}^{*i} - \Phi(w^{*i})] d\omega dt$$

Здесь  $d\omega$  — элемент площади поверхности  $\Omega$ . Функция  $\Phi$  представляет собой главный член упругой энергии подкрепления, отнесенный

к единице площади контактной поверхности:

$$\Phi = \mu_1 h [\gamma^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta} + \sigma_1 (\gamma_{\lambda}^{\lambda})^2 - h \{ \gamma^{\alpha\beta} \rho_{\alpha\beta} + \sigma_1 \gamma_{\lambda}^{\lambda} \rho_{\nu}^{\nu} \} + h^2 / 3 \{ \rho^{\alpha\beta} \rho_{\alpha\beta} + \sigma_1 (\rho_{\lambda}^{\lambda})^2 \}]$$

Подставляя главное значение  $I_1'$  функционала  $I_1$  в исходный функционал  $I$  (1.1), и варьируя последний на множестве полей перемещений, удовлетворяющих ограничениям (1.2), (1.3), приходим к некоторой преобразованной задаче теории упругости только для массива с неклассическими краевыми условиями на поверхности контакта. Выпишем полную систему уравнений и краевых условий этой задачи

$$\rho_0 u_{,t} = \sigma_{,j}^{ij} \quad (bV_0), \quad (2.5)$$

$$\sigma^{ij} = \lambda_0 \delta^{ij} (\varepsilon_K^K) + 2\mu \varepsilon^{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = u_{(i,j)}$$

$$u^i(t_0, x^j) = u_0^i(x^j), \quad u^i(t_1, x^j) = u_1^i(x^j) \quad (2.6)$$

$$u^i(t, x^j) |_{s_u} = u^{*i}(t, x^j), \quad \sigma^{ij} n_j |_{s_\sigma} = P^i \quad (2.7)$$

$$\sigma^{ij} n_i n_j |_{\Omega} = M_{;\alpha\beta}^{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} - \rho_1 h u_{,t} \quad (2.8)$$

$$\sigma^{ij} n_i r_j^\alpha |_{\Omega} = -T_{;\beta}^{\alpha\beta} - b_{\lambda}^{\alpha} M_{;\sigma}^{\lambda\sigma} - \rho_1 h u_{,t}^\alpha$$

$$M^{\alpha\beta} = \partial\Phi / \partial\rho^{\alpha\beta}, \quad T^{\alpha\beta} = \partial\Phi / \partial\gamma^{\alpha\beta}$$

$$\gamma^{\alpha\beta} = u_{(\alpha;\beta)} - b_{\alpha\beta} u, \quad \rho_{\alpha\beta} = u_i u_{,\alpha\beta}^i - b_{(\alpha}^{\lambda} \gamma_{\lambda\beta)}$$

Видим, что в области  $V_0$  уравнения движения (2.5), начальные и конечные значения перемещений (2.6) и краевые условия на внешней границе  $V_0$  (2.7) имеют классический вид. Отличие от классической задачи состоит в краевых условиях (2.8). Они представляют собой дифференциальные соотношения для функций перемещений точек поверхности  $\Omega$  и напоминают уравнения теории оболочек.

Таким образом, исходная динамическая контактная задача для неоднородного тела  $V_0 \cup V_1$  заменена другой только для массивного тела  $V_0$  с неклассическими краевыми условиями, которые асимптотически точно описывают взаимодействие массива  $V_0$  с подкреплением  $V_1$ . Идея такой замены связана с тем что подкрепление тонкое. Для класса задач, в которых  $h/R \ll 1$ ,  $h/l \ll 1$  и  $\tau \sim l/c$  функционал энергии системы заменен другим, который отличается от исходного на малые величины порядка  $(h/R + h/l)$ . В такой ситуации естественно ожидать, что и решения соответствующих задач о стационарных точках этих функционалов будут отличаться на малые величины. В частности, для задач статики это утверждение нетрудно обосновать. Применяя технику двусторонних оценок в теории упругости, можно показать, что решения исходной и задачи с неклассическими краевыми условиями отличаются в среднеквадратичной норме членами порядка  $(h/R + h/l)$  по сравнению с главными. При этом никаких других ограничений, кроме условий  $h/R \ll 1$ ,  $h/l \ll 1$ ,  $\tau \sim l/c$  на параметры задачи не накладываются.

