МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1989

УДК 539.3

Ю. А. АНТИПОВ

# АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ СО СМЕНОЙ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ПО КОЛЬЦУ

Развивается метод [1] построения аналитического решения интегрального уравнения с ядром Вебера – Сонина на кольце, к которому сводятся задачи о кольцевом штампе, кольцевой трещине и другие аналогичные смешанные задачи математической физики. В работах, посвященных указанным задачам, для решения построены либо приближенные формулы [2–5], либо рекуррентные соотношения [6]. В [7] задача сведена к бесконечной алгебраической системе второго рода. В публикуемой работе получено точное решение задачи о вдавливании кольцевого штампа в полупространство силой с эксцентриситетом, а также осесимметричной задачи о кольцевой трещине. В основе метода лежит сведение задач к интегральному уравнению типа свертки Меллина на отрезке $(\lambda, 1)$ $(0<\lambda<1)$, эквивалентному векторной проблеме Римана с треугольным матричным коэффициентом. Известны методики построения точного решения уравнения свертки на отрезке в случае дробнорационального символа ядра уравнения [8] и приближенного решения, когда символ – мероморфная функция [9]. В рассматриваемом случае символ – мероморфная функция специального вида.

**1. Сведение задачи о кольцевом штампе к векторной задаче Римана.** Пусть в упругое однородное полупространство $\{0\leqslant r<\infty,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant z<<\infty\}$ с модулем упругости $E$ и коэффициентом Пуассона $\mu$ вдавливается жесткий кольцевой штамп с плоским основанием $\{a\leqslant r\leqslant b,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\}$ под действием силы $P$ с эксцентриситетом $e$. Требуется найти контактное напряжение $p(r,\theta)$, осадку штампа $\delta_0$ и угол поворота $\delta_1$.

Сформулированная задача эквивалентна [10] двум интегральным уравнениям с ядром Вебера — Сонина

$$\int_a^b W_{\gamma\gamma}(r,\rho)p_\gamma(\rho)\rho\,d\rho=g_\gamma(r)\qquad(a<r<b,\ \gamma=0,1)\tag{1.1}$$

$$g_\gamma(r)=r^\gamma\delta_\gamma(\pi\theta_0)^{-1},\ \theta_0=2(1-\mu^2)(\pi E)^{-1}$$

$$W_{\gamma\gamma}(r,\rho)=\int_0^\infty J_\gamma(rt)J_\gamma(\rho t)\,dt,\qquad p(r,\theta)=p_0(r)+p_1(r)\cos\theta$$

Если ввести новую функцию $\varphi_\gamma(y)=\pi\theta_0\delta_\gamma^{-1}(by)^{1-\gamma}p_\gamma(by)$, то из (1.1) при помощи очевидной замены переменных получаем уравнение свертки Меллина

$$\int_\lambda^1 l_\gamma\left(\frac{x}{y}\right)\varphi_\gamma(y)\frac{dy}{y}=1\qquad(\lambda<x<1),\qquad\lambda=\frac{a}{b}\in(0,1)\tag{1.2}$$

$$l_\gamma(t)=t^{-\gamma}\int_0^\infty J_\gamma(t\xi)J_\gamma(\xi)\,d\xi\tag{1.3}$$

Условия равновесия штампа позволяют выразить осадку $\delta_0$ и угол поворота $\delta_1$ через решение уравнения (1.2):

$$\delta_0=\frac{P\theta_0}{2b}\left[\int\limits_{\lambda}^{1}\varphi_0(x)\,dx\right]^{-1},\qquad \delta_1=\frac{Pe\theta_0}{b^3}\left[\int\limits_{\lambda}^{1}\varphi_1(x)\,x^2\,dx\right]^{-1} \tag{1.4}$$

Введем функции

$$\varphi_*(x)=\begin{cases}\varphi_\gamma(x), & \lambda<x<1,\\ 0, & x\notin[\lambda,1],\end{cases}\qquad f_*(x)=\begin{cases}1, & \lambda<x<1\\ 0, & x\notin[\lambda,1]\end{cases}$$

и доопределим уравнение (1.2) на всю положительную полуось

$$\int\limits_0^\infty l_\gamma\left(\frac{x}{y}\right)\varphi_*(y)\frac{dy}{y}=f_*(x)+\varphi_-(x)+\varphi_+(x)\qquad(0<x<\infty) \tag{1.5}$$

