

УДК 539.3

А. Г. ГОРШКОВ, Ю. В. РАЧИНСКИЙ, Д. В. ТАРЛАКОВСКИЙ

## РЕШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ГИДРОУПРУГОСТИ ДЛЯ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ МЕТОДОМ РИМАНА

Различные теоретические и экспериментальные методы исследования нестационарных задач взаимодействия тел со сплошной средой даны в обзоре [1]. В [2] представлены решения динамических задач для угловых областей, полученные на основе интегральных преобразований и выделения особенностей функций. Нестационарные задачи для упругих тел и сжимаемой жидкости решены в [3] с помощью асимптотических методов. При исследовании динамических задач с границами в форме кругового цилиндра обычно применяется интегральное преобразование Лапласа по времени и разложение в ряд Фурье по углу. Ввиду сложности обращения преобразования Лапласа, применяются приближенные подходы [4–6].

Среди работ, не использующих упрощающих соотношений, следует отметить [7, 8].

В публикуемой статье предложен эффективный алгоритм, свободный от приближенных соотношений, который дает возможность на основе единого подхода решать широкий класс нестационарных задач. При этом не вводятся ограничения на интервалы времени и количество рассматриваемых форм колебаний. Применительно к жестким поверхностям такой подход использован в [9]. Его суть заключается в построении для коэффициентов Фурье потенциалов системы интегральных уравнений Вольтерра второго рода с помощью метода Римана.

**1. Общая постановка задачи и метод решения.** Рассмотрим плоские динамические задачи теории упругости для безграничной среды с круговой цилиндрической поверхностью раздела радиуса  $R'$ . Предполагается, что среда линейная однородная изотропная и невязкая. Вводя обычным образом скалярный  $\varphi$  и векторный  $\psi$  потенциалы перемещений, заметим, что последний имеет единственную ненулевую компоненту  $\psi$ , направленную вдоль оси цилиндра.

Отнесем среду к полярным координатам  $r, \theta$ , полюс которых совпадает с центром цилиндра, и введем безразмерные величины (переменные со штрихом — размерные):

$$\begin{aligned} r &= r'/a, \quad t = t'c_1/a, \quad \gamma = c_2/c_1, \quad R = R'/a \\ \varphi &= \varphi'/a^2, \quad \psi = \psi'/a^2, \quad \{u_r, u_\theta\} = a^{-1} \{u_r', u_\theta'\} \\ \{\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{\theta\theta}, P\} &= (\rho c_1^2)^{-1} \{\sigma_{rr}', \sigma_{r\theta}', \sigma_{\theta\theta}', P'\} \end{aligned}$$

Здесь  $a$  — характерный линейный размер,  $c_1$  и  $c_2$  — скорости распространения продольных и поперечных волн соответственно,  $\rho$  — плотность среды,  $u_r$  и  $u_\theta$  — компоненты вектора перемещения,  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{r\theta}$  и  $\sigma_{\theta\theta}$  — компоненты вектора напряжений,  $P$  — давление.

Используя уравнения возмущенного движения упругой среды относительно скалярного  $\varphi$  и ненулевой компоненты  $\psi$  векторного потенциалов смещения, приходим к задаче

$$\Delta \varphi = \partial^2 \varphi / \partial t^2, \quad \Delta \psi = \gamma^{-2} \partial^2 \psi / \partial t^2 \quad (1.1)$$

$$\varphi|_{t=0} = \partial \varphi / \partial t|_{t=0} = \psi|_{t=0} = \partial \psi / \partial t|_{t=0} = 0$$

$$M_i(\varphi, \partial \varphi / \partial r, \psi, \partial \psi / \partial r)|_{r=R} = f_i^*(\theta, R) \quad (i=1, 2)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi = \lim_{r \rightarrow \infty} \psi = 0, \quad \Delta = \partial^2 / \partial r^2 + r^{-1} \partial / \partial r + r^{-2} \partial^2 / \partial \theta^2$$

где  $M_i$  — дифференциальные операторы, определяющие граничные условия, функции  $f_i^*$  характеризуют неоднородность граничных условий. При этом перемещения и напряжения в среде связаны с потенциалами следующим образом:

$$\begin{aligned} u_r &= \partial\varphi/\partial r + r^{-1}\partial\psi/\partial\theta, & u_\theta &= r^{-1}\partial\varphi/\partial\theta - \partial\psi/\partial r \\ \sigma_{rr} &= \partial^2\varphi/\partial t^2 - kN(\varphi, \psi), & \sigma_{r\theta} &= -\partial^2\psi/\partial t^2 + kN(\psi, -\varphi) \\ \sigma_{\theta\theta} &= (1-2\gamma^2)\partial^2\varphi/\partial t^2 + kN(\varphi, -\psi), & k &= 2\gamma^2/R \\ N(\varphi, \psi) &= \left( \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \right) \frac{R}{r} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Для отделения угла  $\theta$  разложим искомые функции в ряды Фурье

$$\varphi(r, \theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n(r, t) e^{in\theta}, \quad \psi(r, \theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i\psi_n(r, t) e^{in\theta} \quad (1.3)$$