**3. Волны Лява.** Рассмотрим классическую задачу о волнах Лява [2]. Если рассматривать длинные волны ( $h/l \ll 1$ ,  $l$  — длина волны,  $h$  — толщина слоя, которым подкреплено упругое полупространство ( $x^3 \leq 0$ ) на границе  $x^3 = 0$ ), то, согласно изложенному выше, задачу для полупространства со слоем можно заменить другой задачей только для полупространства с неклассическими краевыми условиями. Последнее превращается в одно соотношение

$$\mu_0 u_{,3} |_{x^3=0} = \mu_1 h u_{,11} - \rho_1 h u_{,tt} |_{x^3=0} \quad (3.1)$$

где через  $u$  обозначено смещение в волне Лява в направлении оси  $x^2$  которая лежит в плоскости склейки ( $x^1$  — ось, вдоль которой распространяется волна). Для того, чтобы функция (волна Лява):  $u = B \exp(-\beta x^3) \cdot \exp[i(\xi x^1 - \omega t)]$  удовлетворяла волновому уравнению в полупространстве и граничному условию (3.1) необходимо, чтобы

$$\beta^2 = \xi^2 - \kappa_0^2 \quad (3.2)$$

$$\xi = \xi^2 - \omega^2 \rho_1 / \mu_1 = \mu_0 \beta / (h \mu_1) \quad (3.3)$$

В области длинных волн  $\xi h \ll 1$ . Тогда (3.2), (3.3) переходят в определяющее уравнение Лява [2]:

$$\operatorname{tg} \xi h = \mu_0 \beta / (\mu_1 \xi)$$

Таким образом, в области длинных волн преобразованная задача асимптотически точно описывает волны Лява в полупространстве. В приведенных рассуждениях предполагалось, что  $\lambda_1 = \lambda_0 = 0$ .

**4. Дифракция волны расширения на подкрепленном цилиндрическом отверстии.** Рассмотрим упругое пространство с неограниченным цилиндрическим отверстием, подкрепленным цилиндрической оболочкой. Положим, что в плоскости, перпендикулярной оси отверстия, распространяется плоская гармоническая волна расширения с круговой частотой  $\omega$ . Будем считать, что возникающее деформируемое состояние является плоским. Это будет, к примеру, в случае  $\lambda_1 = \lambda_0 = 0$ . Для определения напряженно-деформируемого состояния массива в стационарном случае при взаимодействии волны расширения с отверстием необходимо построить решения уравнения Гельмгольца, которые бы удовлетворяли некоторым соотношениям на бесконечности [4] и неклассическим краевым условиям (2.8), которые в данном случае имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} |_{r=R} &= R^{-2} M_{,\varphi\varphi} + R^{-1} N + \rho_1 h u_{r,tt} \\ \sigma_{r\varphi} |_{r=R} &= -R^{-2} M_{,\varphi} - R^{-1} N_{,\varphi} + \rho_1 h u_{\varphi,tt} \end{aligned}$$

Опуская промежуточные выкладки, которые аналогичны изложенным достаточно подробно в [4], выпишем ответ ( $A$  — амплитуда падающей волны, суммирование здесь и далее по  $n$  от 0 до  $\infty$ , штрих означает производную):

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{A}{r} \sum e_n i^n \frac{\Delta_{nr}}{\Delta_n} \cos(n\varphi) \exp(-i\omega t) \\ u_\varphi &= \frac{A}{r} \sum e_n i^n \frac{\Delta_{n\varphi}}{\Delta_n} \sin(n\varphi) \exp(-i\omega t) \\ \sigma_{rr} &= \frac{2\mu_0 A}{r^2} \sum e_n i^n \frac{\Delta_{nrr}}{\Delta_n} \cos(n\varphi) \exp(-i\omega t) \\ \sigma_{r\varphi} &= \frac{2\mu_0 A}{r^2} \sum e_n i^n \frac{\Delta_{nr\varphi}}{\Delta_n} \sin(n\varphi) \exp(-i\omega t) \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{2\mu_0 A}{r^2} \sum e_n i^n \frac{\Delta_{n\varphi\varphi}}{\Delta_n} \cos(n\varphi) \exp(-i\omega t) \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\Delta_{nr} = \alpha r J_n'(\alpha r) \Delta_n - \alpha r H_n'(\alpha r) \Delta_{n1} + n H_n(\beta r) \Delta_{n2}$$