здесь $\varphi_\pm(x)$ — неизвестные функции, причем $\operatorname{supp}\varphi_-(x)\subset[0,\ \lambda]$, $\operatorname{supp}\varphi_+(x)\subset[1,\ \infty)$. Применяя к (1.5) преобразование Меллина, по схеме [1] приходим к краевой задаче Римана для кусочно-аналитического вектора $\Phi(s)=\|\Phi_1(s),\ \Phi_2(s)\|$ с линией скачков $\{\Gamma:\operatorname{Re}(s)=\sigma,\ \gamma/2<\sigma<1+3\gamma/2\}$

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g^-(t)\quad(t\in\Gamma) \tag{1.6}$$

$$G(s)=\begin{Vmatrix}\lambda^{-s} & 0\\ L(s) & -\lambda^s\end{Vmatrix},\qquad g^-(s)=\begin{Vmatrix}0\\ -(1-\lambda^s)s^{-1}\end{Vmatrix}$$

$$L(s)=\int\limits_0^\infty l_\gamma(t)t^{s-1}\,dt=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\gamma+\frac{1}{2}-\frac{s}{2}\right)\times$$

$$\times\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\gamma+1-\frac{s}{2}\right)\right]^{-1}$$

$$\gamma/2<\operatorname{Re}(s)<1+3\gamma/2$$

$$\Phi_1^-(s)=\int\limits_\lambda^1\varphi_*(x)x^{s-1}\,dx,\qquad \Phi_1^+(s)=\int\limits_1^{1/\lambda}\varphi_*(\lambda\tau)\tau^{s-1}\,d\tau$$

$$\Phi_2^-(s)=\int\limits_0^1\varphi_-(\lambda\tau)\tau^{s-1}\,d\tau,\qquad \Phi_2^+(s)=\int\limits_1^\infty\varphi_+(x)x^{s-1}\,dx \tag{1.7}$$

Функции $\Phi_1^\pm(s)$ — целые, а $\Phi_2^\pm(s)$ — аналитические в $D^\pm$: $\operatorname{Re}(s)\gtrless\sigma$, причем $\Phi_1^\pm(s)=O(s^{-1/2})$, $s\to\infty$, $s\in D^\pm$. При стремлении $s$ к бесконечности по любому лучу в $D^\mp$ функции $\Phi_1^\pm(s)$ неограниченно возрастают: $\Phi_1^\pm(s)=O(\lambda^{\mp s}s^{-1/2})$, $s\to\infty$, $s\in D^\mp$. Принимая во внимание ограниченность интеграла с ядром Вебера — Сонина $\int l_\gamma(x/y)\varphi_\gamma(y)y^{-1}dy$, $\lambda\leqslant y\leqslant1$ при $x\to\lambda-0$ и $x\to1+0$, а также (1.7), имеем $\Phi_2^\pm(s)=O(s^{-1})$, $s\to\infty$, $s\in D^\pm$.

Заметим, что индексы диагональных элементов матрицы коэффициента задачи (1.6) — бесконечны, т. е. $\operatorname{ind}\lambda^{\mp t}=\pm\infty$ $(0<\lambda<1)$.

**2. Решение векторной задачи Римана.** Факторизуем сначала символ $L(s)$:

$$L(s)=L^+(s)L^-(s)$$

$$L^+(s)=\frac{1}{2^{1/2}}\frac{\Gamma(\gamma+1/2-s/2)}{\Gamma(\gamma+1-s/2)},\qquad L^-(s)=\frac{1}{2^{1/2}}\frac{\Gamma(s/2)}{\Gamma(1/2+s/2)} \tag{2.1}$$

и приведем с помощью очевидных преобразований краевое условие (1.6) к виду

$$\frac{\Phi_2^+(t)+t^{-1}}{L^+(t)}-\frac{1}{tL^+(0)}=L^-(t)\Phi_1^-(t)-\frac{\lambda^t}{L^+(t)}\left[\Phi_2^-(t)-\frac{1}{t}\right]-\frac{1}{tL^+(0)}$$

$$\frac{\Phi_2^-(t)-t^{-1}}{L^-(t)}=L^+(t)\Phi_1^+(t)-\frac{\lambda^{-t}}{L^-(t)}\left[\Phi_2^+(t)+\frac{1}{t}\right]\quad (t\in\Gamma)\qquad(2.2)$$

