МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1989

УДК 539.3

А. Г. КОЛПАКОВ

ЖЕСТКОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НАПРЯЖЕННЫХ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

Рассматривается задача усредненного описания деформирования (колебаний) напряженных микронеоднородных сред (композиционных, высокопористых и т. п.). На ряде конкретных задач исследуется зависимость усредненных упругих характеристик (в частности, скорости распространения длинноволновых колебаний) от начальных напряжений.

1. **Микронеоднородные тела с начальными напряжениями.** Деформирование тел с начальными напряжениями (в том числе и микронеоднородных тел с характерным размером неоднородностей $\varepsilon \ll 1$) $\{\sigma_{ij}^{\circ\varepsilon}\}$ определяется из решения следующей задачи (получена на основании вариационного принципа [1]):

$$\sigma_{ij,j}+(\overset{\circ\varepsilon}{\sigma_{jk}}\,\overset{\varepsilon}{u_{i,k}})_{,j}=\rho^{\varepsilon}\,\partial^2 u_i^{\varepsilon}/\partial t^2+f_i(x,t) \tag{1.1}$$

где $\mathbf{u}^{\varepsilon}$ — вектор перемещений, $\rho^{\varepsilon}(\mathbf{x})$ — удельный вес, $\{\sigma_{ij}^{\circ\varepsilon}\}$ — тензор начальных напряжений. При помощи закона Гука для неоднородного материала $\sigma_{ij}=a_{ijkl}(\mathbf{x})e_{kl}$ уравнение (1.1) может быть переписано в виде

$$\{[\overset{\varepsilon}{a_{ijkl}}(\mathbf{x})+\delta_{ik}\overset{\circ\varepsilon}{\sigma_{jl}}(\mathbf{x})]\overset{\varepsilon}{u_{k,l}}\}_{,j}=\rho^{\varepsilon}\,\partial^2 u_i^{\varepsilon}/\partial t^2+f_i(\mathbf{x},t) \tag{1.2}$$

Уравнения собственных колебаний получаются путем замены правой части (1.2) на $-\omega_{\varepsilon}^2\mathbf{u}^{\varepsilon}$ (ω_{ε} — собственные частоты), уравнения статического деформирования — исключением члена $\rho^{\varepsilon}\partial^2\mathbf{u}^{\varepsilon}/\partial t^2$ [1]. Уравнение (1.2) дополняется граничными и начальными (в случае динамической задачи) условиями. Для тела, закрепленного на границе области Q, занятой телом

$$\mathbf{u}^{\varepsilon}|_{\partial Q}=0,\qquad \mathbf{u}^{\varepsilon}(\mathbf{x},0)=\mathbf{u}_0(\mathbf{x}),\qquad \frac{\partial\mathbf{u}^{\varepsilon}}{\partial t}(\mathbf{x},0)=\mathbf{u}_1(\mathbf{x}) \tag{1.3}$$

Связь задач усреднения эллиптических и соответствующих им гиперболических уравнений изучена в [2—5]. Из указанных работ следует, что усредненное уравнение для (1.2) имеет вид $\langle\rho^{\varepsilon}\rangle\partial^2u_i/\partial t^2=(\check{A}_{ijkl}u_{k,l})_{,j}-f_i$, где $\{\check{A}_{ijkl}\}$ — усредненные коэффициенты стационарного уравнения.

Ниже рассматривается вопрос об усреднении задачи (1.2), (1.3), т. е. об ее асимптотическом поведении, при условии, что характерный размер неоднородностей $\varepsilon\to 0$. Как видно из (1.2) задача состоит в проведении усреднения уравнения с коэффициентами $\overset{\varepsilon}{a_{ijkl}}(\mathbf{x})+\delta_{ik}\sigma_{jl}^{\circ\varepsilon}(\mathbf{x})$ (при условии выполнения для них ряда стандартных требований). Потребуем, чтобы коэффициенты $\overset{\varepsilon}{a_{ijkl}}(\mathbf{x})+\delta_{ik}\sigma_{jl}^{\circ\varepsilon}(\mathbf{x})$ задавали положительно определенный оператор на функциональном пространстве $\{H_0^1(Q)\}^3$ [2]. Далее, будем рассматривать среды периодического строения [2, 3]. Их материальные характеристики имеют вид

$$\overset{\varepsilon}{a_{ijkl}}(\mathbf{x})=a_{ijkl}(\mathbf{x}/\varepsilon) \tag{1.4}$$