Получим следующую задачу для коэффициентов рядов:

$$\begin{aligned} \partial^2\varphi_n/\partial t^2 &= \Delta_n\varphi_n, & \partial^2\psi_n/\partial t^2 &= \gamma^2\Delta_n\psi_n \\ \varphi_n|_{t=0} &= \partial\varphi_n/\partial t|_{t=0} = \psi_n|_{t=0} = \partial\psi_n/\partial t|_{t=0} = 0 \\ M_{i,n}(\varphi_n, \partial\varphi_n/\partial r, \psi_n, \partial\psi_n/\partial r) &= f_{i,n}^*(t) \quad (i=1, 2) \\ \Delta_n &= \partial^2/\partial r^2 + r^{-1}\partial/\partial r - n^2/r^2 \end{aligned} \quad (1.4)$$

где  $M_{i,n}$  — компоненты Фурье операторов  $M_i$ ,  $f_{i,n}^*$  — коэффициенты разложений функций  $f_i^*$ .

Если теперь в первом волновом уравнении (1.4) перейти к новой функции  $\chi_n = \sqrt{r}\varphi_n$  и к характеристическим переменным  $x=t-r$ ,  $y=t+r$ , то получим уравнение, сводимое к уравнению типа Эйлера — Дарбу

$$\frac{\partial^2\chi_n}{\partial x\partial y} + \frac{n^2 - 1/4}{(x-y)^2}\chi_n = 0$$

Уравнение имеет следующую функцию Римана [10]:

$$\begin{aligned} V_n(x, y, x_0, y_0) &= F(1/2-n, 1/2+n, 1, \lambda) = P_{n-1/2}(1-2\lambda) \\ \lambda &= (x-x_0)(y-y_0)/[(y_0-x_0)(y-x)] \end{aligned}$$

где  $F(\alpha, \beta, \gamma, \lambda)$  — гипергеометрическая функция,  $P_{n-1/2}(z)$  — функция Лежандра полуцелого порядка [11]. Исходя из уравнений и начальных условий в (1.4), можно продолжить функции  $\varphi_n, \psi_n$  на область  $t < 0$  четным образом. При этом, имеет смысл рассмотреть задачу Коши в области  $y \geq x+2R$ .

Пусть граничные значения потенциалов равны следующим функциям

$$\begin{aligned} \varphi_n(R, t) &= f_n(t), & \partial\varphi_n(R, t)/\partial r &= g_n(t) \\ \psi_n(R, t) &= h_n(t), & \partial\psi_n(R, t)/\partial r &= d_n(t) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Тогда по формуле Римана, решения таких задач Коши будут иметь вид

$$\begin{aligned} \varphi_n(z+R, t) &= \frac{1}{2} \left( \frac{R}{R+z} \right)^{1/2} \left\{ f_n(z+t) + f_n(t-z) + \right. \\ &+ \int_{t-z}^{t+z} [K_n(z, s, t)f_n(s) + \Phi_n(z, s, t)g_n(s)] ds \left. \right\} \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\psi_n(z+R, t) = \frac{1}{2} \left( \frac{R}{R+z} \right)^{1/2} \left\{ h_n(t+z/\gamma) + h_n(t-z/\gamma) + \int_{t-z/\gamma}^{t+z/\gamma} [\gamma K_n(z, s\gamma, t\gamma) h_n(s) + \gamma \Phi_n(z, s\gamma, t\gamma) d_n(s)] ds \right\}$$

$$\Phi_n(z, s, t) = P_{n-1/2}(\sigma), \quad K_n(z, s, t) = \frac{1}{2R} P'_{n-1/2}(\sigma) + P'_{n-1/2}(\sigma) \left( \frac{\lambda}{R} - \frac{z}{2(z+R)R} \right), \quad \sigma = 1 - 2\lambda$$

$$\lambda = [(t-s)^2 - z^2] / [4R(R+z)], \quad z = r - R$$

Исходя из нулевых начальных условий и четности по времени указанных функций, из (1.6) получим следующую связь между граничными значениями при  $r=R$  функций  $\varphi_n$  и  $\psi_n$ :

$$f_n(z) + \int_0^z [f_n(s) u_n(z, s) + g_n(s) v_n(z, s)] ds = 0$$

$$h_n(z) + \int_0^z [h_n(s) a_n(z, s) + d_n(s) b_n(z, s)] ds = 0$$

$$u_n(z, s) = K_n(z, s, 0), \quad v_n(z, s) = \Phi_n(z, s, 0)$$

$$a_n(z, s) = \gamma K_n(z\gamma, s\gamma, 0), \quad b_n(z, s) = \gamma \Phi_n(z\gamma, s\gamma, 0)$$

Таким образом, задача (1.4) свелась к решению интегральных уравнений Вольтерра второго рода (1.7) и двух уравнений  $M_{i,n}(f_n, g_n, h_n, d_n) = f_{i,n}^*$  ( $i=1, 2$ ) относительно четырех неизвестных функций. Как будет показано ниже, в большом количестве случаев удается свести задачу просто к системе двух интегральных уравнений Вольтерра второго рода относительно двух функций.