Левая часть первого равенства аналитически продолжима в $D^+$, а правая часть — в $D^-$ за исключением точек $s_m^-=2m+2\gamma$ $(m=\overline{1,\infty})$, в которых имеет простые полюсы. Аналогично и для второго равенства: левая часть аналитически продолжима в $D^-$ а правая — в $D^+$ кроме точек $s_m^+=1-2m$ $(m=\overline{1,\ \infty})$ — простых полюсов. Для того, чтобы нейтрализовать указанные полюсы, введем в рассмотрение функции

$$\Psi^\pm(s)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{B_m^\pm(\lambda)}{s-s_m^\mp},\quad B_m^\pm(\lambda)=\operatorname*{Res}_{s=s_m^\mp}\frac{-\lambda^{\pm s}}{L^\pm(s)}\left[\Phi_2^\mp(s)\mp\frac{1}{s}\right]\qquad(2.3)$$

Отсюда следует, что $|B_m^\pm(\lambda)|\leqslant\lambda^{2m}\,\mathrm{const}$, $m\to\infty$, а тогда ряды в (2.3) сходятся равномерно в областях $D_\varepsilon^\pm=\mathbf{C}\setminus\cup K_m(s_m^\mp,\ \varepsilon)$ $(m=\overline{1,\ \infty})$, где $\mathbf{C}$ — плоскость комплексного переменного, $K_m(s_m^\mp,\ \varepsilon)$ — круг с центром в точке $s=s_m^\mp$ любого сколь угодно малого радиуса $\varepsilon$. Таким образом, функции $\Psi^\pm(s)$ аналитичны в областях $D_\varepsilon^\pm$.

Вычитая теперь из левой и правой части первого из (2.2) равенства $\Psi^+(t)$, а второго равенства — $\Psi^-(t)$, используя принцип непрерывности и теорему Лиувилля, получаем решение задачи (1.6):

$$\begin{aligned}
&\Phi_1^+(s)=(L^+(s))^{-1}\Psi^-(s)+\lambda^{-s}(L^-(s))^{-1}[(sL^+(0))^{-1}+\Psi^+(s)]\quad(s\in D^+)\\
&\Phi_1^-(s)=(L^-(s))^{-1}[(sL^+(0))^{-1}+\Psi^+(s)]+\lambda^s(L^+(s))^{-1}\Psi^-(s)\quad(s\in D^-)\\
&\Phi_2^+(s)=-s^{-1}+L^+(s)[(sL^+(0))^{-1}+\Psi^+(s)]\quad(s\in D^+)\\
&\Phi_2^-(s)=s^{-1}+L^-(s)\Psi^-(s)\quad(s\in D^-)
\end{aligned}\qquad(2.4)$$

Формулы (2.4), определяющие решение, содержат неизвестные функции $\Psi^+(s)$, $\Psi^-(s)$. Найдем их. Подставляя (2.4) во второе равенство (2.3), приходим к системе уравнений относительно коэффициентов $B_n^\pm(\lambda)$:

$$B_n^+(\lambda)=-\lambda^{2n+2\gamma}\Delta(n)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{B_m^-(\lambda)}{2(n+\gamma+m)-1}$$

$$B_n^-(\lambda)=-\lambda^{2n-1}\Delta(n)\left[\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\frac{2^\gamma}{2n-1}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{B_m^+(\lambda)}{2(n+\gamma+m)-1}\right]$$

$$\Delta(n)=2n[\pi(n+\gamma/2)]^{-1}\quad(n=1,\ 2,\ldots)\qquad(2.5)$$

Учитывая специфику системы уравнений (2.5), коэффициенты $B_n^\pm(\lambda)$ ищем в виде

$$B_n^\pm(\lambda)=\lambda^{2n+b^\pm}\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^\pm\lambda^k,\qquad b^+=2\gamma,\qquad b^-=-2\qquad(2.6)$$

Подставляя эти разложения в систему (2.5), методом неопределенных коэффициентов получаем следующие рекуррентные формулы

$$a_{n1}^-=\beta(n),\ \beta(n)=(2/\pi)^{1/2}2^\gamma\Delta(n)(1-2n)^{-1}$$

$$a_{n2}^-=\ldots=a_{n,3+2\gamma}^-=0$$

$$a_{nk}^+=-\Delta(n)\sum_{j=1}^{k_0}\frac{a_{j,k-2j+2}^-}{2(n+j+\gamma)-1},\qquad k_0=E((k+1)/2)$$

$$a^-_{n,3+2\gamma+k}=-\Delta(n)\sum_{j=1}^{k_0}\frac{a^+_{j,k-2j+2}}{2(n+j+\gamma)-1}\qquad(n,k=1,2,\ldots)\qquad(2.7)$$

