МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1989

УДК 539.3

С. Б. ВИГДЕРГАУЗ

РЕГУЛЯРНЫЕ СТРУКТУРЫ С ЭКСТРЕМАЛЬНЫМИ УПРУГИМИ СВОЙСТВАМИ

Для произвольного двухфазного композита периодического строения в [1] даны оценки его потенциальной энергии, отвечающие средам экстремальной жесткости, и показано, что они достигаются на структурах специального вида — матричных слоистых композитах, если одна из фаз является абсолютной жесткой или отсутствует (пористый материал).

В публикуемой работе установлено, что это решение задачи оптимизации не единственно: такой же энергией обладают и композиты более простого строения — с включениями второй фазы в виде зерен конечного размера, расположенных в ортогональной решетке. Форма их поверхности определяется требованием равнопрочности [2]. Обсуждается связь с рассмотренным ранее [3] плоским вариантом задачи.

1. Пусть трехмерная бесконечная среда образована периодическим повторением элементарной ячейки — прямоугольного параллелепипеда A со сторонами ω_i, направленными вдоль осей X_i ($i=1, 2, 3$) декартовой системы координат $\{x_i\}=x$; S_i — грань A, перпендикулярная соответствующей оси, $\partial A=\cup S_i$ — поверхность параллелепипеда, $V=\omega_1\omega_2\omega_3$ — объем, k, μ — модули объемного сжатия и сдвига материала, заполняющего всю ячейку, за исключением замкнутой полости объема v с гладкой границей ∂B: $\partial B\cap\partial A=\varnothing$. Для произвольной функции $f(x)$, заданной в пространстве, обозначим также $\Delta_i f(x)=f(x+\omega_i)-f(x)$.

Далее индексы могут ставиться внизу или вверху соответствующих величин. Считается, что они пробегают значения 1, 2, 3. По повторяющимся верхним и нижним индексам подразумевается суммирование.

Напряженно-деформированное состояние среды описывается тензорами напряжений $\sigma=\{\sigma_{ij}(x)\}$ и деформаций $\varepsilon=\{\varepsilon_{ij}(x)\}$, а также вектором смещений $\mathbf{u}=\{u_i(x)\}$. В постановке задачи предполагаются известными средние усилия, действующие на сторонах ячейки

$$P_{ij}=\int_{S_i}\sigma_{ij}(x)\,dS_i \tag{1.1}$$

Без умаления общности положим, что $P_{ij}=0$ ($i\neq j$), а поверхность полости ∂B нагружена нормальным давлением постоянной интенсивности p. Пусть также для определенности $P_{11}\geqslant P_{22}\geqslant P_{33}\geqslant 0$ и соблюдается следующее неравенство, смысл которого выяснится позже:

$$P_{22}+P_{33}\geqslant P_{11}\geqslant P_{22}-P_{33} \tag{1.2}$$

Как функции координат σ и ε периодичны, а $\mathbf{u}$ — квазипериодична. С учетом этого удельная (на единицу объема) потенциальная энергия деформации ячейки в поле (1.1) есть

$$U=\frac{1}{2V}\int_A P_{ij}\varepsilon^{ij}\,dA=\frac{1}{2}\,\omega_i^{-1}P^{ii}\Delta_i(u_i) \tag{1.3}$$

Полученная в [1] нижняя оценка энергии пористого композита произвольной регулярной структуры при условии (1.2) имеет вид квадратичной формы от P_{ii} (c — концентрация пор в ячейке)

$$U \geqslant U_1 = (4\mu)^{-1} P_{ii} P^{ii} + [4\mu - 6k + (3k+4\mu)c/(1-c)] P_0^2 / 72k\mu \qquad (1.4)$$

$$P_0 = P_i^i, \quad p = 0$$

Правая часть в (1.4) отвечает композиту максимальной жесткости, в котором возникают минимальные деформации при заданных напряжениях [1].