**2. Распространение упругих волн от полости при задании на ее поверхности нормального и касательного напряжений.** Граничные условия с учетом (1.2) примут вид

$$M_1(\varphi, \psi) |_{r=R} \equiv \sigma_{rr} |_{r=R} = p(\theta, t)$$

$$M_2(\varphi, \psi) |_{r=R} \equiv \sigma_{r\theta} |_{r=R} = q(\theta, t)$$

Пользуясь соотношениями (1.2), (1.3), (1.5) и раскладывая все функции в ряды Фурье, из (2.1) найдем (индекс  $n$  соответствует коэффициентам рядов, штрих означает производную):

$$\sigma_{rr, n} \equiv f_n'' - k(g_n + nd_n - n^2 f_n/R - nh_n/R) = p_n$$

$$\sigma_{r\theta, n} \equiv h_n'' - k(d_n + ng_n - n^2 h_n/R - nf_n/R) = q_n$$

$$\sigma_{\theta\theta, n} \equiv (1-k)f_n'' + k(g_n - n^2 f_n + nd_n - nh_n)$$

Из (2.2) следует, что при  $n \neq 1$  можно выразить функции  $d_n, g_n$  через  $f_n, h_n$  и подставить их в уравнения (1.7), которые после интегрирования сведутся к системе двух интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Первое из них имеет вид

$$lf_n(t) - nh_n(t) + \int_0^t K_{n,1}(t, z) f_n(z) + K_{n,2}(t, z) h_n(z) dz = D_n(t)$$

$$K_{n,1}(t, z) = \int_z^t [v_{n,zz}''(\xi, z) - (n^2 - 1)k u_n(\xi, z)] d\xi - k - v_{n,z}'(\xi, z) |_{\xi=z}$$

$$K_{n,2}(t, z) = nv'_{n,z}(\xi, z) |_{\xi=z} - \int_z^t [nv''_{n,zz}(\xi, z) + nk(n^2-1)v_n(\xi, z)/R] d\xi$$

$$D_n(t) = \int_0^t dz \int_0^z [p_n(s)v_n(z, s) - nq_n(s)v_n(z, s)] ds$$

В первом уравнении (2.3)  $l=1$ , а для получения второго уравнения достаточно поменять местами в (2.3)  $p_n$  и  $q_n$ ,  $f_n$  и  $h_n$ , заменить  $v_n$  на  $b_n$ ,  $u_n$  на  $a_n$ , а также положить  $l=\gamma$ .

При  $n=1$ , исключив из (2.2), (1.7) функции  $h_1$ ,  $d_1$ , получим уравнение, которое надо решать совместно с первым уравнением (1.7) относительно функций  $f_1$ ,  $g_1$ :

$$\gamma f_1(t) + \int_0^t [B(t, z)f_1(z) + A(t, z)g_1(z)] dz = D_1(t)$$

$$B(t, z) = \int_z^t \left[ ka_1(\xi, z) + b''_{1,zz}(\xi, z) + \frac{2k}{R} b_1(\xi, z) \right] d\xi - b'_{1,z}(\xi, z) |_{\xi=z}$$

$$A(t, z) = -k \int_z^t b_1(\xi, z) d\xi, \quad D_1(t) = \int_0^t dz \left[ \int_0^z b_1(z, s) (p_n(s) - kC(s)/n - ka_n(z, s)C(s)) ds - kC(z) \right]$$

$$C(t) = \int_0^t (t-s) (q_1(s) - p_1(s)) ds$$

Заметим, что частным случаем данной постановки является задача о дифракции упругих волн на полости. При этом (звездочка здесь и далее соответствует падающей волне):

$$p(\theta, t) = -\sigma_{rr}^* |_{r=R}, \quad q(\theta, t) = -\sigma_{r\theta}^* |_{r=R} \quad (2.4)$$