Отсюда по индукции можно найти явные формулы для $a_{nk}^{\pm}$ ($E(a)$ — целая часть числа $a$):

$$a^+_{n,2p-\nu}=\sum_{i=0}^{N_0}\theta_{np}^{3-2\nu,i},\qquad a^-_{n,2p+1-\nu}=\sum_{i=0}^{N_1}\theta_{np}^{4-2\nu,i}\qquad(n,p=1,2,\ldots;\ \nu=0,1)$$

$$N_k=E([p-2-k+\nu+(\nu-1-k)\gamma](3+2\gamma)^{-1})\quad(k=0,1)\qquad(2.8)$$

$$\theta_{np}^{ki}=(-1)^k\Delta(n)\sum_{j_1=1}^{L_1}\frac{\Delta(j_1)}{j_{01}}\cdots\sum_{j_{s-1}=1}^{L_{s-1}}\frac{\Delta(j_{s-1})}{j_{s-2,s-1}}\sum_{j_s=1}^{L_s}\frac{\Delta(j_s)}{j_{s-1,s}}h_i$$

$$s=4i+k-1,\ L_1=p-1-\nu-\gamma,\ j_{01}=2(n+j_1+\gamma)-1$$

Если $q=2,3,\ldots$, то $j_{q-1,q}=2(j_{q-1}+j_q+\gamma)-1$:

$$L_q=p-j^{(q-1)}+E((s-k+2-4\nu)/4)-\gamma E((s+k-3+2\nu)/2)$$

$$h_i=\frac{\beta(p_1)}{2p_2-1},\qquad p_m=p-j^{(s+1-m)}-(2i+k-1-m+\nu)\gamma+i-\nu+1,\qquad j^{(q)}=\sum_{i=1}^{q}j_i$$

Анализ формул (2.8) показывает, что $|a_{nk}^{\pm}|\leqslant\text{const}$ ($n,k\to\infty$). Тогда степенные ряды (2.6) при $0<\lambda<1$ сходятся, и $|B_n^{\pm}(\lambda)|\leqslant\lambda^{2n}\text{ const}$.

Итак, найдено точное решение задачи (1.6). Оно определяется (2.4), (2.3), (2.6) и (2.8). Заметим, что рекуррентные соотношения (2.7) для численной реализации эффективней явных формул (2.8).

**3. Расчетные формулы для контактного напряжения, осадки и угла поворота.** При помощи обратного преобразования Меллина и формул (2.4), (1.7) находим

$$\varphi_\gamma(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\Phi_1^-(s)x^{-s}\,ds=I_0(x)+\sum_{m=1}^{\infty}[B_m^+(\lambda)I_m^+(x)+B_m^-(\lambda)I_m^-(x)]$$

$$I_0(x)=\frac{1}{L^+(0)}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{x^{-s}\,ds}{sL^-(s)}=\frac{2^{\gamma+1}x}{\pi(1-x^2)^{1/2}}$$

$$I_m^+(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{x^{-s}\,ds}{(s-2m-2\gamma)L^-(s)}=Q_m(x)\qquad(3.1)$$

$$I_m^-(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{(x/\lambda)^{-s}\,ds}{(s+2m-1)L^+(s)}=-\left(\frac{\lambda}{x}\right)^{2\gamma+1}Q_m\left(\frac{\lambda}{x}\right)$$

$$Q_m(x)=(2/\pi)^{1/2}x(2m+2\gamma+1)^{-1}F(3/2,\ m+\gamma+1/2,\ m+\gamma+3/2;\ x^2)$$

При $x\to1-0$ ($x\to\lambda+0$) для вычисления $Q_m(x)$ ($Q_m(\lambda/x)$) следует вместо формулы (3.1) пользоваться соотношением

$$Q_m(x)=-\frac{2^{1/2}\Gamma(m+\gamma+1/2)}{\Gamma(m+\gamma)x^{2m+2\gamma}}+\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\frac{x}{(1-x^2)^{1/2}}F\left(m+\gamma,1,\frac{1}{2};1-x^2\right)\qquad(3.2)$$

которое получается из (3.1) с учетом известных формул [11].