$$\Delta_{n\varphi} = n J_n(\alpha r) \Delta_n - n H_n(\alpha r) \Delta_{n1} - \beta r H_n'(\beta r) \Delta_{n2}$$

$$\Delta_{nrr} = D_{nr} \Delta_n - D_{nr}^* \Delta_{n1} + K_{nr} \Delta_{n2}$$

$$\Delta_{nr\varphi} = E_{nr} \Delta_n - \varepsilon_{nr} \Delta_{n1} + K_{nr}^* \Delta_{n2}$$

$$\Delta_{n\varphi\varphi} = F_{nr} \Delta_n - F_{nr}^* \Delta_{n1} - K_{nr} \Delta_{n2}$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} D_{nR}^* & K_{nR} \\ \varepsilon_{nR} & K_{nR}^* \end{vmatrix}, \quad \Delta_{n1} = \begin{vmatrix} D_{nR} & K_{nR} \\ E_{nR} & K_{nR}^* \end{vmatrix}, \quad \Delta_{n2} = \begin{vmatrix} D_{nR} & D_{nR}^* \\ E_{nR} & \varepsilon_{nR} \end{vmatrix}$$

$$D_{nR} = [(n^2 + n - 1/2 \beta^2 R^2) J_n(\alpha R) - \alpha R J_{n-1}(\alpha R)] (1 + \gamma) + \gamma \alpha^2 R^2 J_n(\alpha R) + \delta [n J_n(\alpha R) - \alpha R J_{n-1}(\alpha R)]$$

$$D_{nR}^* = [(n^2 + n - 1/2 \beta^2 R^2) H_n(\alpha R) - \alpha R H_{n-1}(\alpha R)] (1 + \gamma) + \gamma \alpha^2 R^2 H_n(\alpha R) + \delta [n H_n(\alpha R) - \alpha R H_{n-1}(\alpha R)]$$

$$E_{nR} = [n(n+1) J_n(\alpha R) - n \alpha R J_{n-1}(\alpha R)] (1 + 2\gamma) + 2\gamma \alpha R J_{n-1}(\alpha R) + \delta n J_n(\alpha R) \quad (4.2)$$

$$\varepsilon_{nr} = [n(n+1)H_n(\alpha R) - n\alpha R H_{n-1}(\alpha R)](1+2\gamma) + 2\gamma\alpha R H_{n-1}(\alpha R) + \delta n H_n(\alpha R)$$

$$F_{nr} = -(n^2 + n - \alpha^2 r^2 + 1/2 \beta^2 r^2) J_n(\alpha r) + \alpha r J_{n-1}(\alpha r)$$

$$F_{nr}^* = -(n^2 + n - \alpha^2 r^2 + 1/2 \beta^2 r^2) H_n(\alpha r) + \alpha r H_{n-1}(\alpha r)$$

$$K_{nr} = [-n(n+1)H_n(\beta R) + n\beta R H_{n-1}(\beta R)](\gamma+1) - \delta n H_n(\beta R)$$

$$K_{nr}^* = [-(n^2 + n - 1/2 \beta^2 R^2) H_n(\beta R) + \beta R H_{n-1}(\beta R)](1+2\gamma) - \delta [n H_n(\beta R) - \beta R H_{n-1}(\beta R)]$$

В (4.1) величины с индексами  $nr$  считаются по формулам (4.2) путем замены  $R$  на  $r$  при  $\gamma = \delta = 0$ . Здесь предполагается, что  $M = 0$ . Это соответствует малой изгибной жесткости подкрепления. Величины  $\gamma = \mu_1 h / (\mu_0 R)$ ,  $\delta = \rho_1 h R \omega^2 / (2\mu_1)$  характеризуют влияние прочности и инерционных свойств подкрепления на напряженно-деформируемое состояние массива. Полагая их везде равными нулю, получим формулы расчета напряжений и перемещений в задаче о дифракции плоской волны на неподкрепленном отверстии, которые совпадают с результатами [4].