Для рассматриваемой здесь среды $c=v/V$, а множество ее структур исчерпывается, при фиксированных остальных параметрах, совокупностью различных форм границы ∂B, симметричных относительно осей X_i, и являющихся, таким образом, функцией управления в задаче минимизации интегрального критерия U.

Докажем прямым вычислением, что $U=U_1$, если ∂B обладает особым свойством — равнопрочностью, которое для непериодического случая конечного числа полостей в упругом пространстве A, нагруженном на бесконечности усилиями P_{ii}, изучено в [2]. Сохраняя и другие основные обозначения настоящей статьи, имеем на таких поверхностях по определению

$$\sigma_{\lambda\lambda} = \sigma_{\rho\rho} = \mathrm{const} = {}^1/_2 (P_0 + p), \quad \sigma_{\lambda\rho} = 0 \qquad (1.5)$$

Здесь тензор σ представлен в местной ортогональной системе координат (λ, ρ, ν) с ортами вдоль нормали ν к ∂B и линии кривизны на ней. Напомним, что по условиям нагружения

$$\sigma_{\nu\nu} = -p, \ \sigma_{\nu\lambda} = \nu_{\nu\rho} = 0 \qquad (1.6)$$

Из (1.5)—(1.6) в частности следует:

1. Всюду в A выполняется тождество $I_1=P_0$, а на ∂B величина $\max\{F(x)=2I_1^2+3I_2\colon\ x \in A \cup \partial B\}$ достигает своего абсолютного минимума

$$F(x) = \mathrm{const} = {}^1/_2 (P_0 + 3p)^2 \quad (x \in \partial B) \qquad (1.7)$$

где I_1, I_2 — инварианты σ, $F(x)$ — локальный критерий Мизеса [4]. Правая часть в (1.7) представляет собой оценку F снизу, не зависящую от формы границы. Она получается из записи $F(x)$ на ∂B в системе (λ, ρ, ν) с учетом (1.6):

$$F = (\sigma_{\lambda\lambda} - \sigma_{\nu\nu})^2 + (\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\nu\nu})^2 + (\sigma_{\lambda\lambda} - \sigma_{\rho\rho})^2 + 3\sigma_{\lambda\nu}^2$$

отбрасыванием двух последних слагаемых и применением к величинам $\sigma_{\lambda\lambda}$, $\sigma_{\rho\rho}$ неравенства между средним арифметическим и геометрическим.

2. Вектор $\mathbf{u}(x)$ становится гармоническим. При условии (1.2) он может быть записан через объемный потенциал $\varphi(x)$ притягивающих масс постоянной плотности

$$2\mu u_i(x) = (P_{ii} - {}^1/_9 k^{-1} (3k - 2\mu) P_0) x_i - \partial\varphi(x)/\partial x_i \qquad (1.8)$$

$$\varphi(x) = \frac{P_0 + 3p}{8\pi} \int\limits_B \frac{dy}{|x-y|} \qquad (x \in A \cup \partial B, \ y \in B)$$

причем на ∂B функция $\varphi(x)$ удовлетворяет соотношениям (C — постоянная):

$$2\varphi_0(x) = C - (P_0 - 2P^{ii}) x_i x^i \qquad (1.9)$$

$$\partial\varphi_0/\partial\nu = -(P_0 - 2P^{ii}) x_i \partial x_i/\partial\nu \quad (x \in \partial B)$$

Кроме того, по непрерывности $\varphi(x)$ и внутри B является квадратичной формой координат (1.9). Порожденная потенциалом тяготения, она должна быть знакоопределенной [5], что равносильно условию (1.2), которое, таким образом, необходимо для существования равнопрочных поверхностей, допускающих представление $\mathbf{u}(x)$ в виде (1.8). С помощью (1.9) в частных случаях удается найти их очертания [2, 6].