Таким образом, решение интегрального уравнения (1.2) запишется в виде

$$\varphi_\gamma(x)=\frac{2^{\gamma+1}x}{\pi(1-x^2)^{1/2}}+\sum_{m=1}^{\infty}\left[B_m^+(\lambda)Q_m(x)-B_m^-(\lambda)\left(\frac{\lambda}{x}\right)^{2\gamma+1}Q_m\left(\frac{\lambda}{x}\right)\right]\qquad(3.3)$$

через функции $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ выражается контактное напряжение

$$p(r,\ \theta)=(\pi\theta_0)^{-1}[\delta_0 r^{-1}\varphi_0(rb^{-1})+\delta_1\varphi_1(rb^{-1})\cos\theta] \qquad (3.4)$$

Осадку $\delta_0$ штампа и угол поворота $\delta_1$ найдем при помощи формул (1.4). Учитывая обозначения (1.7) и выражение (2.4) для $\Phi_1^-(s)$, приходим к следующим расчетным формулам

$$\delta_0=P\theta_0\{2b\Phi_1^-(1)\,|_{\gamma=0}\}^{-1},\ \delta=Pe\theta_0\{b^3\Phi_1^-(3)\,|_{\gamma=1}\}^{-1} \qquad (3.5)$$

$$\Phi_1^-(1)\,|_{\gamma=0}=\frac{2}{\pi}+\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{1-2m}B_m^+(\lambda)\,|_{\gamma=0}$$

$$\Phi_1^-(3)\,|_{\gamma=1}=\frac{8}{3\pi}+2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{1-2m}B_m^+(\lambda)\,|_{\gamma=1}$$

Определим теперь предельный эксцентриситет $e_{\max}$, превышение которого приводит к отрыву штампа от основания. Условие отрыва, очевидно, $p(b,\ \pi)=0$, из которого вследствие формул (3.4), (3.3) и (3.2) получаем

$$\delta_0 b^{-1}\beta_0(\lambda)-\delta_1\beta_1(\lambda)=0$$

$$\beta_\gamma(\lambda)=\frac{2^{\gamma+1}}{\pi}+\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\sum_{m=1}^{\infty}B_m^+(\lambda)$$

Принимая во внимание выражения (3.5), имеем окончательно

$$e_{\max}=b\Phi_1^-(3)\,|_{\gamma=1}\beta_0(\lambda)\,\{2\Phi_1^-(1)\,|_{\gamma=0}\beta_1(\lambda)\}^{-1} \qquad (3.6)$$

В частности, совершая в формулах (3.3), (3.5), (3.6) предельный переход $\lambda\to 0$, получаем известные результаты [12] для кругового штампа.

**4. Задача о кольцевой трещине.** Рассмотрим следующую задачу: в пространстве — неограниченной упругой среде — имеется в плоскости $z=0$ разрез кольцевой формы ($a\leqslant r\leqslant b$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$), к берегам $z=\pm 0$ которого приложены нормальные напряжения, равные по величине и по знаку $\sigma_z=$ $=q=\mathrm{const}$; требуется найти коэффициенты интенсивности напряжений на окружностях $r=a$ и $r=b$. Сформулированная задача эквивалентна [13] следующему интегральному уравнению с ядром Вебера — Сонина

$$\int_a^b W_{11}(r,\rho)\,w_0(\rho)\,\rho\,d\rho=-2(1-\mu)q\left(r+\frac{b^2}{r}C\right) \qquad (a<r<b) \qquad (4.1)$$

при дополнительном условии замкнутости разреза

$$\int_a^b w_0(r)\,dr=0, \qquad w_0(r)=2G\frac{d}{dr}\,(w\,|_{z=-0}-w\,|_{z=+0}) \qquad (4.2)$$

где $\mu$ — коэффициент Пуассона, $G$ — модуль сдвига, $C$ — произвольная постоянная, $w$ — перемещение вдоль оси $Oz$.