где $a_{ijkl}(\mathbf{y})$ — периодические функции с ячейкой периодичности P_1 (длина граней P_1 — порядка единицы). Тогда функции $a_{ijkl}(\mathbf{x}/\varepsilon)$ имеют ячейку периодичности $P_\varepsilon=\varepsilon P_1$ и задают быстроосциллирующее распределение материальных характеристик. Как показано в [2, 3] локальные напряжения $\{\sigma_{ij}^{0\varepsilon}(\mathbf{x})\}$, если они определяются из решения задачи теории упругости с тензором упругих постоянных $\{a_{ijkl}(\mathbf{x}/\varepsilon)\}$, асимптотически (в $L_2(Q)$) равны

$$\overset{0\varepsilon}{\sigma_{ij}}(\mathbf{x})=\sigma_{ij}(\mathbf{x})+(a_{ijmn}(\mathbf{x}/\varepsilon)\overset{kl}{N_{m,n}}(\mathbf{x}/\varepsilon))u_{k,l}(\mathbf{x}) \tag{1.5}$$

где $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ — решение усредненной задачи (не зависящее от переменной $\mathbf{x}/\varepsilon$), $\{\mathbf{N}^{kl}\}$ — решения ячеечной задачи теории упругости, см. [2]. Мы будем использовать далее равенство (1.5) как точное (хотя асимптотика (1.5) обоснована как поточечная, в пространстве $C(Q)$, только в одномерном случае [6], что соответствует телам слоистого строения).

К операторам (1.2) с коэффициентами $A_{ijkl}(\mathbf{x}/\varepsilon)=a_{ijkl}(\mathbf{x}/\varepsilon)+\delta_{ik}\sigma_{jl}^{0\varepsilon}(\mathbf{x})$ вида (1.4), (1.5) применимы классические методы усреднения уравнений с периодическими коэффициентами [2, 3]. Таким образом задача состоит (с формальной точки зрения) просто в вычислении соответствующих усредненных постоянных. Однако, в общем случае осуществить это не удается.

Замечание 1. Для решения поставленной задачи в общем случае надо провести вычисление G-предела (определение см., например, в [4, 5, 8]) последовательности операторов (1.2), выразив результат через пределы (какого-либо типа) операторов с коэффициентами $\sigma_{ij}^{0\varepsilon}(\mathbf{x})$ и $\overset{\varepsilon}{a}_{ijkl}(\mathbf{x})$. О методах вычисления пределов сумм вида $G\text{-}\lim_{\varepsilon\to0}(M_\varepsilon+L_\varepsilon)$ (M_ε, L_ε — дифференциальные операторы одного порядка) или [7] $G\text{-}\lim_{\varepsilon\to0}(I_\varepsilon+J_\varepsilon)^*$ (где I_ε, J_ε — потенциалы операторов M_ε, L_ε) ничего не известно. Однако, можно получить решения для двух следующих случаев: 1. когда начальные напряжения малы $\sigma_{ij}^{0\varepsilon}=\delta\sigma_{ij}^{0}(\mathbf{x}/\varepsilon)$ ($\delta\ll1$); 2. когда удается решить задачу в явном виде (в частности, удается решить ячеечную задачу [2, 3] аналитически).

Замечание 2. При неположительности матрицы $\{\sigma_{ij}^{0\varepsilon}(\mathbf{x})\}$ (например, при наличии в теле сжимающих напряжений) стационарная часть уравнения (1.2) может утратить положительную определенность. В указанных выше двух случаях задача сохраняет свой тип (случай 1) или тип задачи легко контролируется (случай 2).

2. Случай малых начальных напряжений. Пусть $\sigma_{ij}^{0\varepsilon}(\mathbf{x})=\delta\sigma_{ij}^{0}(\mathbf{x})$, где $\delta\ll1$ ($\{\sigma_{ij}^{0}\}$ даются (1.4)). Для решения задачи может быть применен классический метод малого параметра (в качестве малого параметра выступает $\delta\ll1$). Ячеечная задача метода усреднения имеет вид [2, 4, 5] (приводится в удобной для дальнейшего вариационной постановке [5]):

$$\int\limits_{P_1}[a_{ijkl}(\mathbf{y})+\delta b_{ijkl}(\mathbf{y})](N_k^{\alpha\beta}+x_\alpha\delta_{\beta k})_{,l}\varphi_{i,j}\,d\mathbf{y}=0 \tag{2.1}$$

для любой $\varphi\in\Pi(P_1)$ — замыкание множества периодических на P_1 функций из $C^\infty(P_1)$ по норме $W_2^1(Q)$. При этом $\mathbf{N}^{\alpha\beta}\in\Pi(P_1)$. Обозначено $b_{ijkl}(y)=\delta_{ik}\sigma_{jl}^{0}(\mathbf{y})$. Усредненные характеристики даются формулой [2, 3]:

$$\begin{aligned}\check{A}_{ijkl}&=(\operatorname{mes}P_1)^{-1}\int\limits_{P_1}[a_{ijkl}(\mathbf{y})+\delta b_{ijkl}(\mathbf{y})][(N_{k,l}^{\alpha\beta}+\delta_{\alpha l}\delta_{\beta k})\,d\mathbf{y}N_{k,l}^{\alpha\beta}\,d\mathbf{y}=\\&=(\operatorname{mes}P_1)^{-1}\left\{\int\limits_{P_1}[a_{ijkl}(\mathbf{y})+\delta b_{ijkl}(\mathbf{y})]\,d\mathbf{y}-\right.\\&\left.-\int\limits_{P_1}[a_{pqkl}(\mathbf{y})+\delta b_{pqkl}(\mathbf{y})]N_{p,q}^{ij}N_{k,l}^{\alpha\beta}\,d\mathbf{y}\right\}\end{aligned} \tag{2.2}$$