Эти результаты во многом переносятся и на периодический случай, если считать, что форма ∂B позволяет искать $\mathbf{u}(x)$ в записи, подобной (1.8)

$$2\mu u_i(x)=d_{ii}x_i-(4\pi)^{-1}\alpha\partial\psi(x)/\partial x_i \tag{1.10}$$

$$\psi(x)=\int\limits_B\Omega(x-y)\,dy$$

Здесь α и d_{ii} — подлежащие определению постоянные, $\Omega(x)$ — квазипериодический аналог ядра $|x|^{-1}$, такой, что [5]:

$$\Omega(x)=|x|^{-1}+\Omega_0(x) \tag{1.11}$$

$$\nabla^2\Omega(x)=-\delta(x),\quad \nabla^2\equiv\partial^2/\partial x_i\partial x^i$$

$$\Delta_i(\Omega_j)=\gamma_{ij}\omega_i,\ \Omega_j(x)\equiv\partial\Omega(x)/\partial x_j \tag{1.12}$$

где $\Omega_0(x)$ — аналитична в A, $\delta(x)$ — дельта-функция, $\{\gamma_{ij}\}$ — симметричная матрица констант решетки, причем $\gamma_{ii}\leqslant 0$, $\gamma_i^i=-4\pi V^{-1}$. Из (1.12) имеем

$$\Delta_i(u_i)=d_{ii}\omega_i-(8\pi)^{-1}\alpha\gamma_{ii}\omega_i \tag{1.13}$$

Интегрируя соотношения закона Гука

$$\sigma_{ii}(x)=(k-{}^2/_3\mu)\operatorname{div}\mathbf{u}(x)+2\mu\partial u_i(x)/\partial x_i$$

вдоль S_i, получим с учетом (1.10) — (1.13):

$$2\mu d_{ii}+(k-{}^2/_3\mu)d_i^i-\alpha\mu v(1+\gamma_{ii}/4\pi)=P_{ii} \tag{1.14}$$

Условие $P_{ij}=0$ $(i\neq j)$ представлением (1.10) удовлетворяется автоматически. Как и в [2] из (1.6) следует, что $2\mu\alpha=3kd_i^i$ при $p=0$. Это дает возможность найти d_{ii} из системы (1.14):

$$2\mu d_{ii}=P_{ii}-{}^1/_3k^{-1}(k-{}^2/_3\mu)(1-c)^{-1}P_0-$$
$$-{}^1/_2v(1+\gamma_{ii}/4\pi)(1-c)^{-1}P_0,\ \alpha=[2\mu(1-c)]^{-1}P_0$$

Подстановка полученных выражений в (1.3) через (1.13) дает в (1.4) знак равенства.

Поскольку дифференциальные свойства функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ вблизи границы ∂B одинаковы в силу представлений (1.11), то дословным повторением доказательства из [2] строится обобщение достижимых нижних оценок (1.5), (1.7) и тождеств (1.9) на периодический случай:

$$\sigma_{\lambda\lambda}=\sigma_{\rho\rho}=[2(1-c)]^{-1}P_0,\ \sigma_{\lambda\rho}=0,\ F={}^1/_2(1-s)^{-2}P_0^2$$

$$2\psi(y)=C-{}^1/_2(1-c)^{-1}[(1-\gamma_{ii}/4\pi)cP_0-P_0+(1-c)P_0]y_i \tag{1.15}$$

Знакоопределенность этой квадратичной формы также накладывает на допустимую область изменения параметров задачи ограничения, совпадающие с (1.2). Действительно, из неотрицательности коэффициентов (1.15) при $0\leqslant c\leqslant 1$ следует система неравенств: $2P_{ii}\leqslant P_0$; $2P_{ii}-P_0\leqslant 2P_{ii}-(1+\gamma_{ii}/4\pi)P_0$ равносильная (1.2), если P_{ii} как оговаривалось, упорядочены по убыванию и ограничены снизу нулем.