Введем в рассмотрение функции $\varphi_1$ и $\varphi_2$;

$$w_0(by)=-2(1-\mu)\,q[\varphi_1(y)+C\varphi_2(y)] \qquad (4.3)$$

для их определения из (4.1) получаем уравнения

$$\int_\lambda^1 l_1\left(\frac{x}{y}\right)\varphi_\nu(y)\frac{dy}{y}=x^{2(1-\nu)} \qquad (\lambda<x<1,\ \nu=1,2) \qquad (4.4)$$

где $l_1(t)$ определена в (1.3). Из условия (4.2) находим постоянную $C$:

$$C=-\int_\lambda^1\varphi_1(y)\,dy\left\{\int_\lambda^1\varphi_2(y)\,dy\right\}^{-1} \qquad (4.5)$$

Для случая $\nu=1$ решение уже построено в пп. 1, 2 ($\gamma=1$). При $\nu=2$ уравнение (4.4) отличается от (1.2) при $\gamma=1$ только правой частью. Следуя схеме пп. 1, 2, сохраняя те же обозначения, получаем решение векторной задачи Римана (1.6), соответствующей уравнению (4.4) при $\nu=2$:

$$\begin{gathered}
\Phi_1^+(s)=(L^+(s))^{-1}[\Psi^-(s)-\lambda^{-2}((s-2)L^-(2))^{-1}]+\\
+\lambda^{-s}(L^-(s))^{-1}[\Psi^+(s)+((s-2)L^+(2))^{-1}1],\ \Phi_1^-(s)=\lambda^s\Phi_1^+(s)\\
\Phi_2^+(s)=-(s-2)^{-1}+L^+(s)[\Psi^+(s)+((s-2)L^+(2))^{-1}]\\
\Phi_2^-(s)=\lambda^{-2}(s-2)^{-1}+L^-(s)[\Psi^-(s)-\lambda^{-2}((s-2)L^-(2))^{-1}]
\end{gathered} \tag{4.6}$$

Функции $L^\pm(s)$, $\Psi^\pm(s)$ определены соответственно в (2.1) и (2.3) ($\gamma=1$):

$$B_n^\pm(\lambda)=\lambda^{2n-3/2\pm 1/2}\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^\pm\lambda^k$$

Для коэффициентов $a_{nk}^\pm$ аналогично (2.7) получаются удобные при численной реализации рекуррентные соотношения

$$a_{n1}^+=\frac{\Delta(n)}{2n}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2},\quad a_{n1}^-=-\frac{\Delta(n)}{2n+1}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2},\quad a_{n2}^+=a_{n3}^+=a_{n2}^-=0$$

$$a_{nk}^+=-\Delta(n)\sum_{j=1}^{k_0}\frac{\overset{-}{a}_{j,k-2j-1}}{2n+2j+1}\quad (k_0=E(k/2)-1,\ k=4,5,\ldots)$$

$$a_{nk}^-=-\Delta(n)\sum_{j=1}^{k_1}\frac{\overset{+}{a}_{j,k-2j}}{2n+2j+1}\quad (k_1=E((k-1)/2),\ k=3,4,\ldots)$$

$$\Delta(n)=2n[\pi(n+1/2)]^{-1}\quad (n=1,2,\ldots)$$

Так же, как и в п. 2, имеют место явные формулы для $a_{nk}^\pm$, аналогичные формулам (2.8). Константа $C$ находится из условия (4.5):

$$C=-\Phi_1^-(1)|_{\nu=1}\{\Phi_1^-(1)|_{\nu=2}\}^{-1} \tag{4.7}$$

**5. Формулы для коэффициентов интенсивности напряжений.** Введем в рассмотрение следующие коэффициенты.

$$K_{I,a}=\lim_{r\to a-0}[2\pi(a-r)]^{1/2}\sigma_z|_{z=0},\quad K_{I,b}=\lim_{r\to b+0}[2\pi(r-b)]^{1/2}\sigma_z|_{z=0} \tag{5.1}$$

Напряжения $\sigma_z$ и скачок перемещений $w$ на линии $z=0$ связаны соотношением [13]:

$$-4(1-\mu)r^2\sigma_z|_{z=0}=2G\partial_r^2\int_0^\infty W_{00}(r,\rho)\langle w\rangle(\rho)\rho\,d\rho$$

$$\partial_r\equiv r\partial/\partial r,\ \langle w\rangle\equiv w|_{z=-0}-w|_{z=+0}$$

Отсюда, очевидно, получаем

$$-4(1-\mu)\sigma_z|_{z=0}=\int_a^b W_{01}^1(r,\rho)w_0(\rho)\rho\,d\rho,$$

$$W_{01}^1(r,\rho)=\int_0^\infty tJ_0(tr)J_1(t\rho)\,dt$$

Отщепляя от сингулярного ядра $W_{01}^1(r, \rho)$ ядро Коши, приходим к равенству

$$-4(1-\mu)\sigma_z|_{z=0}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\lambda}^{1}\frac{1}{y-x}\left(\frac{y}{x}\right)^{1/2}w_0(by)\,dy+\Omega(x)$$

где $x=rb^{-1}$, функция $\Omega(x)$ ограничена при $x\to\lambda$ и $x\to 1$.