Последнее равенство вытекает из (2.1) при $\varphi=\mathbf{N}^{ij}$ (после проведения элементарных алгебраических преобразований). Усредненная задача имеет вид $(\check{A}_{ijkl}u_{k,l})_{,j}=\langle\rho^\varepsilon\rangle\partial^2u_i/\partial t^2+f_i(\mathbf{x},t)$ с условием (1.4).

Будем искать решение (2.1) в виде (здесь и далее мы будем сохранять члены только до первого порядка по δ):

$$\mathbf{N}^{\alpha\beta}(\mathbf{y})=\mathbf{N}^{0\alpha\beta}(\mathbf{y})+\delta\mathbf{N}^{1\alpha\beta}(\mathbf{y})+\ldots; \quad \mathbf{N}^{0\alpha\beta},\ \mathbf{N}^{1\alpha\beta},\ldots\in\Pi(P_1) \tag{2.3}$$

Подстановка (2.3) в (2.1) и приравнивание коэффициентов при δ^0 и δ приводит к выводу: функции $\{\mathbf{N}^{0\alpha\beta}(\mathbf{y})\}$ являются решением ячеечной задачи (2.1) при $\delta=0$, а $\{\mathbf{N}^{1\alpha\beta}(\mathbf{y})\}$ определяются из решения задачи

$$\int\limits_{P_1}[a_{ijkl}(\mathbf{y})N_{k,l}^{1\alpha\beta}+b_{ijkl}(y)(N_k^{0\alpha\beta}+y_\alpha\delta_{\beta k})_{,l}]\varphi_{i,j}\,d\mathbf{y}=0 \tag{2.4}$$

для всех $\varphi\in\Pi(P_1)$. Что касается усредненных коэффициентов $\check{A}_{ijkl}$, то с точностью до членов порядка δ они равны (это следует из подстановки (2.3) в формулу (2.2)):

$$A_{ij\check{\alpha}\beta}=(\mathrm{mes}\,P_1)^{-1}\left\{\int\limits_{P_1}(a_{ij\alpha\beta}(\mathbf{y})+\delta b_{ij\alpha\beta}(\mathbf{y}))\,d\mathbf{y}-\right. \tag{2.5}$$

$$\left.-\int\limits_{P_1}(a_{pqkl}(\mathbf{y})+\delta b_{pqkl}(\mathbf{y}))(N_{p,q}^{0ij}+\delta N_{p,q}^{1ij}+\ldots)(N_{k,l}^{0\alpha\beta}+\delta N_{k,l}^{1\alpha\beta}+\ldots)\,d\mathbf{y}\right\}=$$

$$=a_{ij\check{k}l}-\delta(\mathrm{mes}\,P_1)^{-1}\int\limits_{P_1}(b_{pqkl}(\mathbf{y})N_{p,q}^{0ij}N_{k,l}^{0\alpha\beta}+$$

$$+a_{pqkl}(\mathbf{y})N_{p,q}^{0ij}N_{k,l}^{1\alpha\beta}+a_{pqkl}(\mathbf{y})N_{k,l}^{1ij}N_{p,q}^{0\alpha\beta})\,d\mathbf{y}$$

где $\{\check{a}_{ijkl}\}$ — усредненные упругие постоянные ненапряженного композита (определяемые из (2.1), (2.2) при $\delta=0$). Формула (2.5) допускает дальнейшие преобразования, позволяющие исключить из нее функции $\{\mathbf{N}^{1mn}\}$. Положим в (2.4) $\varphi=\mathbf{N}^{0ij}$. Получим

$$\int\limits_{P_1}(a_{pqkl}N_{k,l}^{1\alpha\beta}N_{p,q}^{0ij}+b_{pqkl}N_{k,l}^{0\alpha\beta}N_{p,q}^{0ij}+b_{pq\alpha\beta}N_{p,q}^{0ij})\,d\mathbf{y}=0$$