2. Аналогично рассматривается композит с абсолютно жесткими включениями в поле средних деформаций E_{ii}, когда U представляется квадратичной формой от E_{ii}, а не P_{ii}

$$U=\frac{1}{2V}\int\limits_A E_{ii}\sigma^{ii}\,dA={}^1/_2[2\mu E^{ii}\Delta_i(u_i)/\omega_i+(3k-2\mu)E_0\,\Delta_i(u_i)/\omega^i],\quad E_0=E_i^i \tag{2.1}$$

По-прежнему, разыскивая вектор в форме (1.10), проинтегрируем тождества $\varepsilon_{ii}(x)=\partial u_i(x)/\partial x_i$ вдоль S_i:

$$E_{ii}=d_{ii}-{}^1/_2\alpha v[V^{-1}+\gamma_{ii}/4\pi]$$

По условию $\mathbf{u}(x)=0$ на границе включений, поэтому

$$(4\pi)^{-1}\alpha\operatorname{grad}\psi(x)=\{d_{ii}x_i\}\quad(x\in\partial B) \tag{2.2}$$

Так как первые производные $\psi(x)$ непрерывны всюду и гармоничны в областях B и A [5], а функции x_i являются, очевидно, граничными значениями гармонических полиномов, то предыдущее тождество справедливо и внутри B. В силу уравнения $\nabla^2\psi(y)=-4\pi$ $(y\in B)$ [5] имеем $\alpha=d_i^i$, откуда следует, что

$$d_{ii}=E_{ii}-{}^1/_2E_\upsilon(1-c)^{-1}(V^{-1}-\gamma_{ii}/4\pi),\ \alpha=E_0/(1-c) \tag{2.3}$$

Структура вектора $\mathbf{u}(x)$ для обоих типов включений оказалась одинаковой, поэтому и в данном случае поверхность раздела фаз будет равнопрочной, однако давление p на ней уже не равно нулю. Определяя реакцию жесткого ядра на деформацию матрицы, оно находится из силового условия на границе ∂B, с учетом представления (1.10) принимающего вид

$$p\partial x_i/\partial\nu=(k-{}^2/_3\mu)d_i^i\partial x_i/\partial\nu+2\mu\partial u_i/\partial\nu \tag{2.4}$$

а также из формул Вейнгартена для скачка на ней вторых производных $\psi(x)$ [5]:

$$\left[\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x_i\,\partial x_j}\right]_{\partial B}=-\alpha\frac{\partial x_i}{\partial\nu}\frac{\partial x_j}{\partial\nu} \tag{2.5}$$

Из (2.5) и (2.2) вытекает, что

$$\partial u_i/\partial\nu=d_{ii}\partial x_i/\partial\nu-\alpha\partial x_i/\partial\nu-d_{ii}\partial x_i/\partial\nu=-\alpha\partial x_i/\partial\nu$$

и (2.4) тождественно удовлетворяется при всех i, если $\sigma_{\nu\nu}=-p={}^1/_3(3k-4\mu)(1-c)^{-1}E_0$, $\sigma_{\lambda\nu}=\sigma_{\rho\nu}=0$.

Вследствие этого имеем по соотношению (1.5): $\sigma_{\lambda\lambda}=\sigma_{\rho\rho}={}^1/_2E_0(1-c)^{-1}$, $\sigma_{\lambda\rho}=0$. Наконец, подстановка (2.3) в (1.13) и затем в (1.15) дает

$$2U=2\mu E_iE^i+[3k-2\mu+(3k+4\mu)c(1-c)^{-1}]E_0^2/3 \tag{2.6}$$

что также совпадает с соответствующей нижней оценкой энергии из [1] при соблюдении неравенства (1.2) для величин E_{ii}. Следует отметить независимость обеих оценок от периодов решетки ω_i.