Найдем поведение функции $w_0(by)$ при $y\to\lambda+0$ и $y\to 1-0$. Для этого воспользуемся поведением на бесконечности функции $\Phi_1^-(s)$:

$$\Phi_1^-(s)=\int\limits_{\lambda}^{1}\varphi_\nu(y)\,y^{s-1}\,dy\sim\beta_\nu^+ s^{-1/2}\qquad(s\to\infty,\ s\in D^-)\tag{5.2}$$

$$\beta_{1,2}^+=\left[\frac{1}{L^+(2\nu-2)}+\sum_{n=1}^{\infty}B_n^+(\lambda)\right]_{\nu=1,2}\tag{5.3}$$

Формула (5.2) вытекает непосредственно из (2.4) и (4.6). Принимая во внимание далее равенство (4.3) и теорему Таубера, получаем

$$w_0(by)\sim k^+(1-y)^{-1/2},\quad y\to 1-0\tag{5.4}$$

$$k^+=-2(1-\mu)\,q\pi^{-1/2}(\beta_1^+ + C\beta_2^+)$$

Для того, чтобы найти поведение функции $w_0(by)$ при $y\to\lambda+0$, обратимся к анализу функции $\Phi_1^+(s)$ при $s\to\infty$, $s\in D^+$. Имеем ($\delta_{\nu,2}$ — символ Кронекера):

$$\Phi_1^+(s)=\int\limits_{1}^{1/\lambda}\varphi_\nu(\lambda\tau)\,\tau^{s-1}\,d\tau\sim-\beta_\nu^-(-s)^{-1/2}\qquad(s\to\infty,\ s\in D^+)$$

$$\beta_{1,2}^-=\left[-\frac{\lambda^{-2}}{L^-(2)}\delta_{\nu,2}+\sum_{n=1}^{\infty}B_n^-(\lambda)\right]_{\nu=1,2}\tag{5.5}$$

Отсюда аналогично (5.4) находим

$$w_0(by)\sim-k^-(y\lambda^{-1}-1)^{-1/2},\quad y\to\lambda+0\tag{5.6}$$

$$k^-=-2(1-\mu)\,q\pi^{-1/2}(\beta_1^- + C\beta_2^-)$$

Если теперь учесть асимптотические равенства (5.4) и (5.6), то при помощи формул [14], отражающих поведение интеграла типа Коши на концах, имеем

$$4(1-\mu)\sigma_z|_{z=0}\sim k^- a^{1/2}(a-r)^{-1/2},\ r\to a-0$$

$$4(1-\mu)\sigma_z|_{z=0}\sim k^+ b^{1/2}(r-b)^{-1/2},\ r\to b+0$$

Сопоставляя последние формулы с соотношениями (5.1), находим расчетные формулы для коэффициентов интенсивности напряжений $K_\mathrm{I}$

$$K_{\mathrm{I},a}=-(a/2)^{1/2}qk_0^-,\ K_{\mathrm{I},b}=-(b/2)^{1/2}qk_0^+,\ k_0^\pm=\beta_1^\pm+C\beta_2^\pm$$

константы $\beta_{1,2}^\pm$ определены в (5.3) и (5.5), а $C$ — равенством (4.7).

**6. Численный пример.** Расчеты проведены для контактной задачи о кольцевом штампе. В таблице представлена зависимость осадки штампа $\delta_0$ при $e=0$ от $\lambda$.

В третьей и четвертой колонках для функции $\omega(\lambda)=b(1-\lambda^2)(\theta_0 P)^{-1}\delta$ при $e=0$ приведены соответственно точные значения $\omega$ по формуле (3.5) и приближенные значения $\omega_*$ из [15]. В последней колонке указаны величины предельного эксцентриситета $e_{\max}$.

Ниже представлены значения контактного напряжения $p(r, \theta)$ для $e=0$, $\lambda=0{,}9$ (в этом случае $p(r, \theta)=p_0(r)$) в точках $r_i=a+ih$ ($h=(b-a)/20$, $i=1, 2, \ldots, 19$).