Для плоской ступенчатой волны сжатия, которая в начальный момент времени касается лобовой точки полости имеем ( $H(z)$  — функция Хевисайда):

$$\begin{aligned} \varphi^* &= -z^2 H(z)/2, & \psi^* &= 0, & z &= t+r \cos \theta - R \\ \sigma_{rr}^* &= (k \sin^2 \theta - 1) H(z), & \sigma_{r\theta}^* &= 1/2 k H(z) \sin 2\theta \\ \sigma_{\theta\theta}^* &= (k \cos^2 \theta - 1) H(z), & u_r^* &= -z H(z) \cos \theta, & u_\theta^* &= z H(z) \sin \theta \end{aligned} \quad (2.5)$$

Тогда, из (1.2), (2.4) для  $R=1$  получим

$$\begin{aligned} p_n^c &= (p_n + p_{-n})/2 = [2(1-\gamma^2) \sin(n\beta)/n + \gamma^2(n+2)^{-1} \sin(n+2)\beta + \\ & \quad + \gamma^2(n-2)^{-1} \sin(n-2)\beta] \kappa_n \\ g_n^s &= (q_n - q_{-n})/(2i) = \gamma^2 [(n+2)^{-1} \sin(n+2)\beta - (n-2)^{-1} \sin(n-2)\beta] \pi^{-1} \\ \beta &= \beta(t) = \begin{cases} \pi & t > 2R \\ \arccos(1-t/R) & t \leq 2R \end{cases}, \quad \kappa_n = \begin{cases} \pi^{-1} & n \geq 1 \\ (2\pi)^{-1} & n = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

После решения указанных систем уравнений Вольтерра, согласно (1.2), может быть найдена единственная ненулевая компонента тензора напряжений на поверхности полости

$$\sigma_{\theta\theta}^s = \sigma_{\theta\theta}^* + \sum_{n=0}^{\infty} (1-2\gamma^2) f_n'' + 2\gamma^2 (g_n - n^2 f_n + n d_n - n h_n) \cos n\theta$$

**3. Распространение волн от полости при заданных на ее поверхности перемещениях.** Граничные условия имеют вид

$$M_1(\varphi, \psi) |_{r=R} = u_r |_{r=R} = p(\theta, t)$$

$$M_2(\varphi, \psi) |_{r=R} = u_\theta |_{r=R} = q(\theta, t)$$

Раскладывая заданные функции  $p, q$  в ряды Фурье, из (1.2), (1.3), (1.5) получим граничные условия

$$M_{1,n} = g_n - n h_n / R = p_n, \quad M_{2,n} = d_n - n f_n / R = q_n \quad (3.1)$$

Исключая из уравнений (3.1), (1.7) функции  $g_n, d_n$ , приходим к системе интегральных уравнений

$$f_n(z) + \int_0^z \left[ f_n(s) u_n(z, s) + \frac{n}{R} h_n(s) v_n(z, s) \right] ds = - \int_0^z p_n(s) v_n(z, s) ds \quad (3.2)$$

$$h_n(z) + \int_0^z \left[ h_n(s) a_n(z, s) + \frac{n}{R} f_n(s) b_n(z, s) \right] ds = - \int_0^z q_n(s) b_n(z, s) ds$$

В качестве частного случая можно получить решение задачи о дифракции упругих волн на движущемся по заданному закону абсолютно жестком цилиндре при условии его жесткого сцепления со средой. При этом

$$p(\theta, t) = -U(t) \cos \theta + V(t) \sin \theta - u_r^* |_{r=R} \quad (3.3)$$

$$q(\theta, t) = U(t) \sin \theta + V(t) \cos \theta - u_\theta^* |_{r=R} + R \int_0^t \omega(s) ds$$

где  $U, V$  — проекции смещения центра цилиндра на оси ортогональной системы координат,  $\omega$  — угловая скорость его вращения.

Если рассмотреть дифракцию упругой волны (2.5) на неподвижном абсолютно жестком цилиндре, то из (3.3), (1.2) получим

$$p_n^c = \{ (t-1) [ (n+1)^{-1} \sin(n+1)\beta + (n-1)^{-1} \sin(n-1)\beta ] + \quad (3.4)$$

$$+ 1/2 [ (n-2)^{-1} \sin(n-2)\beta + 2n^{-1} \sin n\beta + (n+2)^{-1} \sin(n+2)\beta ] \} \chi_n$$

$$q_n^s = (t-1) [ (n+1)^{-1} \sin(n+1)\beta - (n-1)^{-1} \sin(n-1)\beta ] \pi^{-1} +$$

$$+ [ (n+2)^{-1} \sin(n+2)\beta - (n-2)^{-1} \sin(n-2)\beta ] (2\pi)^{-1}$$

**4. Поведение абсолютно жесткого подвижного цилиндра при действии на него упругой волны.** Пусть волна (2.5) падает на цилиндр  $R = 1$ , тогда уравнение его движения и условие непрерывности смещений на границе будут иметь вид [12]:

$$\frac{d^2 U}{dt^2} = \delta \int_{-\pi}^{\pi} [ (\sigma_{r\theta} + \sigma_{r\theta}^*) |_{r=R} \sin \theta - (\sigma_{rr} + \sigma_{rr}^*) |_{r=R} \cos \theta ] d\theta \quad (4.1)$$

$$u_r = -u_r^* - U \cos \theta, \quad u_\theta = -u_\theta^* + U \sin \theta$$

где  $\delta = \rho(\rho_0)^{-1}$ ,  $\rho_0$  — плотность цилиндра,  $U(t)$  — его смещение вдоль оси перпендикулярной фронту, отнесенное к  $a$ . Из (4.1) следует, что для  $n \neq 1$  имеют место те же соотношения (3.2), как и для неподвижного цилиндра. При  $n=1$  из (4.1) найдем

$$U(t) = \delta \left[ h_1(t) - f_1(t) - \int_0^t (t-s) G(s) ds \right], \quad g_1 - h_1 = -u_{r,1}^* - U \quad (4.2)$$

$$d_1 - f_1 = u_{\theta,1}^* + U, \quad G(t) = \sigma_{r\theta,1}^*(R, t) - \sigma_{rr,1}^*(R, t)$$

Исключая теперь из уравнений (4.2), (4.7) при  $n=1$  функции  $U$ ,  $g_1$ ,  $d_1$ , придем к системе двух интегральных уравнений

$$f_1(z) + \int_0^z [Q_1(z, s)f_1(s) + (1-k)v_1(z, s)h_1(s)] ds = H_1(z) \quad (4.3)$$

$$h_1(z) + \int_0^z [(1-k)b_1(z, s)f_1(s) + Q_2(z, s)h_1(s)] ds = H_2(z)$$

$$Q_1 = u_1 + kv_1, \quad Q_2 = a_1 + kb_1$$

$$H_1(z) = \int_0^z (u_{r,1}^*(s) + kG(s))v_1(z, s) ds$$

$$H_2(z) = \int_0^z (u_{\theta,1}(s) - kG(s))b_1(z, s) ds$$

**5. Действие акустической волны на цилиндрическую оболочку.** Для перехода к уравнениям акустической среды в уравнениях (1.1)–(1.7) необходимо положить  $\psi = \gamma = 0$ . Пусть  $w$  — смещение срединной поверхности оболочки по нормали к центру, тогда условие непротекания примет вид

$$w = -\partial\varphi^2/\partial r|_{r=R}, \quad \varphi^2 = \varphi + \varphi^* \quad (5.1)$$

Как показано в [13], из этого уравнения и из общих уравнений теории оболочек можно исключить тангенциальное и нормальное смещение. Тогда будем иметь усложненное граничное условие на суммарный потенциал перемещения

$$L(\partial\varphi^2/\partial r, -P^2)|_{r=R} = 0 \quad (5.2)$$

где  $P^2 = -\partial^2\varphi^2/\partial t^2$ ,  $L$  — некоторый дифференциальный оператор по  $\theta$  и  $t$ , который характеризует физико-механические свойства оболочки. Если при этом не учитывать геометрическую нелинейность, то из (5.2), (1.5) можно получить

$$L_n(g_n, f_n'') = F_n \quad (5.3)$$

$$F_n(t) = -L_n(\varphi_{r,n}^*, \varphi_n^{*''})|_{r=R}, \quad \varphi_r^* = \partial\varphi^*/\partial r$$

где  $L_n$  — компоненты разложения в ряд Фурье оператора  $L$ .

Уравнение (5.3) может быть приведено к интегральному уравнению Вольтерра, которое необходимо решать в системе с первым уравнением (1.7).

Рассмотрим для простоты безмоментную теорию оболочек, тогда, согласно [7, 8], находим

$$L_n(g, P) = g'' + \omega_n^2 g - e_n P \quad (5.4)$$

здесь  $\omega_n$  — собственные колебания оболочки,  $e_n$  — константы определяемые видом оболочки. Их значения для однородной изотропной и слоистой оболочек приведены в [7]. Если рассматривается слоистая оболочка, состоящая из двух концентрических однородных стальных оболочек толщиной стенок  $h/2$ , которые разделены однородной прослойкой, ее жесткостью и массой пренебрегают, то имеем [7]:

$$\omega_n = l_0 c_0 n(n^2 - 1) c_1^{-1} [12(n^2 + 1)]^{-1/2} \quad (n \neq 0), \quad \omega_0 = c_0/c_1$$

$$e_n = \rho n^2 [\rho_0 h(n^2 + 1)]^{-1} \quad (n \neq 0), \quad e_0 = \rho/(\rho_0 h)$$

где  $\rho_0$  — плотность,  $c_0$  — скорость звука в оболочке,  $h$  — толщина прослойки.