Величины средних напряжений и деформаций для каждой микроструктуры линейно связаны через постоянные коэффициенты D_{ij}, входящие в ее эффективный тензор жесткости четвертого ранга [7]. В силу линейной упругости фаз D_{ij} разбиваются в сумму D_{ij}° и D_{ij}', где первое слагаемое отвечает однородному материалу матрицы: $3D_{ii}^\circ=3k+4\mu$, $3D_{ij}=3k-2\mu$, $i\neq j$, а второе в случае кубической симметрии задачи ($\omega_i=1$ и $P_{ii}=1$ или $E_{ii}=1$) находится явно. Действительно, из правил преобразования D при повороте [8] следует, что все D_{ij}' равны между собой. Они определяются подстановкой выражения для энергии в форме $2U=D_{ij}E_{ii}E^{jj}$ или $(D)_{ij}^{-1}P_{ii}P^{jj}$ соответственно в (2.4) или (1.4), откуда следует, что для пористых включений

$$2U=3(D_{12}-D_{11})[2D_{12}^2-D_{11}(D_{11}+D_{22})]^{-1}\qquad(P_{ii}=1)$$

$$D_{ii}=(3k+4\mu)/3-(3k+4\mu)kc[(3k+4\mu)c+4\mu(1-c)]^{-1}$$

$$D_{ij}=D_{ii}-2\mu\quad(i\neq j)$$

и для абсолютно жестких

$$2U=3(D_{11}+2D_{12})\qquad(E_{ii}=1)$$

$$D_{ii}={}^1/_3(3k+4\mu)(1+c/(1-c)),\ D_{ij}=D_{ii}-2\mu\ (i\neq j)$$

В случае сферической границы ∂B эти же величины при $c\leqslant 0$, разными численными методами получены в [9] и [10] (первая и вторая колонка каждого раздела таблицы; верхняя половина отвечает пористым, нижняя – абсолютно жестким включениям). Оптимальные значения – в третьей колонке. Видно, что шаровые включения даже в заметной концентрации обеспечивают интегральную жесткость, близкую к оптимальной. Более существенно расхождение в эффективных коэффициентах, причем в [10] они найдены с меньшей точностью, так как восстановленные по ним значения энергии пористого композита не удовлетворяет ограничению (1.4).

Отметим, что в [1] изучена вся область изменения параметров $|P_{22}/P_{11}|\leqslant 1$, $|P_{33}/P_{11}|\leqslant 1$, а не только ее часть, определяемая неравенством (1.2). При этом отмечено, что для $P_{11}>P_{22}+P_{33}$ структура оптимальных слоистых композитов перестает зависеть от координаты x_1, совпадая с соответствующим решением плоской задачи. Прямые вычисления показывают, что это верно и для рассмотренных здесь зернистых материалов —

c	$D_{11}/2\mu$			$D_{12}/2\mu$			$U/2\mu$		
0,1	1,399	1,404	1,505	0,558	0,561	0,505	1,292	1,282	1,292
0,2	1,131	1,338	1,321	0,413	0,418	0,321	1,661	1,495	1,656
0,3	0,909	0,922	1,176	0,301	0,309	0,176	2,151	2,110	2,125
0,4	0,709	0,740	1,061	0,200	0,227	0,061	2,931	2,722	2,750
0,1	2,124	2,130	1,944	0,854	0,856	0,944	1,179	1,182	1,179
0,2	2,653	2,663	2,188	0,956	0,959	0,188	1,405	1,410	1,404
0,3	3,440	3,410	2,500	1,051	1,060	1,500	1,705	1,702	1,692
0,4	4,796	4,990	2,917	1,132	1,250	1,917	2,172	2,305	2,077

минимальной энергией обладают структуры с включениями в виде прямых цилиндров вдоль оси X_1, поперечное сечение которых представляет собой равнопрочные контуры отверстий в регулярно перфорированной пластине, рассмотренные в [3]. Что же касается локальных условий, то компоненты тензора σ остаются постоянными на границе, но уже не равняются друг другу

$$\sigma_{\lambda\lambda}=P_{11}/(1-c),\quad \sigma_{\rho\rho}=(P_{22}+P_{33})/(1-c)$$

$$\sigma_{\lambda\rho}=0\quad (p=0)$$

(направление λ совпадает с осью X_1), вследствие чего оценка (1.7), а, значит, и доказательство оптимальности по Мизесу теряют силу.