В случае, если источник возмущения находится не так далеко, чтобы подходящую волну можно было бы заменить плоской, имеет смысл рассматривать дифракцию цилиндрической волны расширения на подкрепленном отверстии, потенциал которой имеет вид

$$\Phi_0 = A i \pi \Sigma (-1)^n e_n J_n(\alpha r) H_n(\alpha r_0) \cos(n\varphi) \exp(-i\omega t)$$

где  $r_0$  расстояние до волнового источника от оси отверстия. Процедура решения такой задачи не отличается от рассмотренной выше. Перемещение точек массива и напряжения даются формулами (4.1), в которых

$$\Delta_{nr} = R_{nr} \Delta_n - \alpha R H_n'(\alpha r) \Delta_{n1} + n H_n(\beta r) \Delta_{n2}$$

$$\Delta_{n\varphi} = S_{nr} \Delta_n + n H_n(\alpha r) \Delta_{n1} - \beta r H_n'(\beta r) \Delta_{n2}$$

$$\Delta_{nr r} = G_{nr} \Delta_n - D_{nr} \Delta_n + K_{nr} \Delta_{n2}$$

$$\Delta_{nr \varphi} = E_{nr}^* \Delta_n - \varepsilon_{nr} \Delta_{n1} + K_{nr}^* \Delta_{n2}$$

$$\Delta_{n\varphi \varphi} = L_{nr} \Delta_n - F_{nr}^* \Delta_{n1} - K_{nr} \Delta_{n2}$$

$$R_{nr} = \pi i^{(n+1)} H_n(\alpha r_0) [n J_n(\alpha r) - \alpha r J_{n-1}(\alpha r)]$$

$$S_{nr} = \pi i^{(n+1)} H_n(\alpha r_0) n J_n(\alpha r), \quad G_{nr} = \pi i^{(n+1)} H_n(\alpha r_0) D_{nr}$$

$$E_{nr}^* = \pi i^{(n+1)} H_n(\alpha r_0) E_{nr}, \quad L_{nr} = \pi i^{(n+1)} H_n(\alpha r_0) F_{nr}$$

а остальные элементы совпадают с (4.2).

Для многих приложений представляет интерес значение  $\sigma_{\varphi\varphi}$  на границе контакта. Его удобно представить в виде

$$\sigma_{\varphi\varphi}|_{r=R} = -2\mu_0 \alpha^2 A \Sigma e_n i^n S_n \cos(n\varphi) \exp(-i\omega t)$$

$$S_n = (2i/\pi) [\alpha R H_{n-1}(\alpha R) - q H_n(\alpha R)]^{-1}$$

$$q = (ax - by) [(1+\gamma)x - (n+2\gamma)y]^{-1}$$

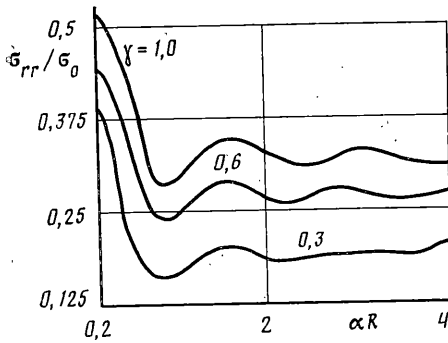
$$a = n^2 + n - 1/2 \beta^2 R^2 + \gamma(n^2 + n - \alpha^2 R^2 + 1/2 \beta^2 R^2)$$

$$b = n^2 + n + 2\gamma(n^2 + n - \alpha^2 R^2 + 1/2 \beta^2 R^2)$$

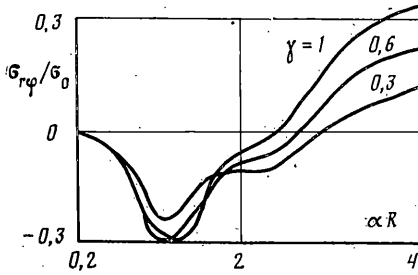
$$x = -[n^2 + n - 1/2 \beta^2 R^2 + 2\gamma(n^2 + n)] H_n(\beta R) + \beta R (1+2\gamma n) H_{n-1}(\beta R)$$

$$y = -(\gamma+1)(n^2 + n) H_n(\beta R) + (\gamma+1) n \beta R H_{n-1}(\beta R)$$