Тогда из (5.3), (5.4) получим уравнение

$$-e_n f_n(t) + g_n(t) + \omega_n^2 \int_0^t (t-s)^2 g_n(s) ds = F_{1,n}(t) \quad (5.5)$$

$$F_{1,n}(t) = e_n \varphi_n^*(t) - \omega_n^2 \int_0^t (t-s)^2 \varphi_{r,n}^*(s) ds - \varphi_{r,n}^*(t)$$

Оно должно решаться в системе с первым уравнением (1.7). При этом, для набегающей волны вида (2.5):

$$\varphi_n^*(t) = -2\kappa_n \int_0^t \left[ (\tau-1) \frac{\sin n\beta(\tau)}{n} + \frac{\sin(n+1)\beta(\tau)}{2(n+1)} + \frac{\sin(n-1)\beta(\tau)}{n-1} \right] d\tau$$

$$\varphi_{r,n}^*(t) = -\kappa_n \int_0^t \left[ \frac{\sin(n+1)\beta(\tau)}{n+1} + \frac{\sin(n-1)\beta(\tau)}{n-1} \right] d\tau$$

## 6. Действие акустической волны на систему оболочка — твердое тело.

Цилиндрическая оболочка радиуса  $R$  погружена в сжимаемую жидкость и содержит концентрично расположенный жесткий цилиндр радиуса  $R_0$ . Пространство между оболочкой и ядром заполнено жидкостью, акустические постоянные которой  $c_1$  — скорость звука,  $\rho_1$  — плотность, параметры внешней среды соответственно  $c_2$ ,  $\rho_2$ . Падающая волна частично отражается от оболочки, частично проходит во внутреннюю полость и, взаимодействуя с ядром и оболочкой, порождает поле многократно отраженных и преломленных волн. Пусть  $\varphi^*$  — потенциал перемещений падающей волны,  $\psi$  — потенциал волн отраженных и излученных оболочкой,  $\varphi$  — потенциал волн во внутренней области. Тогда для  $\varphi$  и  $\psi$  будем иметь уравнения (1.1) с нулевыми начальными условиями.

Разложим все функции в ряды Фурье и введем такие обозначения

$$h_n(t) = \psi_n(R, t), \quad d_n(t) = \partial \psi_n(R, t) / \partial r \quad (6.1)$$

$$f_n(t) = \varphi_n(R, t), \quad g_n(t) = \partial \varphi_n(R, t) / \partial r$$

$$r_n(t) = \varphi_n(R_0, t), \quad \delta = R - R_0, \quad \eta = (R_0/R)^{1/2}$$

Условия непротекания через поверхность оболочки и ядра дают следующие соотношения

$$\varphi_{r,n}^* + d_n = g_n, \quad g_n = -w_n, \quad \partial \varphi_n(R_0, t) / \partial r = 0 \quad (6.2)$$

Давление на поверхности оболочки выражается через волновые потенциалы

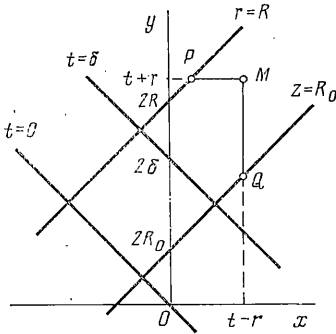
$$P^z|_{r=R} = \partial^2 (\varphi - \alpha \psi - \varphi^*) / \partial t^2, \quad \alpha = \rho_2 / \rho_1 \quad (6.3)$$

На границе оболочки из (6.3), (6.1), (5.2) будем иметь

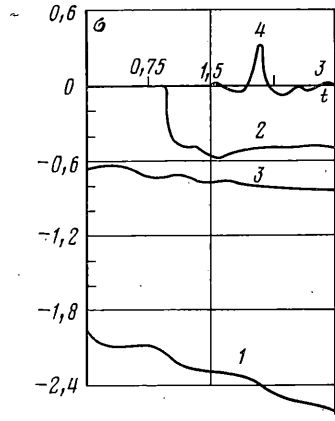
$$L_n(g_n, \alpha h_n'' - f_n'' + \varphi_n^{*''}) = 0 \quad (6.4)$$