3. Сравнительно с двумерным вариантом усложняется и вопрос фактического отыскания формы равнопрочных полостей в зависимости от заданных силовых и геометрических параметров. Она может быть найдена численным методом, основанным на использовании свойств гармонических периодических функций $\psi_i(x)\equiv\partial\psi(x)/\partial x_i$.

Дифференцирование второго из тождеств (1.10) по x_i и переход в нем от объемного интеграла к поверхностному показывают, что $\psi_i(x)$ всюду представимы потенциалом простого слоя, распределенном на ∂B. Согласно (1.15), его значения внутри B пропорциональны соответствующей координате:

$$\psi_i(y)=\int\limits_{\partial B}\Omega(y-\eta)\frac{\partial\eta_i}{\partial\nu}d\eta\sim y_i\qquad (i=1,2,3)\tag{3.1}$$

$$\eta=(\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3)\in\partial B,\quad y\in B$$

Для дальнейшего введем в B кроме декартовой и сферическую систему координат $(r,\ \xi,\ \theta)$ с полюсом в центре полости.

Из единственности полиномиального представления произвольной функции, гармонической в односвязной области, следует, что соотношение (3.1) справедливо всюду в B, если оно верно на любой достаточно малой сфере Γ радиуса ε, целиком лежащей в B.

Согласно представлению (1.11) интегралы в (3.1) разбиваются в сумму двух слагаемых, одно из которых отвечает внутреннему потенциалу полости B, а другое — совокупному внешнему потенциалу всех остальных полостей в той же точке:

$$\psi_i(y)=V_{0,i}(y)+\sum_m V_{m,i}(y),\qquad m=(m_1,m_2,m_3)$$

здесь целыми числами m_i нумеруется ячейка с центром в точке $y_m=(m_1y_1,\ m_2y_2,\ m_3y_3)$. Функция $V_{0,i}(y)$ разлагается [11] в сходящийся строго внутри B ряд по степеням $|y|$, а $V_{m,i}(y)$ — по обратным степеням $|y-y_m|$. На Γ эти ряды имеют вид

$$V_{0,i}(y)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n\sum_{l=0}^{n}\alpha_{l,i}^{(-n)}Q_{l,i}^{(1)}(y)+\beta_{l,i}^{(-n)}R_{l,i}^{(1)}(y)\tag{3.2}$$

$$V_{m,i}(y)=\sum_{n=3}^{\infty}|y-y_m|^{-n}\sum_{l=0}^{n}\alpha_{l,i}^{(n)}\,Q_{l,i}^{(2)}\,(y)+\beta_{l,i}^{(n)}\,R_{l,i}^{(2)}\,(y)$$

где R, Q — определенные гармонические полиномы конечной степени от y_1, y_2, y_3, а числовые коэффициенты α, β записываются через присоединенные функции Лежандра X_n^l [11]:

$$\alpha_{l,i}^{(n)}=\int_0^{2\pi}d\xi\int_0^{\pi}r^{n+2}X_n^{\,l}(\cos\theta)\,\frac{\partial\eta_i}{\partial\nu}\sin\theta\cos l\xi\,d\theta \tag{3.3}$$

$$\beta_{l,i}^{(n)}=\int_0^{2\pi}d\xi\int_0^{\pi}r^{n+2}X_n^{\,l}\,(\cos\theta)\frac{\partial\eta_i}{\partial\nu}\sin\theta\sin l\xi\,d\theta$$

Они явно зависят от формы поверхности ∂B через входящую в интегралы сферическую координату r точки η.