Откуда

$$\int\limits_{P_1}a_{pqkl}N_{k,l}^{1\alpha\beta}N_{p,q}^{0ij}\,d\mathbf{y}=-\int\limits_{P_1}(b_{pqkl}N_{k,l}^{0\alpha\beta}N_{p,q}^{0ij}+b_{pq\alpha\beta}N_{p,q}^{0ij})\,d\mathbf{y} \tag{2.6}$$

$$\int\limits_{P_1}a_{pqkl}N_{k,l}^{0\alpha\beta}N_{p,q}^{1ij}\,d\mathbf{y}=-\int\limits_{P_1}(b_{pqkl}N_{k,l}^{0\alpha\beta}N_{p,q}^{0ij}+b_{klij}N_{k,l}^{0\alpha\beta})\,d\mathbf{y}$$

Подстановка (2.6) в (2.5) приводит к формуле

$$A_{ij\check{\alpha}\beta}=a_{ij\check{\alpha}\beta}-\delta(\mathrm{mes}\,P_1)^{-1}\int\limits_{P_1}(b_{pqkl}N_{p,q}^{0ij}N_{k,l}^{0\alpha\beta}-b_{pqkl}N_{k,l}^{0\alpha\beta}N_{p,q}^{0ij}-$$

$$-b_{pq\alpha\beta}N_{p,q}^{0ij}-b_{pqkl}N_{k,l}^{0\alpha\beta}N_{p,q}^{0ij}-b_{klij}N_{k,l}^{0\alpha\beta})\,d\mathbf{y}=$$

$$=a_{ij\check{\alpha}\beta}+\delta(\mathrm{mes}\,P_1)^{-1}\int\limits_{P_1}(b_{pqkl}N_{k,l}^{0\alpha\beta}N_{p,q}^{0ij}+b_{pq\alpha\beta}N_{p,q}^{0ij}+b_{klij}N_{k,l}^{0\alpha\beta})\,d\mathbf{y}$$

Откуда с учетом $b_{ijkl}(\mathbf{y})=\delta_{ik}\sigma_{jl}{}^0(\mathbf{y})$ получаем окончательную формулу

$$A_{ij\check{\alpha}\beta}=a_{ij\check{\alpha}\beta}+\delta(\mathrm{mes}\,P_1)^{-1}\int\limits_{P_1}(\sigma_{ql}{}^0N_{p,l}^{0\alpha\beta}N_{p,q}^{0ij}+\sigma_{q\beta}{}^0N_{\alpha,q}^{0ij}+\sigma_{lj}{}^0N_{i,l}^{0\alpha\beta})\,d\mathbf{y} \tag{2.7}$$

Получение оценок погрешности полученного решения (в частности, обоснование сходимости ряда (2.3)) не представляет труда в связи с положительной определенностью оператора в (2.1) (это следует из работы [8]) и может быть осуществлено стандартными методами. Функции $\{\mathbf{N}^{0\alpha\beta}\}$ вычисляются при решении задачи усреднения для тела без начальных напряжений (т. е. при $\delta=0$). Названная задача является классической [2, 3, 9]. Методы ее решения в настоящее время разрабатываются. В [9, 10] изложены эффективные методы решения ячеечных задач в плоском случае, методы решения в пространственном случае изложены в [9].

3. Случаи, допускающие аналитическое решение. К рассматриваемым случаям могут быть отнесены случай сред слоистого строения [2, 3, 9] и случай каркасных материалов, для которых развит метод получения приближенных решений задачи усреднения [11]. Рассмотрим эти случаи, позволяющие выявить некоторые эффекты, возникающие в композитах и каркасах (последние представляют из себя частный случай композитов [12—14]) за счет приложения к ним предварительной нагрузки (а также за счет разного рода внутренних напряжений, из которых отметим технологические усадочные напряжения).

Слоистые тела. Для тел слоистого строения функции $a_{ijkl}(\mathbf{x}/\varepsilon)$ и $\sigma_{ij}^{0\varepsilon}(\mathbf{x})$ зависят только от одной пространственной переменной. В качестве таковой возьмем x_3 (слои параллельны плоскости Ox_1x_2). Тогда ячеечная задача

$$[A_{ijkl}(\mathbf{y})(N_k^{\alpha\beta}+y_\alpha\delta_{\beta k})_{,l}]_{,j}=0, \quad \mathbf{N}^{\alpha\beta}(\mathbf{y})\in\Pi(P_1)$$

сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функции $\mathbf{N}^{\alpha\beta}(y_3)$. Нетрудно, зная функции $\mathbf{N}^{\alpha\beta}(y_3)$, выразить локальные напряжения $\{\sigma_{ij}^{0\varepsilon}(x_3)\}$ в композите через усредненные напряжения $\{\sigma_{ij}\}$ (далее через $\{\sigma_{ij}\}$ обозначаются усредненные начальные напряжения в теле, равные среднему от локальных напряжений $\{\sigma_{ij}^{0\varepsilon}\}$). Имеет место равенство (см. например [9]):

$$\sigma_{33}^{0\varepsilon}=\sigma_{33}, \tag{3.1}$$

$$\sigma_{ij}^{0\varepsilon}=\sigma_{ij}E\nu[(1+\nu)(1-2\nu)]^{-1}/\langle E\nu[(1+\nu)(1-2\nu)]^{-1}\rangle, \quad (i,j)=(1,1),\ (2,2)$$

$$\sigma_{ij}^{0\varepsilon}=\sigma_{ij}E(1+\nu)^{-1}/\langle E(1+\nu)^{-1}\rangle, \quad (i,j)=(1,2),\ (2,1)$$

$$\sigma_{ij}^{0\varepsilon}=\sigma_{ij}, \quad (i,j)=(1,3),\ (3,1),\ (2,3),\ (3,2)$$