Из уравнений (6.2), (6.4) можно выразить функции  $h_n$ ,  $d_n$  через  $f_n$ ,  $g_n$ . Теперь заметим, что так как функции  $\psi_n$  определены в области  $r \geq R$ , то для них будет справедливо второе соотношение (1.7), и после указанного исключения функций оно сведется к уравнению, которое для безмоментной теории оболочек имеет вид

$$e_n f_n(z) + g_n(z) + \int_0^z K_1(z, s) f_n(s) + K_2(z, s) g_n(s) ds = D_{1,n}(z) \quad (6.5)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

$$K_1(z, s) = a_n(z, s)e_n; \quad K_n(z, s) = \omega_n^2(z-s)^2/2 + a_n(z, s) + e_n \alpha b_n(z, s) + \sum_{k=0}^2 A_k(z, z) \cdot (z-s)^{2-k} / (2-k) - A_2(z, s)$$

$$D_{1,n}(z) = e_n \left[ \varphi_n^*(z) + \int_0^z a_n(z, s) \varphi_n^*(s) + \alpha \varphi_{r,n}^*(s) b_n(z, s) ds \right]$$

$$A_k(z, s) = \int_0^z \dot{a}_n(z, \xi) (s-\xi)^k / k! d\xi$$

Для  $\varphi$  можно воспользоваться первым соотношением типа (1.7) только при  $z \leq \delta$ . С учетом того, что на  $\varphi$  ставится внутренняя задача, из (1.7) будем иметь

$$f_n(z) - \int_0^z u_n(-z, s) f_n(s) + v_n(-z, s) g_n(s) ds = 0 \quad (6.6)$$

Значит, для  $z \leq \delta$  имеем систему двух уравнений Вольтерра второго рода (6.5), (6.6). Для нахождения  $\varphi$  при больших значениях времени воспользуемся следующей формулой Римана на основе области влияния показанной на фиг. 1:

$$\varphi_n(r, t) = 1/2 \left[ f_n(t+r-R) (R/r)^{1/2} + r_n(t-r+R_0) (R_0/r)^{1/2} - \int_0^{t+r-R} Q_{1,n}(t, r, s, R) f_n(s) + H_{1,n}(t, r, s, R) g_n(s) ds + \int_0^{t-r+R_0} Q_{1,n}(t, r, s, R_0) r_n(s) ds \right] \quad (6.7)$$

$$Q_{1,n}(t, r, s, a) = \left[ (2a)^{-1} P_{n-1/2}(\sigma) + P_{n-1/2}'(\sigma) \left( \frac{\lambda}{a} - \frac{r-a}{2ra} \right) \left( \frac{a}{r} \right)^{1/2} \right]$$

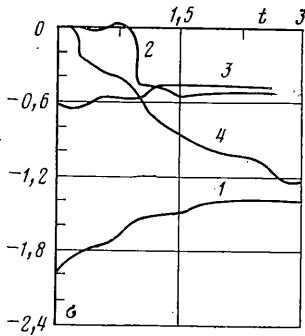
$$H_{1,n}(t, r, s, a) = P_{n-1/2}(\sigma) (a/r)^{1/2}, \quad \sigma = 1 - 2\lambda$$

$$\lambda = [(t-s)^2 - (r-a)^2] / (4ra)$$

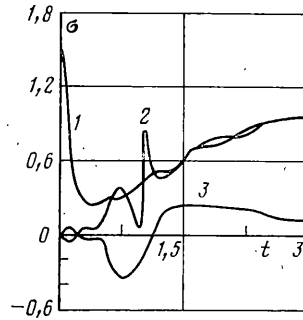
Полагая в (6.7)  $r=R$  и  $r=R_0$ , будем иметь два уравнения:

$$f_n(t) + \int_0^t Q_{1,n}(t, R, s, R) f_n(s) + H_{1,n}(t, R, s, R) g_n(s) ds = \quad (6.8)$$





Фиг. 3



Фиг. 4

$$\begin{aligned}
 &= \eta \int_0^{t-\delta} Q_{1,n}(t, R, s, R_0) r_n(s) ds - \eta r_n(t-\delta) \\
 &\eta r_n(t) - \eta \int_0^t Q_{1,n}(t, R, s, R_0) r_n(s) ds = f_n(t-\delta) - \\
 &- \int_0^{t-\delta} Q_{1,n}(t, R_0, s, R) f_n(s) + H_{1,n}(t, R_0, s, R) g_n(s) ds
 \end{aligned}$$

Отсюда видно, что если последовательно рассматривать промежутки времени  $t \in [k\delta, (k+1)\delta]$ ,  $k=1, 2, \dots$ , то на каждом из них надо будет решать систему трех интегральных уравнений Вольтерра второго рода (6.5), (6.8). Как уже отмечалось, для  $t \leq \delta$  имеем систему двух уравнений и соотношение  $r_n(t) = 0$ .

**7. Численные расчеты.** Решение систем двух интегральных уравнений Вольтерра осуществлялось с использованием формулы Симпсона и формулы трапеций. При этом, некоторый отрезок времени  $[0, T]$  разбивался на  $N$  равных интервалов и осуществлялось последовательное нахождение функций в каждом узле путем решения системы двух линейных уравнений. В расчетах принято  $T=3$ ,  $N=100$ . Для вычисления функций  $P_{n-1/2}(x)$  было использовано её представление через гипергеометрическую функцию с разложением последней в гипергеометрический ряд.