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P^{-1}p_0$ | 2,222 | 1,633 | 1,388 | 1,252 | 1,169 | 1,117 | 1,084 | 1,066 | 1,061 | 1,066 |
| $i$ | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | — |
| $P^{-1}p_0$ | 1,082 | 1,109 | 1,150 | 1,208 | 1,290 | 1,409 | 1,592 | 1,911 | 2,653 | — |

*Таблица*

| $\lambda$ | $(P\theta_0)^{-1}\delta_0$ | $\omega$ | $\omega_*$ | $b^{-1}e_{\max}$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,7854 | 0,7854 | – | 0,3333 |
| 0,1 | 0,7855 | 0,7776 | – | 0,3334 |
| 0,2 | 0,7863 | 0,7548 | 0,74 | 0,3341 |
| 0,3 | 0,7884 | 0,7174 | – | 0,3358 |
| 0,4 | 0,7928 | 0,6659 | 0,67 | 0,3392 |
| 0,5 | 0,8006 | 0,6004 | – | 0,3451 |
| 0,6 | 0,8138 | 0,5208 | 0,52 | 0,3543 |
| 0,7 | 0,8360 | 0,4263 | – | 0,3684 |
| 0,8 | 0,8750 | 0,3150 | 0,32 | 0,3897 |
| 0,9 | 0,9566 | 0,1818 | 0,18 | 0,4240 |
| 0,95 | 1,0502 | 0,1024 | 0,10 | 0,4511 |

Численная реализация показала эффективность метода не только для малых $\lambda$ (толстостенных кольцевых штампов), но и для $\lambda$, близких к единице (тонкостенных кольцевых штампов).

В заключение отметим, что точные решения задач о кольцевом штампе или кольцевой трещине могут быть получены и при более общих предположениях: достаточно, чтобы профиль штампа $q(r, \theta)$ или заданные напряжения на берегах разреза $q(r, \theta)$ допускали представление $q(r, \theta)=\Sigma q_k(r)\cos k\theta$ $(k=0, 1, \ldots)$, а функции $q_k(r)$ разлагались в степенной ряд, сходящийся в кольце $(a, b)$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Антипов Ю. А.* Точное решение задачи о вдавливании кольцевого штампа в полупространство // Докл. АН УССР. Сер. А. 1987. № 7. С. 29–33.
2. *Александров В. М.* Контактные задачи для полупространства. Сложные в плане области контакта // Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука, 1976. С. 200–206.
3. *Моссаковский В. И., Ковура А. Б.* Контактные задачи для упругого полупространства с круговыми и близкими к круговым линиями раздела граничных условий // Динамика и прочность тяжелых машин. Днепропетровск: ДГУ. 1980. Вып. 5. С. 74–89.
4. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф.* Растяжение упругого пространства, ослабленного кольцевой трещиной // Прикл. механика. 1965. Т. 1. Вып. 10. С. 61–64.
5. *Боговой В. Г., Нуллер Б. М.* Давление кольцевого штампа на полупространство с включением. // Общетехн. науки: Хабаровск. 1972. С. 18–29.
6. *Ройтман А. Б., Шишканова С. Ф.* Решение задачи о кольцевом штампе с использованием рекуррентных соотношений.// Прикл. механика. 1973. Т. 9. Вып. 7. С. 37–42.
7. *Губенко В. С., Накашидзе Г. М., Пятоваленко В. Г.* Точное решение задачи о кольцевом штампе. // Докл. АН УССР. Сер. А. 1986. № 8. С. 40–44.
8. *Ганин М. П.* Об интегральном уравнении Фредгольма с ядром, зависящим от разности аргументов // Изв. вузов. Математика. 1963. № 2. С. 31–43.
9. *Игнатенко М. М., Кириллов В. Х.* О решении некоторых задач математической физики. // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 7. С. 1296–1302.
10. *Попов Г. Я.* Об одном приближенном способе решения контактной задачи о кольцевом штампе. // Изв. АН АрмССР. Механика. 1967. Т. 20. № 2. С. 19–36.
11. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962, 1100 с.
12. *Абрамов В. М.* Исследование случая несимметричного давления штампа круглого сечения на упругое полупространство. // Докл. АН СССР. 1939. Т. 23. № 8. С. 759–763.
13. *Попов Г. Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
14. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
15. *Егоров К. Е.* Вдавливание в полупространство штампа с плоской подошвой кольцевой формы // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1963. № 5. С. 187–190.


Одесса

Поступила в редакцию
16.II.1988