где $E=E(x_3/\varepsilon)$, $\nu=\nu(x_3/\varepsilon)$. При $\nu=\mathrm{const}$ (коэффициенты Пуассона слоев совпадают) формулы (3.1) еще более упрощаются. Выпишем для случая $\nu=\mathrm{const}$ коэффициенты $A_{ijkl}(x_3/\varepsilon)=a_{ijkl}(x_3/\varepsilon)+\delta_{ik}\sigma_{jl}^{0\varepsilon}(x_3)$ (в приводимых ниже формулах (3.2), (3.3) суммирование по повторяющимся индексам не производится):

$$A_{1111}=E(1-\nu)[(1+\nu)(1-2\nu)]^{-1}+E\langle E\rangle^{-1}\sigma_{ii} \quad (i=1,\ 2) \tag{3.2}$$

$$A_{3333}=E(1-\nu)[(1+\nu)(1-2\nu)]^{-1}+\sigma_{33}$$

$$A_{iijj}=E\nu[(1+\nu)(1-2\nu)]^{-1} \quad (i\neq j)$$

$$A_{1212}=E(1+\nu)^{-1}+E\langle E\rangle^{-1}\sigma_{22}, \quad A_{2121}=E(1+\nu)^{-1}+E\langle E\rangle^{-1}\sigma_{11}$$

$$A_{1313}=E(1+\nu)^{-1}+\sigma_{33}, \quad A_{3131}=E(1+\nu)^{-1}+E\langle E\rangle^{-1}\sigma_{22},$$

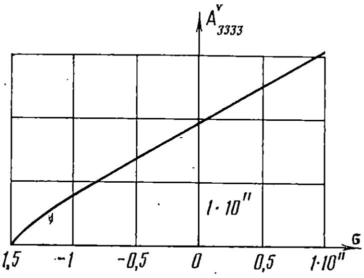
$$A_{2323}=E(1+\nu)^{-1}+\sigma_{33}, \quad A_{3232}=E(1+\nu)^{-1}+E\langle E\rangle^{-1}\sigma_{22}$$

здесь $E=E(x_3/\varepsilon)$, треугольными скобками обозначаются осредненные по ячейке периодичности [2, 3].

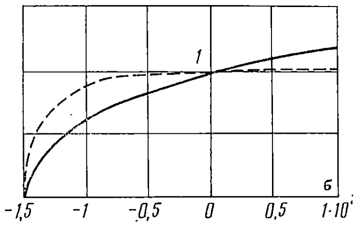
Замечание 2. Из формул (3.2) видно, что величины $\{A_{ijkl}(\mathbf{x}/\varepsilon)\}$ не обладают в общем случае симметриями, характерными для упругих постоянных ненапряженных тел. Легко проверить, что вместе с тем оператор с коэффициентами $A_{ijkl}(\mathbf{x}/\varepsilon)=a_{ijkl}(\mathbf{x}/\varepsilon)+\delta_{ik}\sigma_{jl}^{0\varepsilon}(\mathbf{x})$ является симметричным на $\{H_0^1(Q)\}^3$.

Подсчитаем коэффициенты $\{\check{A}_{ijkl}\}$ усредненного оператора с коэффициентами (3.2). Ячеечная задача в этом случае также сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Не приводя ее решение (оно подобно проведенному в [9]) дадим только окончательный результат:

$$\check{A}_{3333}=[(1+\nu)(1-2\nu)]^{-1}\langle(E(1-\nu)+\sigma_{33}(1+\nu)(1-2\nu))^{-1}\rangle^{-1} \tag{3.3}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

$$\check{A}_{iiii}=\langle E\rangle(1-\nu)\left[(1+\nu)(1-2\nu)\right]^{-1}+\sigma_{ii}\qquad(i=1,2)$$

$$\check{A}_{1313}=(1+\nu)^{-1}\langle(E+\sigma_{33}(1+\nu))^{-1}\rangle^{-1},\qquad \check{A}_{3131}=(1+\nu)^{-1}\langle(E+\sigma_{33}(1+\nu))^{-1}\rangle^{-1}$$