Задавая параметр ε достаточно малым, можно разложить по его степеням функции $|y-y_m|^{-n}$ в представлении (3.2) для $V_{m,\,i}(y)$, и изменяя порядок суммирования, окончательно представить $\psi_i(y)$ на Γ в виде ряда гармонических полиномов от y_1, y_2, y_3. В силу нечетности $\psi_i(y)$ по y_i и четности по остальным двум координатам, этот ряд будет содержать только полиномы нечетной степени с такими же свойствами. В их коэффициенты линейно входят α, β, а также суммы числовых рядов с общими членами типа $(m_i m^i)^{-n/2}$ (n=5, 7, 9...) и аналогичных. При этом ряды $|y_m|^{-n}$, $n\geqslant 4$ можно, в силу их сходимости, суммировать по m почленно, а ряд $|y_m|^{-3}$ — способом, указанным в [5]. Конкретный вид разложения $\psi_i(y)$ не выписывается в силу своей громоздкости.

Подстановка этого ряда в (3.1) дает после приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях y_i (i=1, 2, 3) в обеих частях тождества систему уравнений относительно величин α и β.

Введя на неизвестной поверхности систему параллелей и меридианов, аппроксимируем ее совокупностью K сферических прямоугольников неизвестного радиуса r_k, k=1, 2, ..., K, постоянного в пределах каждого из них. С помощью (3.3) это дает возможность перейти в полученной системе от α, β к r_k^n ($n=\pm1$, ±2, ...). Через r_k^2 выражается и величина концентрации c.

Сложность построения этой системы искупается простотой ее структуры, дающей возможность применить для решения эффективные градиентные методы. В качестве начального приближения целесообразно взять поверхность трехосного эллипсоида, который при фиксированной нагрузке является одиночной равнопрочной полостью [2].

Численная реализация предложенного способа проводилась для структуры с кубической симметрией, когда можно ограничиться частью ∂B, лежащей в интервале углов $0\leqslant\theta$, $\xi\leqslant\pi/4$. Быстрая сходимость отмечалась вплоть до значения C=0,5. Точность оценивалась по близости результатов при увеличении числа K с 16 до 40 и оказалась в пределах 3–5%.

Качественно результат состоит в том, что с увеличением объема полости ее поверхность уплощается вблизи середин сторон ячейки и растет в направлении ее ребер и вершин.

Автор благодарит Л. В. Гибянского и А. В. Черкаева за полезное обсуждение результатов работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гибянский Л. В., Черкаев А. В.* Микроструктуры упругих композитов экстремальной жесткости и точные оценки запасаемой ими энергии. Л., 1987. 52 с. (Физ.-техн. ин-т АН СССР. Препринт № 1115).
2. *Вигдергауз С. Б.* Обратная задача трехмерной теории упругости // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 2. С. 90–93.
3. *Вигдергауз С. Б.* Эффективные упругие параметры пластины с регулярной системой равнопрочных отверстий // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 2. С. 162–166.
4. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.

5. *Бердичевский В. Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 447 с.
6. *Вигдергауз С. Б.* Оптимальные полости в упругом пространстве с осевой симметрией // Изв. АН АрмССР. Механика. 1984. Т. 37. № 3. С. 51–58.
7. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1950. 300 с.
8. *Бахвалов Н. С.* Осредненные характеристики тел с периодической структурой // Докл. АН СССР. 1974. Т. 218. № 5. С. 1046–1048.
9. *Кущ В. И.* О вычислении эффективных упругих модулей зернистого композитного материала регулярной структуры // Прикл. механика. 1987. Т. 23. № 4. С. 57–61.
10. *Iwakuma T., Nemat-Nasser S.* Composites with periodic microstructure // Computers and Struct. 1983. V. 16. № 1–4. P. 13–19.
11. *Сретенский Л. Н.* Теория ньютоновского потенциала. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. 318 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
9.XII.1987