При решении задачи о дифракции упругих волн на абсолютно жестком неподвижном цилиндре были использованы соотношения (3.2), (3.4). Компоненты тензора возмущенных напряжений определялись после решения системы интегральных уравнений по формулам (2.2). Асимптотики первых форм напряжений для больших и достаточно малых значений времени приведены в [14, 15]. Результаты расчетов полностью совпали с приведенными в этих статьях, кроме того были сделаны вычисления и для высших форм колебаний, до пятнадцати, и для широкого диапазона времени.

На фиг. 2 представлены напряжения в трех характерных точках цилиндра при значении коэффициента Пуассона  $\nu=0,25$  ( $\gamma^2=0,5(1-2\nu)$ ). Заметим, что случай  $\nu=0,5$  соответствует акустической среде, при этом было получено распределение давления полностью совпадающее с приведенным в [8].

Смещения вдоль оси подвижного цилиндра под действием упругой волны были исследованы в [12] на основе анализа первой формы колебаний. На фиг. 3 приведены значения напряжений на поверхности цилиндра, вычисленные по двенадцати формам колебаний при  $\rho=\rho_0$ . Зависимость смещения цилиндра от времени совпала с данной в [12]. На фиг. 2, 3 кривые 1, 2, 4 показывают изменение во времени напряжений  $\sigma_{rr}$  в точках  $\theta=0, \pi/2, \pi$  соответственно, а кривая 3 — напряжение  $\sigma_{\theta\theta} |_{\theta=0}$ .

Дифракция акустической волны на слоистой оболочке рассчитывалась на основании уравнений (5.4), (1.7), (5.5). При этом результаты вычислений совпали для первых пяти форм колебаний приведенных в [7]. На фиг. 4 приводятся отсутствующие в указанной статье, значения давления в точках  $\theta=0, \pi/2$  (кривые 1, 2 соответственно) и скорость смещения оболочки для  $\theta=\pi/2$  (кривая 3).

В заключение отметим, что указанный подход может быть распространен на задачи для системы цилиндрических оболочек в упругой среде, а также сферические включения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вестяк А. В., Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В.* Нестационарное взаимодействие деформируемых тел с окружающей средой // Итоги науки и техники. сер. Механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНТИ, 1983. Т. 15. С. 69–148.
2. *Поручиков В. Б.* Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328 с.
3. *Слепая Л. И., Яковлев Ю. С.* Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики. Л.: Судостроение, 1980. 343 с.
4. *Midlin R. D., Bleich H. H.* Response of an elastic cylindrical shell to a transverse, step shock wave // J. Appl. Mech. 1953. V. 20. № 2. P. 189–195.
5. *Haywood Y. H.* Response of an elastic cylindrical shell to a pressure pulse // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1958. V. 11. Pt. 2. P. 129–141.
6. *Григолюк Э. И., Горшков А. Г.* Нестационарная гидроупругость оболочек. Л.: Судостроение, 1974. 208 с.
7. *Geers T. L.* Excitation of an elastic cylindrical shell by a transient acoustic wave // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. V. 36. № 3. P. 459–469.
8. *Кубенко В. Д.* Нестационарное взаимодействие элементов конструкций со средой. Киев, Наук. думка, 1979. 183 с.
9. *Кейсер Н. Д.* Дифракция нестационарных упругих волн на жестких цилиндрических и сферических включениях // Науч. сообщ. Ин-та горн. дела им. Скопинского. 1968. Вып. 56. С. 110–115.
10. *Трикоми Ф.* Лекции по уравнениям в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1957. 443 с.
11. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами/Под ред. М. Абрамовича, И. Стиган, М.: Наука, 1979. 830 с.
12. *Forrestal M. J., Alzheimer W. E.* Transient motion of a rigid cylinder produced by an elastic and acoustic waves // Trans. ASME. Ser. E. Appl. Mech. 1968. V. 35. № 1. P. 134–138.
13. *Подстригач Я. С.* Об одном случае усложнения граничных условий в задачах гидроупругости // Докл. АН УССР. Сер. А. 1975. № 3. С. 235–238.
14. *Бабичев А. И., Саидов Т. Х., Саримсанов У.* Реакция упругой среды на неподвижный цилиндр при прохождении ступенчатой волны сжатия // Вопросы вычислительной и прикладной математики. Ташкент: АН УзбССР, 1976. Т. 43. С. 107–113.
15. *Пинчукова Н. И.* Нестационарная дифракция упругой волны на жестком цилиндре // Физ. техн. проблемы разработки полезных ископаемых, 1986. № 3. С. 81–84.

Москва

Поступила в редакцию  
4.VIII.1988г.