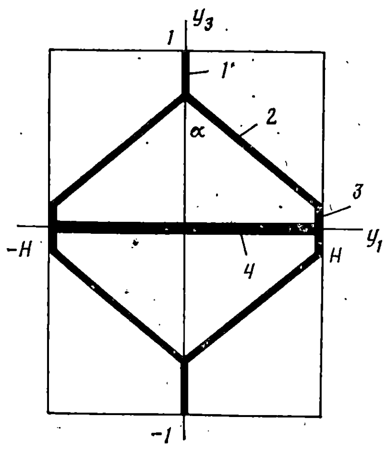
$$\check{A}_{2323}=(1+\nu)^{-1}\langle(E+\sigma_{33}(1+\nu))^{-1}\rangle^{-1},\qquad \check{A}_{3232}=(1+\nu)^{-1}\langle(E+\sigma_{22}(1+\nu))^{-1}\rangle^{-1}$$

$$\check{A}_{1212}=\langle E\rangle(1+\nu)^{-1}+\sigma_{22},\qquad \check{A}_{2121}=\langle E\rangle(1+\nu)+\sigma_{11}$$

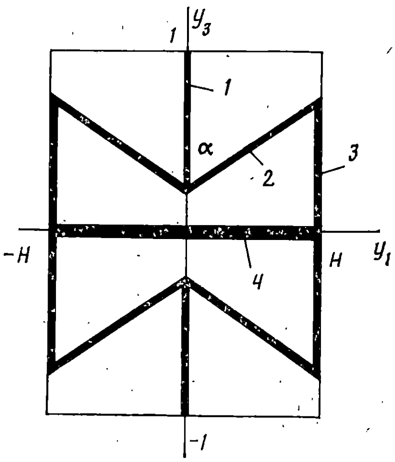
Замечание 3. Из формул (3.3) видно, что в общем случае $\check{A}_{ijkl}\neq\neq\check{a}_{ijkl}+\delta_{ik}\sigma_{jl}$. Зависимость коэффициента $\check{A}_{3333}$ от усредненного предварительного напряжения σ_{33} представлена на фиг. 1 (для двухкомпонентного композита со слоями равной толщины и $E_1=2\cdot10^{11}$ Па, $E_2=1\cdot10^{11}$ Па, $\nu_1=\nu_2={}^1/_3$, $\rho_1=5\cdot10^3$ кг/м^3, $\rho_2=3\cdot10^3$ кг/м^3 при $\sigma_{33}>-E_2/(1+\nu)$). Таким образом при расчете усредненных характеристик напряженных композитов в качестве исходной модели должна браться общая модель неоднородного тела и к ней применяться методы усреднения [2, 3]. Попытка применить методы расчета напряженных тел [1] к телу с усредненными характеристиками (усредненными жесткостями $\{\check{a}_{ijkl}\}$ и усредненными предварительными напряжениями $\{\sigma_{ij}\}$) приведет в силу сказанного выше к ошибочному результату. Для тел с медленно осциллирующими (не зависящими от x/ε) характеристиками равенство $\check{A}_{ijkl}=\check{a}_{ijkl}+\delta_{ik}\sigma_{jl}$ имеет место (см. также [15]).

Замечание 4. Одной из практически важных характеристик упругих сред является скорость распространения в них упругих колебаний. В рассмотренной нами слоистой среде скорость распространения продольных волн в направлении оси Ox_3 (т. е. поперек слоев) при отсутствии начальных напряжений равна $c=(\check{a}_{3333}/\langle\rho^\varepsilon\rangle)^{1/2}$. Формула справедлива для волн длина λ которых много больше характерного размера неоднородностей: $\lambda\gg\varepsilon$. При приложении усредненного напряжения σ_{33} скорость распространения волн указанного типа равна $c(\sigma)=(\check{A}_{3333}/\langle\rho^\varepsilon\rangle)^{1/2}$, где $\check{A}_{3333}$ дается (3.3). При этом следует наложить условие $\sigma_{33}>-E_{\min}(1-\nu)/[(1+\nu)(1-2\nu)]$, где $E_{\min}$ — минимум модулей Юнга компонентов композита. Как видно при $\sigma_{33}>0$ (растягивающее напряжение) скорость возрастает, при $\sigma_{33}<0$ (сжимающее напряжение) — убывает. Качественно такая же картина имеет место и в однородных телах. На фиг. 2 приведен график функции $c(\sigma)/c$ (сплошная линия) в зависимости от σ_{33} (для композита, описанного в замечании 3). Представлен также график функции $c(\sigma)[(\check{a}_{3333}+\sigma_{33})/\langle\rho^\varepsilon\rangle]^{-1/2}$ (штриховая линия). Снова видим, что расчет характеристик напряженных композитов следует проводить методом гомогенизации.

Каркасные конструкции. Под каркасными понимаются материалы и конструкции, ячейка периодичности P_1 которых представляет из себя балочную, оболочечную и т. п. конструкцию (см. [2, 11]). Для расчета усредненных характеристик таких конструкций (в частности, для реше-



Фиг. 3



Фиг. 4

ния возникающих ячеечных задач) применяются приближенные методы теории балок, пластинок и оболочек (см. [11]).