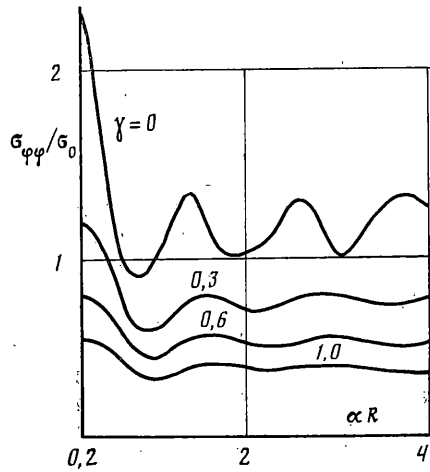
Устремляя  $\alpha R$  к нулю, и, воспользовавшись асимптотикой цилиндрических функций при малых значениях аргумента, получим значение  $\sigma_{\varphi\varphi}|_{r=R}$  в задаче об одноосно растянутом массиве с цилиндрической выработкой:  $\sigma_{\varphi\varphi} = -2\mu_0 \alpha^2 A [(1+\gamma)^{-1} - 2(1+3\gamma)^{-1} \cos 2\varphi]$ . Полагая  $\gamma = 0$  прихо-



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

дим к решению задачи об одноосно растянутой пластинке с круговым отверстием [6]:

$$\sigma_{\phi\phi}|_{r=R} = -2\mu_0\alpha^2 A(1 - 2\cos 2\varphi)$$

Если  $\gamma \rightarrow \infty$ , то получаем решение статической задачи о концентрации напряжений вокруг жесткого включения.

На фиг. 1–3 приведены графики зависимости величин  $\sigma_{rr}/\sigma_0$ ,  $\sigma_{r\phi}/\sigma_0$ ,  $\sigma_{\phi\phi}/\sigma_0$ ,  $\sigma_0 = -\beta^2\mu A$  – амплитуда продольного напряжения в падающей волне в точке  $(R, \pi/2)$  при разных значениях параметра  $\alpha R$ . Они позволяют сделать некоторые выводы о количественном влиянии характеристик подкрепления на возникающие напряжения. Так, например, подкрепление с параметром  $\gamma=0,3$  (фиг. 1.) примерно в 2 раза снижает динамическое напряжение  $\sigma_{\phi\phi}$  на всем диапазоне длин волн ( $0 \leq \alpha R < 4$ ) по сравнению с неподкрепленным отверстием. Увеличение  $\gamma$  приводит к снижению концентрации напряжений вокруг отверстия. При этом, правда, напряжения  $\sigma_{rr}$  и  $\sigma_{r\phi}$  становятся отличными от нуля. Первые растут с увеличением  $\gamma$  при малых  $\alpha R$ , вторые – при больших  $\alpha R$ . Если  $0 \leq \gamma \leq 1$ , то  $\sigma_{r\phi}/\sigma_0 \leq 0,35$ , а  $\sigma_{rr}/\sigma_0 \leq 0,55$ .

Влияние инерции подкрепления существенно, если плотность подкрепления  $\rho_1$  много больше плотности массива  $\rho_0$ . Для реально встречающихся соотношений плотностей ( $1 \leq \rho_1/\rho_0 \leq 3$ ) им можно пренебречь. Это подтвердили соответствующие расчеты. Учет влияния инерции подкрепления на напряжения в массиве в указанном диапазоне плотностей вносит поправку не более 2% при  $\alpha R > 1$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бердичевский В. Л. Вариационные принципы механики сплошных сред. М.: Наука, 1983. 446 с.
2. Брежневский Л. М., Гончаров В. В. Введение в механику сплошных сред. М.: Наука, 1982. 334 с.
3. Работнов Ю. Н. Основы механики деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
4. Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А. Дифракция упругих волн. Киев: Наук. думка, 1978. 306 с.
5. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1979. 560 с.

Ленинград

Поступила в редакцию  
15.V.1987