Для анализа эффектов, которые могут возникать в напряженных каркасах, мы рассмотрим два вида плоских балочных каркасов, ячейки периодичности которых изображены на фиг. 3, 4. При приложении сжимающих усредненных осевых усилий (оси показаны на рисунках) в первом каркасе возникают сжимающие напряжения, во втором — также и растягивающие (в элементе вида 2, нумерация элементов указана на рисунках). Пусть усредненные напряжения имеют вид: $\sigma_{33}<0$, $\sigma_{ij}=0$ при $(i, j)\neq(3,3)$. Подсчитаем $\check{A}_{3333}$ для этого случая (все остальные $\check{A}_{ijkl}$ можно подсчитать аналогично). Сначала следует определить локальные напряжения $\{\sigma_{ij}^{\circ\varepsilon}\}$, возникающие при приложении к телу усредненного напряжения σ_{33}. Ячеечная задача для элементов, изображенных на фиг. 3, 4, представляет из себя задачу о равновесии этих элементов при нулевых массовых силах при условии периодичности величин $\mathbf{U}-y_3\mathbf{e}_3$ ($\mathbf{U}$ — перемещения) и соответствующих перемещениям $\mathbf{U}$ напряжений (см. [11]). Для элементов ячеек фиг. 3, 4 решения ячеечных задач во всех балках имеют составляющую вида «растяжение-сжатие». В этой связи при решении пренебрежем изгибными напряжениями в балках (малыми по сравнению с напряжениями растяжения-сжатия для тонких балок). Будем считать (для упрощения выкладок), что модули Юнга элементов типа 3, 4 (см. фиг. 3, 4) $E_3{\sim}E_4\gg E_1{\sim}E_2$. Тогда с точностью $E_1/E_3\ll1$ осевые напряжения в элементах ячеечной конструкции (в балках 1—4) при усредненном напряжении σ_{33} есть ($\sigma_4^{\circ\varepsilon}$ не влияет на $\check{A}_{3333}$ в связи с чем не вычисляется):

$$\sigma_1^{\circ\varepsilon}=-H|\sigma_{33}|/S_1|\sigma_{33}|/H \tag{3.4}$$

$$\sigma_2^{\circ\varepsilon}=\mp S_1(2S_2\cos\alpha)^{-1}|\sigma_1^{\circ\varepsilon}|,\qquad \sigma_3^{\circ\varepsilon}=\sigma_1^{\circ\varepsilon}$$

где S_i — ширина i-й балки, H — ширина ячейки периодичности, угол α указан на фиг. 3, 4. В формуле (3.4) знак «минус» соответствует фиг. 3, а «плюс» — фиг. 4. Напряжения в направлениях нормальным осям балок — нуль. Теперь вычислим $\check{A}_{3333}$. Для этого следует провести решение ячеечной задачи для конструкций, изображенных на фиг. 3, 4, сделав замену модулей Юнга E_i на величины $E_i+\sigma_i^{\circ\varepsilon}$, где осевые напряжения в балках $\sigma_i^{\circ\varepsilon}$ ($i=1, 2, 3$) даются (3.4). В результате ($\check{A}_{3333}$ равен в рассматриваемом случае напряжению $\sigma_1^{\circ\varepsilon}$ в балке 1, умноженному на S_1/H [14]) получаем (минус — фиг. 3, плюс — фиг. 4):

$$\check{A}_{3333}=2H^{-1}\left\{l_2\left[S_2^2\cos^2\alpha\left(\frac{E_2}{1-\nu^2}\mp\frac{S_1|\sigma_1^{\circ\varepsilon}|}{2S_2\cos\alpha}\right)\right]^{-1}+\right. \tag{3.5}$$

$$+l_1\left[S_1^2\left(\frac{E_1}{1-\nu^2}-|\sigma_1^{0\varepsilon}|\right)\right]^{-1}\Bigg\}^{-1}$$

где l_i — длина i-й балки (напомним, что ячейка периодичности имеет размер $H\times 2$). Подставив $|\sigma_1^{0\varepsilon}|=|\sigma_{33}|H/S_1$ из (3.4), имеем

$$\check{A}_{3333}=2H^{-1}\left\{l_2\left[S_2^2\cos^2\alpha\left(\frac{E_2}{1-\nu^2}\mp\frac{|\sigma_{33}|H}{2S_2^2\cos\alpha}\right)\right]^{-1}+\right.$$
$$\left.+l_1\left[S_1^2\left(\frac{E_1}{1-\nu^2}-\frac{|\sigma_{33}|H}{S_1}\right)\right]^{-1}\right\}^{-1} \qquad (3.6)$$

Полученная формула справедлива для любых σ_{33}, при которых положительны выражения в скобках в (3.6). Варьируя параметры в форме (3.6), можно заметить, что коэффициент $\check{A}_{3333}$, даваемый (3.6), может принимать значения как большие так и меньшие $\check{a}_{3333}$. Чтобы проиллюстрировать это утверждение по возможности наглядно, рассмотрим формулу (3.6) в случае малых предварительных напряжений: $\sigma_{33}\ll 1$. В этом случае, выделяя в знаменателе линейную по σ_{33} часть, получим (минус — фиг. 4, плюс — фиг. 3):

$$\check{A}_{3333}=2H^{-1}\Big\{l_2(1-\nu^2)\,(E_2S_2^2\cos^2\alpha)^{-1}+$$
$$+|\sigma_{33}|H[\pm l_2(1-\nu^2)^2(2S_2^3E_2\cos^2\alpha)^{-1}+l_1(1-\nu^2)^2(S_1^3E_1^2)^{-1}]\Big\}^{-1} \qquad (3.7)$$

Как видно, множитель при $|\sigma_{33}|$ для ячеечной конструкции фиг. 3 положителен, вследствии чего $\check{A}_{3333}<\check{a}_{3333}$, где $\check{a}_{3333}$ — усредненная жесткость ненапряженного каркаса (дается формулой (3.7) при $\sigma_{33}=0$). Для ячеечной конструкции, изображенной на фиг. 4, множитель при $|\sigma_{33}|H$ в (3.7) имеет вид $-l_2(1-\nu^2)^2(2S_2^3E_2\cos^2\alpha)^{-1}+l_1(1-\nu^2)^2(S_1^3E_1^2)^{-1}$ и может быть, очевидно, сделан отрицательным за счет подходящего выбора модулей Юнга E_1, E_2 или геометрических характеристик балок l_1, l_2, S_1, S_2 (например, за счет малости E_2 по сравнению с E_1). Таким образом, в рассматриваемом случае можно добиться выполнения неравенства $\check{A}_{3333}>\check{a}_{3333}$.

Выше уже отмечалось влияние предварительного напряжения σ_{33} на скорость распространения продольных волн $c(\sigma)=(\check{A}_{3333}/\langle\rho^\varepsilon\rangle)^{1/2}$. Однако, в рассматривавшемся ранее случае $c(\sigma)<c$ при $\sigma_{33}<0$ (сжимающие напряжения в случае слоистого композита приводили к убыванию скорости волн — как в однородной среде, зависимость $c(\sigma)$ от σ_{33} в композите была, правда, иной нежели в однородной среде). В случае каркасов, как видно из приведенного примера, сжимающее усредненное напряжение может приводить как к возрастанию, так и к уменьшению скорости распространения упругих волн. Как видно из примера, этот эффект связан с геометрией ячейки периодичности. Указанный эффект объясняет одну из возможных причин несовпадения упругих характеристик пористых сред, измеренных методами сейсморазведки и на натурных образцах (кернах породы).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир. 1987. 542 с.
2. *Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука. 1984. 352 с.
3. *Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G.* Asymptotic analysis for periodic structures. Amsterdam: North-Holl. Publ. Comp., 1978. 700 p.
4. *Colombini F., Spagnolo S.* On the convergence of solutions of hyperbolic equations // Comm. Partial Different. Equat. 1978. V. 3. № 1. P. 77–103.
5. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир. 1984. 472 с.
6. *Колпаков А. Г.* Осреднение некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Мат. сб. 1982. Т. 119. № 4. С. 534–547.

7. *Marcellini P.* Su una convergenza di funzioni convesse // Boll. Unione Mat. Ital. 1973. V. 8. № 1. P. 137–158.
8. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., Ха Тьен Нгоан.* Усреднение и G – сходимость дифференциальных операторов // Успехи мат. наук. 1979. Т. 34. № 5. С. 65–133.
9. *Победря Б. Е.* Механика композиционных материалов. М.: изд-во МГУ, 1984. 336 с.
10. *Ван Фо Фы Г. А.* Теория армированных материалов с покрытиями. Киев: Наук. думка, 1971. 232 с.
11. *Колпаков А. Г.* К определению усредненных характеристик упругих каркасов // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 6. С. 969–977.
12. *Берлянд Л. В.* О колебаниях упругого тела с большим числом мелких пустот // Докл. АН УССР. Сер. А. 1983. № 2. С. 3–5.
13. *Каламкаров А. Л.* К определению эффективных характеристик сетчатых оболочек и пластинок периодической структуры // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 2. С. 181–185.
14. *Колпаков А. Г.* Усредненные характеристики термоупругих каркасов // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 6. С. 53–61.
15. *Колпаков А. Г.* Усреднение в задаче изгиба и колебаний напряженных неоднородных пластинок // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 1. С. 60–67.

Новосибирск

Поступила в редакцию
25.IV.1988